

진동응답을 최소화하는 비구속형 제진보의 제진 부위 최적설계

Optimal Treatment of Unconstrained Visco-elastic Damping Layer on Beam to Minimize Vibration Responses

이 두 호†

Doo-Ho Lee

(2005년 3월 28일 접수 : 2005년 6월 20일 심사완료)

Key Words : Optimal Treatment(최적배치), Unconstrained Damping Layer(비구속 제진층), Viscoelastic Material(점탄성 물질), Fractional Derivative Model(유리미분모델), Design Sensitivity(설계민감도)

ABSTRACT

An optimization formulation of unconstrained damping treatment on beam is proposed to minimize vibration responses using a numerical search method. The fractional derivative model is combined with RUK's equivalent stiffness approach in order to represent nonlinearity of complex modulus of damping materials with frequency and temperature. Vibration responses are calculated by using the modal superposition principle, and of which design sensitivity formula with respect to damping layout is derived analytically. Plugging the sensitivity formula into optimization software, we can determine optimally damping treatment region that gives minimum forced response under a given boundary condition. A numerical example shows that the proposed method is very effective in suppressing vibration responses by means of unconstrained damping layer treatment.

기 호 설 명

$\alpha(T)$: 온도에 따른 이동계수(shift factor)
 b : 설계변수
 η : 손실계수(loss factor)
 E^* : 복소 영의 계수(complex modulus)
 f : 주파수(frequency, Hz)
 h : 보와 제진층 두께 비($=H_2/H_1$)
 H_1 : 보의 두께
 H_2 : 제진층의 두께
 i : 단위허수($=\sqrt{-1}$)
 K : 강성행렬(stiffness matrix)

M : 질량행렬(mass matrix)
 ρ : 밀도
 T : 절대온도(temperature)
 U : 탄성변형 에너지
 x : 변위(displacement)

1. 서 론

손실계수가 큰 점탄성 물질(viscoelastic material)을 이용하여 구조물의 진동을 수동적으로 제어하는 방법은경제적으로 비용이 적게 들 뿐만 아니라, 신뢰성면에서도 우수하기 때문에 많이 이용되고 있다. 구조물의 표면에 점탄성 층을 부착하여 진동을 저감시키는 방법은 구속제진층(constrained damping layer)을 이용하는 방법과 비구속 제진층(unconstrained damping layer)을 이용하는 방법으로 나눌 수 있다.

† 책임저자 : 정회원, 동의대학교 기계공학과
E-mail : dooho@deu.ac.kr
Tel : (051) 890-1658, Fax : (051) 890-2232

비구속 제진층은 낮은 비용으로 제진 처리를 할 수 있기 때문에 자동차나 가전 제품 등의 대량 생산품의 진동 제어용으로 많이 쓰이고 있다.

제진층 부착위치를 최적화하려는 노력은 많은 연구자에 의해서 수행되었으나 주파수와 온도에 따른 점탄성 층의 특성 변화를 효과적으로 고려한 경우는 거의 없었다.⁽¹⁻⁶⁾ 최근에 저자 등은 주파수와 온도의 변화에 따른 점탄성물질의 특성변화를 고려할 때, 유리미분모델을 이용한 정식화가 제진재 부착위치의 최적화에 효과적인 방법임을 보이고 손실계수가 최대가 되는 제진층의 길이를 최적화하는 방법을 제시하였다.^(7,8)

이 연구에서는 선행 연구를 확장하여 비구속형 점탄성 제진 물질이 부착된 보의 강제진동응답을 최소화하는 제진재 부착위치를 최적 설계하는 방법을 제안하고 수치 예제를 통하여 그 효용성을 검증한다.

2. 비구속 제진층 보의 진동 응답 해석

2.1 점탄성 물질의 모델링

복소계수(complex modulus) 개념을 이용하면 점탄성 물질의 응력-변형을 관계는 주파수 영역에서 다음과 같이 기술될 수 있다.

$$\sigma = E^* \varepsilon = E(1+i\eta)\varepsilon \quad (1)$$

여기서 E^* , E , η 는 각각 복소계수, 저장계수(storage modulus)와 손실계수(loss factor)이고 상첨자 *는 복소수를 의미한다.

