LMI 기반 제어기 설계를 위한 간단한 지침서

최 한 호
동국대학교 전기공학과

1. 서론

LMI(Linear Matrix Inequality : 선형행렬부등식)은 J. Willems의 1971년 논문 [1]에서 지금 현재 통용되는 의미보다 협소한 의미로 특정한 형태의 LMI를 지칭하기 위해 쓰인 이후로 2005년 4월 28일 현재 LMI를 키워드로 제어자동화시스템공학회의 출판물 원문 서비스에서 검색한 결과 60편의 논문이 검색될 정도로 현재 제어공학자들에게 가장 친숙한 단어 중에 하나가 되었다. 역사적으로 LMI가 최초로 제어에 사용된 사례는 우리가 현재 리아푸노프 정리라고 부르는 것으로 1890년대 러시아의 A.M. Lyapunov가 선형 미분방정식의 해가 안정할 필요충분조건을 현재 우리가 리아푸노프 행렬식이라 부르는 특별한 형태의 LMI로 구한 것이다. 그 다음의 대표적인 사례는 1940년대 Lur'e 등의 소련 학자들이 리아푸노프 정리를 비선형 구 동기를 갖는 실제적인 시스템 제어 문제에 응용한 것이다. 1960년대에는 Yakubovich, Popov, Kalman, Anderson 등의 학자들이 현재 우리가 positive real lemma라고 부르는 것을 이용하여 일부 특정한 형태를 갖는 LMI의 해를 Popov, circle, Tsypkin criteria 등의 도해적인 방법으로 구했다. 1960년도 후반 특정한 형태의 LMI는 리카치 방정식과 같은 대수적인 방정식을 풀어 해를 구할 수 있음이 알려지게 되었다. 1980년대에 들어서 다양한 형태의 LMI를 풀 수 있는 효율적인 알고리즘이 개발된 이후 여러 연구자들에 의해 LMI를 사용한 방법이 다음과 같은 장점을 얻을 수 있음이 보여져 급속히 적용이 확산되어 현재에 이르고 있다. ① 매우 효율적으로 풀 수 있다. ② 불확실성을 포함한 문제에 강인하고 신뢰할 수 있는 해결책을 준다. ③ 다양한 성능지수를 설계에 포함할 수 있다. ④ 다양한 해석과 설계 문제를 일관된 형태로 해결할 수 있다 [2][3][4][11][13]. 본고에서는 LMI를 이용한 제어기 설계와 해석에 필수적이며 기본적인 개념과 이론 그리고 적용방법을 간단히 소개하도록 한다.

2. 기본 개념과 정리들

정의 1 : (Convex 집합과 함수) 주어진 집합 $S \in R^n$ 의 임의의 두 점을 잇는 선이 S 내에 있으면 convex 집합이라 한다. 즉 다음이 성립하면 convex 집합이다.

$$x, y \in S \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in S, \ \ \forall \lambda \in [0,1]$$

함수 $f: R^n \rightarrow R$ 의 임의의 점 $(x, f(x)), (y, f(y))$ 를 잇는 선이 함수 f 의 그래프 위에 있으면 convex 함수라 한다. 즉 다음이 모든 $\lambda \in [0,1]$ 와 $x, y \in R^n$ 에 대하여 성립하면 convex 함수이다.

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

정의 2 : (Convex 최적화) 다음과 같이 주어지는 최소화 문제에서 목적함수 $f_0(x)$ 와 구속조건함수 $f_i(x)$ 가 convex하면 convex 최적화문제라고 한다.

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & f_0(x) \\ \text{subject to} & f_i(x) \le 0 \end{array}$$

정의 3 : (Moore-Penrose 역행렬) 주어진 $A \in R^{n \times m}$ 에 대하여 다음 3 가지가 만족되면 $A^g \in R^{m \times n}$ 를 Moore-Penrose 역행렬이라 부른다:

① $AA^gA = A$,

② $A^gAA^g = A^g$,

③ AA^g, A^gA 둘 다 대칭이다.