온도의 변화에 따른 점탄성 물질의 복소계수 변화는 온도-주파수 중첩원리(temperature-frequency superposition principle)⁽⁹⁾를 이용하면 온도의 영향을 주파수의 영향으로 환산할 수 있고, 환산량은 온도만의 함수인 이동계수 $\alpha(T)$ 로 표현된다. 대부분의 점탄성 물질에서 $\log \alpha(T)$ 와 $1/T$ 는 비례하는 관계를 보이는 것으로 알려져 있고 다음과 같이 표현할 수 있다.⁽⁹⁾

$$\log(\alpha(T)) = d_1 \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \quad (2)$$

위 식에서 d_1 은 비례상수이고 T_0 는 기준온도이다.

환산 주파수의 변화에 따른 점탄성 물질의 복소계수는 일차 유리미분모델(fractional derivative

model)^(10,11)을 이용하면 주파수영역에서 다음과 같이 간단하게 표현할 수 있다.

$$E^* = E(1+i\eta) = \frac{a_1 + b_1(\text{if}\alpha(T))^\beta}{1 + c_1(\text{if}\alpha(T))^\beta} \quad (3)$$

여기서 a_1, b_1, c_1, β 는 물질상수이다. 그러므로 상수, a_1, b_1, c_1, β 를 알고 있다면 점탄성 물질의 감쇠특성을 주파수 및 온도에 따라서 쉽게 기술할 수 있고 점탄성 물질의 물질상수 a_1, b_1, c_1, β 는 감쇠 특성시험을 여러 환경에 대하여 행한 다음 커브 피팅을 통하여 결정할 수 있다.⁽⁹⁾

2.2 제진층을 갖는 보의 고유 모드 해석

점탄성 층을 갖는 보의 해석방법 중에서 간단하면서도 정확한 해석으로 가장 많이 쓰이는 방법이 Ross, Ungar, Kerwin(RUK) 등에 의해 제안된 등가 강성법이다⁽¹²⁾. RUK 식에 의하면 점탄성 층의 저장계수, 손실계수가 각각 E_2, η_2 이고 보의 저장계수, 손실계수, 이차 면적 모멘트가 각각 E_1, η_1, I_1 일 때, 등가의 복소 처짐 강성(flexural rigidity) $(EI)^*$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{(EI)^*}{(E_1 I_1)^*} = 1 + e^* h^3 + 3(1+h)^3 \frac{e^* h}{1+e^* h} \quad (4)$$

여기서 $h = H_2/H_1$, $e^* = E_2^*/E_1^*$ 이다. 식 (4)를 이용하면 점탄성 제진층이 부착된 보의 등가 강성(storage modulus)과 등가 손실계수를 계산할 수 있다.

Fig.1과 같이 제진층을 포함하는 구조계를 유한요소(finite element)로 모델링 하면, 점탄성 제진층을 갖는 부분은 식 (4)에 의해서 정의되는 등가 강성을 갖는 보 요소(beam element)로 모델링 되고, 점탄성 제진층을 갖지 않는 부분은 별도의 강성을 갖는 보로 모델링 할 수 있다. 처짐과 회전변위를 갖는 보 요소

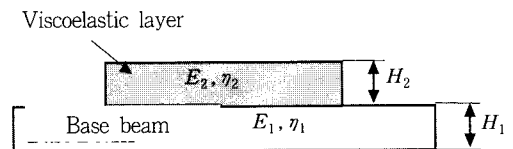


Fig. 1 Unconstrained viscoelastic damping layer on beam

를 고려하고 전단 변형 에너지를 무시하면 유한요소법의 절차에 따라 구성된 계의 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$M\ddot{x} + Kx = f \quad (5)$$