정의 4 : (orthogonal complement) 주어진 $A \in R^{n \times m}$ 에 대하여 column을 A^T 의 null space의 basis vector로 갖는 행렬을 orthogonal complement라 한다.

정의 5 : (양한정 행렬) 주어진 대칭행렬 $S \in R^{n \times n}$ 가 모든 0이 아닌 벡터 $x \in R^n$ 에 대하여 $x^T S x > 0$ 이면 양한정(positive definite) 행렬이라 하고 $S > 0$ 로

표시한다. 또한 모든 0이 아닌 벡터 $x \in R^n$ 에 대하여 $x^T S x \geq 0$ 이면 부양한정(positive semidefinite) 행렬이라 하고 $S \geq 0$ 로 표시한다. $-S$ 가 위와 같은 성질을 띠면 각각 음한정(negative definite), 부음한정(negative semidefinite) 행렬이라 한다.

주 1 : 행렬 $A \in R^{n \times m}$ 에서 $\mathrm{rank}(A) = m < n$ 이고 A 의 orthogonal complement와More-Penrose역행렬을 각각 $\mathcal{A}, A^g$ 라 하면,

$$\mathrm{rank}(I - AA^g) = n - m$$
$$\mathcal{A}^T A = 0, A^g = (A^T A)^{-1} A^T, \mathrm{rank}(\mathcal{A}) = n - m$$

$(I - AA^g)A = 0$, $\mathcal{A}^T \mathcal{A} > 0$ 등이 항상 성립한다.

주 2 : 양한정 행렬들은 다음의 성질들을 만족시킨다.

① $A, B > 0 \Rightarrow A + B > 0$

② $A, B > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} > 0$

③ $A, B \geq 0, \lambda, \mu \geq 0 \Rightarrow \lambda A + \mu B \geq 0$

④ (부) 양한정 행렬의 고유치는 실수이며 0보다 항상 크다 (크거나 같다)

⑤ $A \geq 0 \Rightarrow B^T A B \geq 0$,

⑥ 양한정 행렬은 역행렬이 존재한다.

⑦ 부양한정행렬 A 의 고유치를 λ_i 라할때 $A = U^T \Lambda U, UU^T = I, \Lambda = Diag(\lambda_i)$ 를 만족시키는 행렬 U 가 존재한다.

정의 4 : (LMI) 주어진 대칭행렬 F_i 와 변수 x_i 에 대하여 다음의 형태를 갖는 행렬식을 LMI라 한다.

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i \quad > 0$$

만약 $F(x) \geq 0$ 형태의 경우 nonstrict LMI라고 하며 위와 같은 형태를 strict LMI라고 한다.

주 3 : 아래에 주어진 보조정리를 사용하여 nonstrict LMI에서 등식에 대한 구속조건을 제거하고 strict LMI로 고쳐 쓸 수 있다. 그리고 보통 LMI라고 하면 strict LMI를 지칭한다. 구속조건이 LMI형태로 주어지고 목적함수가 convex 함수인 최소화문제를 LMI 최적화문제라고 하는데 이는 convex 최적화문제이다. convex 최적화문제는 임의의 지역 최적 값이 광역 최적 값이 되고 구속조건을 만족시키는 모든 범위에서 최적 값을 찾을 필요가 없어 LMI Control Toolbox[5] 같은 매우 효율적이고 강인하며 신뢰할 수 있는 알고리즘이 존재하기 때문에 주어진 문제를 LMI 최적화문제 또는 convex 최적화 문제로 변환했다는 것은 문제의 해를 구했다고 간주할 수 있겠다.

정의 5 : (놈) 주어진 신호 $x(t) \in R^n$ 의 p 놈은 다음과 같이 정의된다.

$$\|x\|_p = \left[\int \sum_i |x_i(t)|^p dt \right]^{1/p}$$

그리고 $p = \infty$ 일때의 놈은 다음과 같이 정의된다.

$$\|x\|_\infty = \sup_t \max_i |x_i(t)|$$

정의 6 : (H_∞ 놈) 전달함수 $H(s)$ 의 H_∞ 놈은 시스템이 안정할 때 아래와 같이 정의된다.

$$\|H\|_\infty = \sup_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|Hu\|_2}{\|u\|_2} = \sup \sigma_{\max}[H(jw)]$$

정의 7 : (H_2 놈) 전달함수 $H(s)$ 의 H_2 놈은 시스템이 안정할 때 아래와 같이 정의된다.