여기서 M 과 K 는 각각 질량행렬(mass matrix)과 강성행렬(stiffness matrix)이고, x 와 f 는 각각 변위벡터와 외력벡터이다. 구조계가 등가강성을 갖는 보로 이루어져 있고 점탄성 층을 포함하는 경우 강성행렬, K 는 복소수 값이 되며 손실계수와는 다음과 같은 관계식을 만족한다.

$$K = K_r + iK_i = K_r(1 + i\eta) \quad (6)$$

위 식에서 $()_r, ()_i$ 는 각각 실수부와 허수부를 의미한다. 조화운동을 가정하면 식 (5)로 표현되는 계의 실수 고유값문제는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$K_r y = \zeta M y \quad (7)$$

위 식에서 y 는 고유벡터(eigenvector)이고 $\zeta(\omega^2)$ 는 고유값(eigenvalue)이다. 식 (7)로 표현된 고유값 문제의 강성행렬은 점탄성 층의 영향으로 강성계수가 주파수의 함수가 되어 비선형 방정식이 된다. 그러나 점탄성 물질의 강성계수가 변위에 무관하다고 가정하면 축차 과정을 통하여 고유값 문제를 풀 수 있다^(7,8).

2.3 제진층을 갖는 보의 진동응답해석

제진층을 갖는 보의 동적응답은 모드중첩(modal superposition)을 이용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x = \sum_{k=1}^m a_k y_k \quad (8)$$

여기서 m 은 모드 수이며, y_k 는 k 번째 고유벡터이고, a_k 는 k 번째 모드좌표이며 다음과 같이 표현된다.

$$a_k = \frac{y_k^T f}{\zeta_k(1 + i\eta_k) - \omega^2} \quad (9)$$

식 (9)에서 η_k 는 k 번째 모드의 손실계수이다. 특정 고유모드에 대한 손실계수는 다음과 같이 정의 된다.

$$\eta_k = \frac{\sum_{j=1}^n \eta_{ej} U_{ej}}{\sum_{j=1}^n U_{ej}} = \frac{\sum_{j=1}^n \eta_{ej} U_{ej}}{U} \quad (10)$$

위 식에서 η_k 는 k 번째 고유모드의 손실계수이고, n 은 유한요소의 개수, η_{ej} 는 j 번째 요소의 손실계수이고, U_{ej} 는 j 번째 요소의 최대 변형 에너지이다. 식 (10)의 최대 변형에너지를 정확히 구하기 위해서는 복소 고유벡터를 사용해야 한다. 그러나 감쇠가 크지 않은 경우, 감쇠계의 고유진동수와 고유모드는 비감쇠계의 고유진동수와 고유모드와 같다고 가정할 수 있고, 결과적으로 실수 고유값 문제를 풀어 각 모드의 모드변형에너지를 사용하여 각 모드의 손실계수를 구하는 것이 일반적이다⁽¹²⁾. 이 연구에서도 실수 고유모드를 사용하여 각 모드의 손실계수를 계산한다.

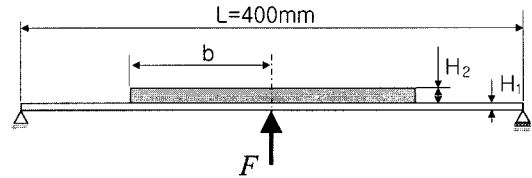


Fig. 2 Pinned-pinned unconstrained beam problem

Table 1 Material properties of the beam problem

Property	Material		
	Al	LD-400 ⁽¹²⁾	
E(GPa)	69.	a_1	0.3382
		b_1	2.4850
η	0.001	c_1	0.12
		β	0.47
		d_1	12222.
ρ [kg/m ³]	2760	1524	
Thickness [mm]	2	0.889	
T_0 [°C]	-	15.6	

Table 2 Comparison of eigenfrequencies

Mode	Eigenfrequency [Hz]		$\frac{A}{B} \times 100$
	Present method(A)	NASTRAN(B)	
1	28.7	30.8	93.3
2	116.6	118.1	98.7
3	265.2	265.6	99.8
4	482.7	480.7	100.4
5	758.6	749.9	101.2
6	1083.5	1060.	102.2

진동응답의 계산과정을 확인하기 위한 수치예제로 Fig. 2와 같은 비구속형 보를 고려한다. 보의 양측은 핀 지지(pinned-pinned) 되어 있다. 점탄성 제진 물질은 LD-400⁽¹²⁾이고 보의 재질은 알루미늄이며 사용된 물성 값은 Table 1에 표시하였다.