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Tr}(H^T(-jw) H(jw))\, dw}$$

임펄스응답을 $H(t)$ 라 하면 아래와 같다.

$$\|H\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \mathrm{Tr}\,(H^T(t) H(t)) dt}$$

다음에 주어지는 보조정리들은 주어진 문제를 LMI 최적화문제로 변환할 때 아주 유용한 것들로 [2]나 [10] 등의 표준적인 결과가 주어진 문헌에 주어진 것들이다.

보조정리 1 : (Schur complement formula) 적절한 차원을 갖는 행렬 A, B, C 에 대해 다음이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad A > 0, \ C - B^T A^{-1} B > 0$$

보조정리 2 : (projection lemma) 적절한 차원을 갖는 행렬 A, B, C, K 에 대해 다음이 성립한다.

$$\Omega + \Gamma K \Lambda^T + \Lambda K^T \Gamma^T < 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}^T \Omega \mathcal{A} < 0, \ \mathcal{T}^T \Omega \mathcal{T} < 0$$

여기에서 $\mathcal{T}, \mathcal{A}$ 는 Γ, Λ 의 orthogonal complement

이다.(만약 $\mathcal{T}$ 나 $\mathcal{A}$ 가 0인 경우 해당 부등식은 자동적으로 성립하는 것으로 간주한다.)

보조정리 3 : (Finsler's lemma) 적절한 차원을 갖는 행렬 A, B 와 적당한 수 λ 에 대해 다음이 성립한다.

$$\mathcal{B}^T A \mathcal{B} < 0 \Leftrightarrow A < \lambda BB^T$$

보조정리 4 : (S-procedure) A_i 가 대칭이고 모든 를 $x^T A_i x \geq 0$ 만족시키는 x 에 대하여 $x^T A_0 x > 0$ 를 만족시키면 $A_0 - \sum_{j=1} \lambda_i A_i > 0, \ \lambda_i \geq 0$ 를 만족시키는 λ_i 가 존재한다.

보조정리 5 : 적절한 차원을 갖는 상수행렬 A, B, C 와 변수 X 에 관한 행렬식 $AXB = C$ 의해가 존재할 필요충분조건은 $AA^g CB^g B = C$ 이 성립하는 것이다. 그리고 일반해는 $X = A^g CB^g + Z - A^g AZBB^g$ 로 구해진다. 여기에서 Z 는 적절한 차원을 갖는 임의의 행렬이고 A^g, B^g 는 A, B 의 More-Penrose 역행렬이다.

보조정리 6 : 적절한 차원을 갖는 상수행렬 A, B 와 변수대칭행렬 X 에 관한 행렬식 $AXB^T = 0$ 의 일반해는 $X = \mathcal{A}^T V \mathcal{A} + \mathcal{B}^T W \mathcal{B}$ 로 구해진다. 여기에서 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 는 A, B 의 orthogonal complement이다.

보조정리 7 : (리아푸노프 정리) $\dot{x} = Ax$ 가 안정할 필요충분조건은 다음 리아푸노프 부등식을 만족시키는 리아푸노프 행렬 P 가 존재하는 것이다.

$$P > 0, \ \ PA + A^T P < 0$$

보조정리 8 : (bounded real lemma) 주어진 시스템 $H(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$ 의 H_∞ 놈이 1보다 작을 필요충분조건은 아래 LMI를 만족시키는 행렬 P 가 존재하는 것이다.

$$P > 0, \ \begin{bmatrix} PA + A^T P & PB & C^T \\ B^T P & -I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0$$

증명 : 정의 6 에 따라 $\dot{x} = Ax + Bu, z = Cx + Du$ 로 주어지는 시스템에서 $\int z^T z dt < \int u^T u dt$ 가 성립함을 보이면 된다. 리아푸노프 함수 $V(x) = x^T P x$ 로 하면 시스템이 안정하므로 다음이 성립한다.

$$\int [-\frac{d}{dt} V(x) + u^T u - z^T z] dt > 0$$

$w = [x^T, u^T]^T$ 를 사용해 결국 다음을 얻고

$$\int w^T \begin{bmatrix} PA + A^T P + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & -I + D^T D \end{bmatrix} w dt < 0$$

보조정리1을 통해 보조정리 8이 성립함을 알 수 있다.