등가 강성을 갖는 보의 진동응답을 계산하기 위하여 Hermite 3차 보간 함수를 갖는 이차원 유한요소 프로그램을 개발하고 Fig. 2의 보를 20개의 요소로 모델링 하여 식 (7)의 고유값 문제를 풀고 관심주파수 폭의 2배 이내에 있는 고유모드와 식 (8)을 이용하여 하중 점에서의 리셉턴스 값을 계산하였다. 해석 결과의 정확성을 확인하기 위하여 MSC/NASTRAN⁽¹³⁾을 이용한 해석결과와 비교한 후, Table 2에 고유주파수 값을 비교 정리하고 Fig. 3에 리셉턴스 값을 비교하여 그렸다. NASTRAN의 경우 주파수에 대하여 비선형으로 변화하는 탄성계수를 모델링 하는 기능이 없으므로 중간 주파수인 500 Hz에서의 물성값을 입력으로 사용하였다. 두 해석 결과는 비교적 잘 일치하나 중간 주파수를 기준으로 멀어질수록 차이가 커지는 것을 볼 수 있다. Fig. 3의 700 Hz 대역에서 두 결과가 차이가 나는 것은 NASTRAN 모델에서는 이차원이 아닌 면 방향의 고유모드가 하나 존재하기 때문이다.

3. 점탄성 제진 부위 최적설계

3.1 비구속 감쇠층 설계민감도 해석

동적응답을 최소화하는 제진재 부착위치를 최적화하기 위해서는 제진 부위의 변화에 따른 강제진동응답의 변화율을 알아야 한다. 식 (8)로 표현된 강제진동응답 \mathbf{x} 를 설계변수 \mathbf{b} 로 미분하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{b}} = \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{d\mathbf{a}_k}{d\mathbf{b}} \mathbf{y}_k + \mathbf{a}_k \frac{d\mathbf{y}_k}{d\mathbf{b}} \right\} \quad (11)$$

여기서

$$\frac{d\mathbf{a}_k}{d\mathbf{b}} = \frac{d\mathbf{y}_k^T}{d\mathbf{b}} \cdot \mathbf{f} \times (\zeta_k(1+i\eta_k) - \omega^2)^{-1} \\ \frac{\mathbf{y}_k^T \mathbf{f} \left[\frac{d\zeta_k}{d\mathbf{b}} (1+i\eta_k) + i\zeta_k \cdot \frac{d\eta_k}{d\mathbf{b}} \right]}{(\zeta_k(1+i\eta_k) - \omega^2)^2} \quad (12)$$

식 (11, 12)의 진동응답에 대한 설계민감도는 고유값 및 고유벡터 설계민감도와 손실계수에 대한 설계민감도를 알면 계산할 수 있다.

비구속 제진층을 갖는 보의 손실계수에 대한 설계민감도는 손실계수 표현식 (10)을 설계변수로 미분하여 다음과 같이 얻어진다.

$$\frac{d\eta_k}{d\mathbf{b}} = \mathbf{U}^{-1} \left\{ \sum_{ei=1}^n \left\{ \frac{d\eta_{ei}}{d\mathbf{b}} \mathbf{U}_{ei} + \eta_{ei} \frac{d\mathbf{U}_{ei}}{d\mathbf{b}} \right\} - \eta_k \frac{d\mathbf{U}}{d\mathbf{b}} \right\} \quad (13)$$