보조정리 9 : (small gain theorem) $\dot{x} = Ax + Bu$, $z = Cx + Du, u = \Delta z, \|\Delta\| < 1$ 를 만족시키는 궤환시스템이 안정할 조건은 보조정리 8에 주어진 LMI를 만족시키는 행렬 P 가 존재하는 것이다.

증명 : $\dot{x} = Ax + Bu, u^T u < z^T z$ 로 고쳐 쓸 수 있고 리아푸노프 정리에 의해 다음 행렬부등식을 만족하는 모든 w 에 대하여

$$w^T \begin{bmatrix} C^T C & C^T D \\ D^T C & D^T D - I \end{bmatrix} w \leq 0$$

다음을 만족하는 P 가 존재하면 안정하다.

$$w^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} w < 0$$

이 조건은 보조정리 4에 의하여 다음을 만족하면 된다.

$$w^T \begin{bmatrix} PA + A^T P + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & -I + D^T D \end{bmatrix} w < 0$$

보조정리 10 : $H(s) = C(sI - A)^{-1} B$ 의 H_2 놈의 제곱이 ν 보다 작을 필요충분조건은 아래 LMI를 만족시키는 행렬 P 가 존재하는 것이다.

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P & C^T \\ C & -I \end{bmatrix} < 0, \ \mathrm{Tr}(B^T PB) < \nu$$

위의 LMI 조건은 다음으로 대체할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P & PB \\ B^T P & -I \end{bmatrix} < 0, \ \begin{bmatrix} P & C^T \\ C & Q \end{bmatrix} > 0, \ \mathrm{Tr}(Q) < \nu$$

증명 : 정의에 의해 H_2 놈은 다음과 같다.

그러므로 H_2 놈 구속조건은 $W=\int e^{A^T t}C^T C e^{At}$ 가 $\mathrm{Tr}(B^T WB) < \nu$를 만족시키면 만족된다. 그런데 W는 observability gramian으로 리아푸노프 방정식 $WA + A^T W + C^T C = 0$의 해이다. 그러므로 첫 번째 주어진 LMI조건이 필요충분조건임을 알 수 있다. 마찬가지로 H_2 놈은 다음과 같이 주어질 수 있음을 이용해 두 번째 주어진 LMI조건이 필요충분조건임을 알 수 있다.

$$\|H\|_2^2 = \mathrm{Tr}(C\int e^{At}BB^T e^{A^T t}dtC^T)$$

보조정리 11 : (positive real lemma) 주어진 시스템가 $H(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$ strictly positive real 즉 안정하고 $H(jw) + H^T(-jw) > 0, \forall w$ 이 성립할 필요충분조건은 아래를 만족시키는 행렬 P 가 존재하는 것이다.

$$P>0,\ \begin{bmatrix} PA + A^T P & PB - C^T \\ B^T P - C & -D^T - D \end{bmatrix} < 0$$

만약 $D=0$ 인 경우는 다음이 필요충분조건이다.

$$P>0,\ PA + A^T P < 0,\ B^T P = C$$

보조정리 12 : 적절한 차원을 갖는 행렬 A, B, C 에 대해 필요한 역행렬들이 존재하면 다음이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D^{-1} & -A^{-1}BE^{-1} \\ -C^{-1}B^T D^{-1} & E^{-1} \end{bmatrix}$$

여기에서 $D = A - BC^{-1}B^T, E = C - B^T A^{-1} B$ 이다.

보조정리 13 : $P \in R^{n \times n}$ 가 역행렬이 존재하는 대칭행렬이라고 하자. 그리고 P, P^{-1} 를 아래처럼 나누자.

$$P = \begin{bmatrix} X & X_1 \\ X_1^T & X_2 \end{bmatrix},\quad P^{-1} = \begin{bmatrix} Y & Y_1 \\ Y_1^T & Y_2 \end{bmatrix}$$

여기에 X, Y 는 $k \times k$ 대칭행렬이며 $k \le n$ 이고 X_1, X_2, Y_1, Y_2 는 적절한 차원의 행렬 값 들을 의미한다. $P>0$ 일 필요충분조건은 다음의 rank조건을 갖는 LMI의 해가 존재하는 것이다.

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \ge 0,\quad \mathrm{Rank}(I - XY) \le n - k$$

$$\|H\|_2^2 = \mathrm{Tr}(B^T \int e^{A^T t}C^T C e^{At}dtB)$$

보조정리 14 : $\dot{x} = Ax$ 가 안정할 필요충분조건은 다음 행렬 부등식을 만족시키는 (F, G, P) 가 존재하는 것이다.

$$\begin{bmatrix} AF^T + * & P - F + AG \\ * & -G - G^T \end{bmatrix} < 0,\ P>0$$

3. 제어기의 LMI 기반 설계 기초

3.1. Full order state feedback

아래와 같은 단순한 시스템과 제어입력을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t),\quad y = C_y x \tag{1}$$

$$u(t) = Kx(t) \tag{2}$$

여기에서 A, B_u, C_y 는 적절한 차원을 갖는 행렬이고, 는 각각 상태, 제어 입력, 출력이다. 보조정리7 즉 리아푸노프 정리에 의해 폐회로 시스템의 안정할 필요충분조건은 다음의 행렬식의 해가 존재하는 것이다.

$$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^p$$

$$Y>0,\quad Y(A + B_u K) + (A + B_u K)^T Y < 0 \tag{3}$$

$\dot{x} = (A + B_u K)x$ 위식은 LMI가 아니나 Y 를 안다면 K 에 대한 LMI가 되어 K 를 결정할 수 있다.의 변수 $Y = X^{-1}, W = KX$ 치환을 통해 우리는 (3)를 LMI로 변환할 수 있다.

$$X>0,\quad AX + B_u W + * < 0 \tag{4}$$

여기에서 $*$는 대칭에 의해 결정할 수 있는 행렬블록이다(위의 경우 $(AX + B_u W)^T$ 를 의미한다). 위식은 보조정리 3 에 의해 다음 LMI와도 동치이다.

$$X>0,\quad AX + XA^T - \lambda B_u B_u < 0 \tag{5}$$

그리고 보조정리 2에 의해 다음 LMI와도 동치이다.

$$X>0,\quad \mathcal{B}_u^T (AX + XA^T)\mathcal{B}_u < 0 \tag{6}$$

여기에서 $\mathcal{B}_u$ 는 B_u 의 orthogonal complement이다.

정리 1 : $\dot{x} = (A + B_u K)x$ 폐회로 시스템의 안정할 필요충분조건은 LMI (4)-(6)의 해가 존재하는 것이다.

주 4 : 식 (3)-(6)는 만약 (A, B_u) 가 안정가능하면 항상 해가 존재한다. 그리고 다음 Riccati 부등식을 만족시키는 해 $X = Y^{-1}$ 는 (3)-(6)도 항상 만족시킨다.

$$YA + A^T Y - \frac{1}{\varepsilon} Y B_u B_u^T Y < 0 \tag{7}$$

여기에서 ε 은 적절한 양수이다. 보조정리 2와 3을 이용하면 (7)을 (5)나 (6)로 쉽게 변환할 수 있다.

주 5 : 다음과 같은 과정을 통해 K 를 구할 수 있다. ① LMI식 (5)나 (6)를 풀어 $Y = X^{-1}$ 을 구하고 이 값을 가지고 (3)을 풀어 K 를 결정한다. ② LMI식 (5)나 (6)을 풀어 $Y = X^{-1}$ 을 구하고 $K = -\frac{1}{\varepsilon} B^T Y$ 로 한다. 여기에서 ε 은 매우 작은 값이다(주4 참조). ③ (4)를 풀어 (Y, W) 를 구하고 $K = WX^{-1}$ 를 통해 제어이득을 결정하면 된다. ④ 직접 Riccati 부등식 (7)을 풀어 $K = -\frac{1}{2\varepsilon} B^T Y$ 로 한다(주4 참조).