여기서 요소변형에너지 U_{ei} 와 전체 변형에너지 U 는 요소 고유벡터 \mathbf{y}_{ei} 와 강성행렬 \mathbf{K}_{ei} 로 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{U}_{ei} = \frac{1}{2} \mathbf{y}_{ei}^T \mathbf{K}_{ei} \mathbf{y}_{ei} \quad (14)$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y} \quad (15)$$

그러므로 식 (13)에서 변형에너지에 대한 미분 값은 고유벡터에 대한 설계민감도를 알면 계산할 수 있고, 요소 손실계수에 대한 미분, $d\eta_{ei}/d\mathbf{b}$ 는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\frac{d\eta_{ei}(\mathbf{b}, f, T)}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial \eta_{ei}}{\partial \mathbf{b}} + \frac{\partial \eta_{ei}}{\partial f} \frac{df}{d\mathbf{b}} + \frac{\partial \eta_{ei}}{\partial T} \frac{dT}{d\mathbf{b}} \quad (16)$$

식 (16)에서 온도가 일정하다고 가정하면 우변의 마지막 항은 영이 되며 나머지 항은 고유값 설계민감도와 식 (3, 4)을 미분함으로써 얻을 수 있다⁽⁸⁾.

$$\frac{\partial \eta_{ei}}{\partial f} = \frac{Im(\partial \mathbf{E}^* / \partial f) \cdot Re(\mathbf{E}^*) - Im(\mathbf{E}^*) \cdot Re(\partial \mathbf{E}^* / \partial f)}{(Re(\mathbf{E}^*))^2} \quad (17)$$

위 식에서 $Im(\cdot)$ 와 $Re(\cdot)$ 는 각각 실수부와 허수부를 의미한다. 식 (17)에서 $\partial \mathbf{E}^* / \partial f$ 는 복소계수의 유리미분 표현식 (3)과 제진보의 등가강성식 (4)를 미분함으로써 얻을 수 있다. 식 (16)의 $\dot{f} \equiv df/d\mathbf{b}$ 는 고유값 설계민감도 ζ 와 $\dot{\zeta} = 8\pi^2 f \dot{f}$ 의 관계를 갖고 고유값 민감도는 다음과 같은 식으로부터 구할 수 있다⁽¹⁴⁾.

$$\dot{\zeta}_k = \mathbf{y}_k^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{y}_k - \zeta_k \mathbf{y}_k^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{y}_k \quad (18)$$

다음으로 임의의 k 번째 고유벡터에 대한 민감도 $\partial y_k / \partial b$ 는 고유문제 방정식 (7)을 미분하고 고유벡터 민감도를 고유좌표로 근사한 후, 고유벡터의 직교 조건을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다^(8,15).

$$\frac{\partial y_k}{\partial b} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^r \frac{-y_j^T (\partial K / \partial b - \zeta_k \partial M / \partial b) y_k}{\zeta_j - \zeta_k} y_j - \frac{1}{2} \left(y_k^T \frac{\partial M}{\partial b} y_k \right) y_k \quad (19)$$

그러므로 식 (11)의 진동응답에 대한 설계민감도를 계산하기 위해서는 고유치 및 고유벡터 설계민감도와 식 (3)과 (4)의 복소계수와 등가강성에 대한 해석적인 미분이 필요하게 되며, 전체적으로 한 번의 고유값 문제와 간단한 산술계산으로 설계민감도 계산을 효율적으로 수행할 수 있다.