3.2. Reduced order output feedback

이번에는 시스템 (1)과 다음과 같은 k 차의 동적 제어기를 고려하자.

$$\begin{aligned} u &= K_{11} y + K_{12} v \\ \dot{v} &= K_{21} y + K_{22} v \end{aligned} \tag{8}$$

$K_{11} \in R^{m \times p}, K_{12} \in R^{m \times k}, K_{21} \in R^{k \times p}, K_{22} \in R^{k \times k}$ 는 설계변수들이다. (1)과 (8)의 augmented system은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\dot{x}_{cl} = A_{cl} x_{cl} \tag{9}$$

여기에서 $x_{cl} = [x^T, v^T]^T \in R^{n+k}$ 이고

$$\begin{aligned} A_{cl} &= A_0 + B_0 K C_0, \\ A_0 &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} B_u & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \\ C_0 &= \begin{bmatrix} C_y & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

폐회로 시스템 (9)가 안정할 필요충분조건은 다음의 행렬식의 해가 존재하는 것이다.

$$X > 0, \ (A_0 + B_0 K C_0) X + * < 0 \tag{11}$$

위식은 LMI가 아니나 X 를 안다면 K 에 대한 LMI가 되어 K 를 결정할 수 있다. 위식은 $k < n$ 인 경우 full state 궤환의 경우처럼 변수치환을 통해 LMI로 변환할 수 없다. 그런데 보조정리 2를 이용해 Φ_s, Θ_s 를 B_0, C_0^T 의 orthogonal complement라고 할 때 (11)은 다음과 동치임을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \Phi_s^T (A_0 X + X A_0^T) \Phi_s &< 0 \\ \Theta_s^T (Y A_0 + A_0^T Y) \Theta_s &< 0 \\ X = Y^{-1} &> 0 \end{aligned} \tag{12}$$

결국 보조정리 1, 12, 13을 써서 다음을 얻을 수 있다.

정리 2 : 폐회로 시스템 (9)가 안정할 필요충분조건은 다음 rank 구속조건을 갖는 LMI의 해가 존재하는 것이다.

$$\begin{aligned} \Phi_s^T (A_0 X + X A_0^T) \Phi_s &< 0 \\ \Theta_s^T (Y A_0 + A_0^T Y) \Theta_s &< 0 \\ \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} &\geq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\mathrm{rank}(I - XY) = 0 \tag{14}$$

주 6 : (13), (14)은 A_0, B_0, C_0 의 구조적인 특성과 보조정리 12와 13을 이용해 다음처럼 고쳐 쓸 수도 있다.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_u^T (AX + XA^T) \mathcal{B}_u &< 0 \\ \mathcal{C}_y^{T\,T} (YA + A^T Y) \mathcal{C}_y^T &< 0 \\ \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} &\geq 0 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\mathrm{rank}(I - XY) = k \tag{16}$$

여기에서 $\mathcal{C}_y^T$ 는 C_y^T 의 orthogonal complement이다. (13)의 X, Y 는 차원이 $(n+k) \times (n+k)$ 인데 반해 (15)의 X, Y 는 차원이 $n \times n$ 임에 유의하라.

$k = n$ 의 full order feedback의 경우 (14), (16)의 rank 구속조건이 없어지고 간결한 LMI 형태로 변환됨에 유의하라.

(13), (14)과 같은 rank 구속조건을 갖는 LMI를 풀기 위한 알고리즘들이 많이 소개되어 있다. 그 중 [6]의 방법을 참조한 알고리즘을 다음과 같이 유도할 수 있다. 다음의 최적화 문제 Σ 가 최적값 $n+k$ 를 가지면 (13), (14)의 해가 존재함을 알 수 있다[5].

$$\Sigma: \begin{array}{ll} \text{minimize} & \mathrm{Tr}(XY) \\ \text{subject to} & (13) \end{array} \tag{17}$$

위의 최소화 문제 Σ 의 구속조건 (13)는 LMI이고 목적함수 $\mathrm{Tr}(XY)$ 는 임의의 주어진 feasible 값 (X_0, Y_0) 에서 다음과 같이 선형화할 수 있다[5].

$$\mathrm{Tr}(XY) \approx \text{constant} + \mathrm{Tr}(Y_0X + X_0Y)$$

결국 선형화 방법으로 위의 최소화 문제 Σ 에 대하여 근사 해를 구하는 방식으로 (13), (14)의 해를 구하고 이득행렬 K 를 구할 수 있다.

출력궤환 제어기 설계 알고리즘:

Step 1 : $i=0$,(13)의 해 (X_0, Y_0) 을 구한다. 만약 해가 존재하지 않으면 제안된 방법으로 구할수 없으므로 빠져나온다.

Step 2 : $i=i+1$ 로하고, 최적화 문제 Σ_i 의 (X_i, Y_i) 를 구 한다

$$\Sigma_i: \begin{array}{ll} \text{minimize} & N_i = \mathrm{Tr}(Y_{i-1}X + X_{i-1}Y) \\ \text{subject to} & (13) \end{array}$$

Step 3 : 만약 최적 값 $N_i^\star$ 가 $N_i^\star \approx 2(n+k)$ 이면 $X=X_i$ 로 놓고 Step 4로 가라. 아니면서 i 가 미리 설정한 반복수 이하이면 step2로 가라. 위 두 경우가 아니면 빠져 나온다.

Step 4 : Step 3에서 구해진 $X=X_i$ 를 (11)식에 대입하면 (11)식은 이 K 등에 대하여 LMI이므로 이를 풀어 K 를 구한다.

주 7 : (13)의 해가 존재한다고 가정하자. $i>1$ 일 때 (X_i, Y_i) 은 최적화 문제 Σ_i 의 해 이므로 다음이 성립함을 보일 수 있다.

$$N_{i-1}^\star \geq \mathrm{Tr}(Y_{i-1}X_i + X_{i-1}Y_i) = N_i^\star, \quad \forall i>1$$

그리고 수열 $N_i^\star$ 가 $N_i^\star \geq 2(n+k)$ 로 크기가 아래로 제한되어 있고 수렴함을 알 수 있다. 위 알고리즘의 매 Step 2 그리고 Step 5는 풀기 쉬운 LMI 문제들이므로 [5]의 LMI Control Toolbox와 같은 LMI 최적화 알고리즘을 사용하여 아주 쉽고 효율적으로 해를 구할 수 있다. X 가 구해졌을 때 이득 K 를 스텝 5에서처럼 LMI 최적화에 의해 풀지 않고 공식 [4]에 주어진 공식을 사용해 구할 수도 있다.

4. 설계 사양의 LMI 표현

앞장에서는 시스템의 안정도를 보장하는 제어기의 설계만을 다루었다. 이번 장에서는 일반적인 시스템에 대하여 LMI로 표현가능한 성능지수를 보장하는 제어기의 설계를 다루겠다. 다음의 일반적인 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yw} w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zw} w(t) + D_{zu} u(t) \end{aligned} \tag{18}$$

여기에서 $A, B, B_1, C, D, C_1, D_{11}, D_{12}$ 는 적절한 차원을 갖는 행렬이고, $x(t) \in R^n$은 상태, $u(t) \in R^m$은 제어 입력, $y(t) \in R^p$는 측정 출력, $z(t) \in R^q$ 는 제어 출력, $w(t) \in R^r$ 는 외란 입력이다. $D_{yu}=0$ 로 가정했는데 이는 (8)과 같은 동적 제어기를 사용했을 때 행렬 $(I+K_{11}D_{yu})^{-1}$ 가존재한다는 가정 (well-posedness 가정)하에서 $y-D_{yu}u$ 는 y 로 대체 가능해 일반성의 훼손이 없음에 유의해야 한다. (8)과 같은 k 차의 동적 제어기를 고려하자. (17)과 (8)의 augmented system은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cl} &= A_{cl}x_{cl} + B_{cl}w \\ z &= C_{cl}x_{cl} + D_{cl}w \end{aligned} \tag{19}$$