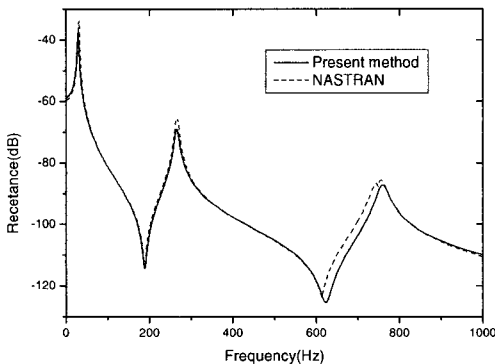


Fig. 3 Comparison of point receptance of the beam problem

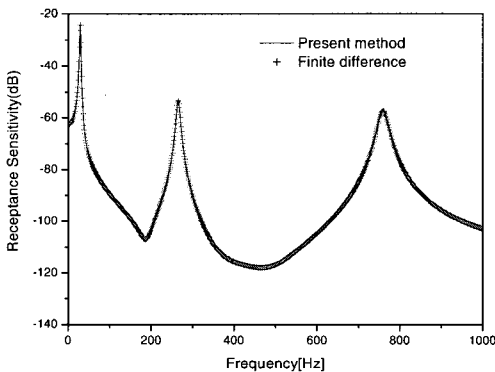


Fig. 4 Sensitivity calculation results of the beam problem compared with those of the FDM

제안된 설계민감도 해석방법을 검증하기 위하여 Fig.2의 보 문제에 대하여 설계민감도 해석을 수행하였다. 설계변수는 제진층의 길이이고 물성값은 2장에서와 같다. 제진층이 보의 1/2에 부착되어 있을 때 ($b=100$ mm) 외력 작용점의 리셉턴스 값에 대한 설계민감도 값을 Fig.4에 그렸다. 비교를 위하여 0.1%의 설계변수를 변화시켜 계산한 전방 유한차분법의 결과와 비교하였다. 그림을 보면 두 결과는 잘 일치하고 있어 제시된 설계민감도 해석 절차가 유효함을 증명하고 있다.

3.2 제진층 부착부위의 최적화

점탄성 제진층의 두께가 일정하다고 가정하고 일정한 체적의 제진재가 주어졌을 때 진동응답을 최소화하는 제진 부위의 최적설계 문제는 다음과 같은 최적화 문제로 정의할 수 있다.

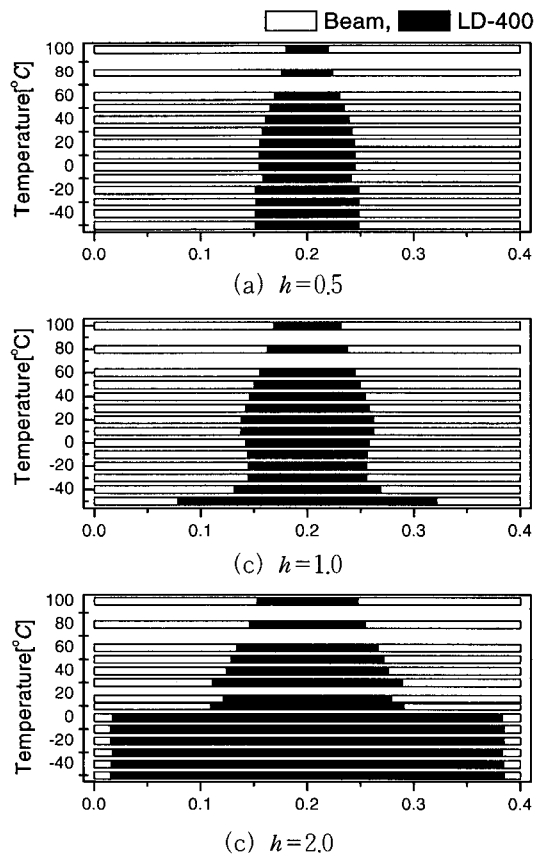


Fig. 5 Overhead view of optimal damping treatment according to the total amount of the damping material

Find design variables b such that
 minimize() $\Phi(b; f, T)$
 subject to $l_u \leq b \leq l_v$.
 and $b_L \leq b \leq b_U$ (20)

여기서 b 는 설계변수 벡터로 제진층의 피복 길이와 높이이고, b_L 과 b_U 는 각각 설계변수의 하한 값과 상한 값이다. 목적함수 Φ 는 데시벨 스케일로 나타낸 진동응답의 크기와 일정 기준 값 x_{target} 과의 차의 제곱 면적을 선정하였다. 단, 진동응답이 기준 값보다 높은 영역만을 면적에 포함시킨다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같이 된다.

$$\Phi(b) = \int_{f_1}^{f_2} \langle \bar{x} \rangle \bar{x}^2 df \quad \text{where } \bar{x} = 20 \log \frac{\|x\|}{x_{ref}} - x_{target} \quad (21)$$

여기서 $\langle a \rangle$ 는 a 가 양수이면 1이고 a 가 음수이면 0인 함수이다. $\| \cdot \|$ 는 벡터의 크기를 나타낸다.

Fig. 2와 같은 비구속형 점탄성 제진층을 갖는 보

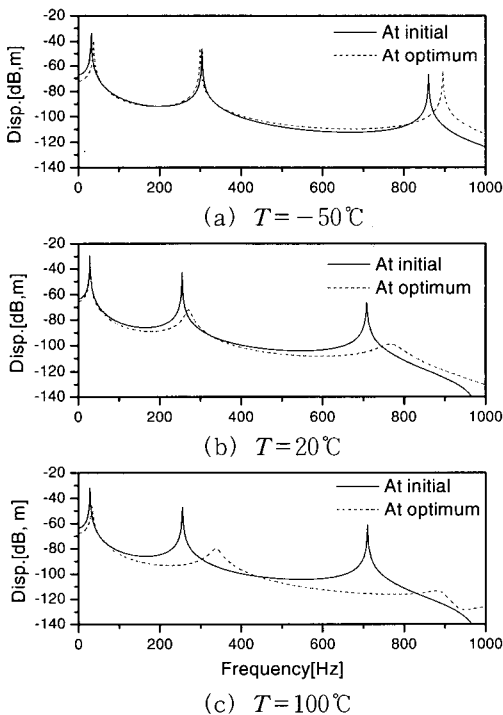


Fig. 6 Point receptances at optimal damping treatments compared with those at initial ($h=1.0$)

구조물의 제진 부위를 최적화하기 위하여 범용 최적화 프로그램인 IDESIGN⁽¹⁶⁾을 이용하여 식 (20)의 최적화 문제를 풀었다. 보의 유한요소모델은 3.1절의 등가 보요소 모델과 동일하며 모든 물성값도 동일한 값을 사용하였다. IDESIGN을 구동하기 위한 목적함수의 설계민감도 정보는 3.1절에 제시된 공식을 이용하여 계산하였다.

보의 두께를 2 mm로 고정하고 제진재의 양과 주변온도를 변화시켜가면서 응답이 최소가 되는 제진층의 부착위치를 Fig. 5 나타내었다. Fig. 5는 보를 위에서 본 것을 그린 것이며, h 는 제진재의 양을 나타내는 값으로, 주어진 제진재가 보 전체의 50%에 피복되었을 때의 높이(mm)를 의미한다. 계산에 사용된 주파수 범위는 1~1000 Hz로 주파수 증분을 1 Hz로 하여 계산하였고 x_{ref} 와 x_{target} 은 각각 1과 120 dB였다. 그림을 살펴보면 최적의 제진층 피복길이는 제진층과 보의 두께 비와 제진층의 온도에 따라서 크게 달라지나 주어진 제진재의 양의 적을수록, 또한 온도가 높을수록 중앙부에 집중되는 현상을 보여준다. 그러나 이와 같은 최적의 제진 부위는 점탄성 물질의 특성과 가진 부위, 경계조건 등에 따라 바뀔 수 있음에 유의하여야 한다. Fig. 6에는 초기상태와 최적화 된 후의 응답을 몇몇 온도에서 비교하였다. 그림을 살펴보면 낮은 온도에서는 제진 부위의 최적화가 전체강성 또는 감쇠를 크게 증가시키지 못하나 높은 온도에서는 효율적으로 증가시킴을 볼 수 있다.

4. 결 론

비구속형 점탄성 제진층을 갖는 보에 대하여 진동 응답을 최소화하는 제진층의 부착위치를 결정하는 방법을 제시하였다. 제진층을 갖는 보는 유리미분모델을 사용하여 점탄성 물질의 주파수 및 온도에 따른 강성계수 및 손실계수를 표현하고 등가 강성 및 손실 계수를 갖는 보 요소로 모델링 하여 고유값 문제를 정의한 후 모드에너지 법에 의하여 각 모드의 손실계수를 계산하고 모드중첩법을 이용하여 진동응답을 계산하였다. 계산된 진동응답이 최소가 되도록 하는 점탄성 제진층의 부착위치를 설계변수로 하는 최적화 문제를 정의하고 해석적으로 유도된 설계민감도 공식을 이용하여 최적 해를 구하였다. 수치예제를 통하여 제시된 정식화과정을 확인하였으며 제안된 방

법은 매우 효과적으로 진동응답을 최소화할 수 있음을 보였다.

후 기

이 연구는 동의대학교 교내 연구 과제(2004-AA134)의 지원으로 수행되었음.

참 고 문 헌

- (1) Plunkett, R. and Lee, C. T., 1970, "Length Optimization for Constrained Viscoelastic Layer Damping," *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 48, No.1, pp.150~161.
- (2) Suweca, W. and Jezequel, L., 1992, "Optimal Structural Design with Damping Constraint Limitations," *Int. J. for Numer. Meth. In Engng.*, Vol. 35, pp. 21~35.
- (3) Hajela, P. and Lin, C. Y., 1991, "Optimal Design of Viscoelastically Damped Beam Structures," *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 44, No.11, pp. S96-S106.
- (4) 유영훈, 양보석, 1995, "점탄성 제진재를 이용한 비구속형 제진강판의 최적설계에 관한 연구", 한국소음진동공학회논문집, 제 5 권, 제 4 호, pp. 493~501.
- (5) Roy, P. K. and Ganesan, N., 1996, "Dynamic Studies on Beams with Unconstrained Layer Damping Treatment," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 195, No. 3, pp. 417~427.
- (6) Nakra, B. C., 1998, "Vibration Control in Machines and Structures Using Viscoelastic Damping," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 211, No. 3, pp. 449~465.
- (7) 이두호, 황우석, 2003, "비구속형 점탄성 제진층을 갖는 보의 제진층 길이 최적화," 한국소음진동공학회논문집, 제 13 권, 제 12 호, pp. 938~946.
- (8) Lee, D. H. and Hwang, W. S., 2004, "Layout Optimization of an Unconstrained Viscoelastic Layer on Beams Using Fractional Derivative Model," *AIAA Journal*, Vol. 42, No. 10, pp. 2167~2170.
- (9) Jones, D. I. G., 2001, *Handbook of Viscoelastic Vibration Damping*, John Wiley & Sons, New York.
- (10) Eldred, L. B., Baker, W. P. and Palazotto, A. N., 1995, "Kelvin-voigt vs Fractional Derivative Model as Constitutive Relations for Viscoelastic Material," *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 3, pp. 547~550.
- (11) Soares, L. E., Shokooch, A. and Arroyo, J., 1997, "Finite Element Analysis of Beams with Constrained Damping Treatment Modeled via Fractional Derivatives," *ASME Appl. Mech. Rev.*, Vol. 50, No. 11, pp. 216~224.
- (12) Sun, C. T. and Lu, Y. P., 1995, *Vibration Damping of Structural Elements*, Prentice Hall, Inc., London.
- (13) Blakely, K., 1995, *MSC/NASTRAN Basic Dynamic Analysis User's Guide*, The MacNeal-Schwendler Corp., Los Angeles.
- (14) Haug, E. J. Choi, K. K. and Komkov, V., 1986, *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press Inc., London.
- (15) Nelson, R. B., 1976, "Simplified Calculation of Eigenvector Derivatives," *AIAA Journal*, Vol. 14, No. 9, pp. 1201~1205.
- (16) Arora, J. S., 1989, *Introduction to Optimum Design*, McGraw-Hill Inc., New York.