여기에서 $x_{cl} = [x^T, v^T]^T \in R^{n+k}$ 이고

$$\begin{aligned} A_{cl} &= A_0 + B_0KC_0, B_{cl} = B_0KD_0 + B_r, \\ C_{cl} &= C_r + D_rKC_0, D_{cl} = D_{zw} + D_rKD_0, \\ D_0 &= \begin{bmatrix} D_{yw} \\ 0 \end{bmatrix}, B_r = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_r &= [C_z \ 0], D_r = [D_{zu} \ 0] \end{aligned}$$

4.1. H_∞ 성능지수

H_∞ 성능지수는 bandwidth나 저주파이득 등과 같은 주파수 영역의 사양을 표현하고 모델 불확실성에 대한 강인성을 설계시 고려하기 편리하다. 시스템 (18)의 전달함수 $T_{zw}(s) = C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1}B_{cl} + D_{cl}$ 의 H_∞ 놈은 $\|T_{zw}\|_\infty$ 로 표기되고 정의6에 따라 다음과 같다.

$$\|T_{zw}\| = \sup_{\|w\|_2 \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} = \sup \ \sigma_{\max}[T_{zw}(jw)]$$

이는 유한한 rms 외란입력신호나 유한한 에너지의 외란 입력신호에 대한 제어출력사이의 이득 중 최악의 값을 의미해서 임의의 주파수에 크기 1을 갖는 정현파 외란 입력이 가해졌을 때 제어출력 정상상태응답의 최대 크기값으로 간주할 수 있다. 또한 보조정리 9를 참조해 구속조건 $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ 는 $w = \Delta(t)z, \|\Delta(t)\| \leq 1/\gamma$ 를 만족시키는 임의의 외란입력에 대해서 폐회로 시스템이 안정을 유지하는 외란제거성능 구속조건으로 간주할 수 있음을 알 수 있다. 결국 γ 를 최소화시키면 외란에 대하여 최대로 강인하고 임의의 주파수를 갖는 외란입력에 의해 제어출력에 미치는 영향을 최소화시키는 제어기를 구할 수 있겠다. 보조정리 8을 이용하면 다음의 조건을 얻을 수 있다.

$$X > 0, \quad \begin{bmatrix} A_{cl}X + XA_{cl}^T & * & * \\ B_{cl}^T & -\gamma I & * \\ C_{cl}X & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

위의 부등식은 다음과 같이 K, X 에 관한 식으로 정리될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_0X + * & * & * \\ B_r^T & -\gamma I & * \\ C_rX & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \\ D_r \end{bmatrix} K[C_0X, D_0, 0] + * < 0 \quad (20)$$

결국 다음을 얻을 수 있다.

정리 3 : $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ 를 보장할 필요충분조건은 다음 LMI (21)와 rank 구속조건 (14)을 만족시키는 해가 존재하는 것이다.

$$\begin{aligned} &\Phi_\infty^T \begin{bmatrix} A_0X + * & * & * \\ B_r^T & -\gamma I & * \\ C_rX & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \Phi_\infty < 0 \\ &\Theta_\infty^T \begin{bmatrix} YA_0 + * & * & * \\ B_r^TY & -\gamma I & * \\ C_r & D_{zw} & -\gamma I \end{bmatrix} \Theta_\infty < 0 \\ &\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

여기에서 $\Phi_\infty, \Theta_\infty$ 는 $[B_0^T, 0, D_r^T]^T, [C_0, D_0, 0]^T$ 의 orthogonal complement를 의미한다.

4.2. H_2 성능지수(LQ 성능지수)

$D_{yw} = D_{zw} = 0$ 라면 $T_{zw}(s) = C_r(sI - A_{cl})^{-1}B_r$ 로 주어진다. H_2 놈은 외란입력이 백색잡음일 때 제어출력의 rms값을 의미한다. 그리고 구속조건 $\|T_{zw}\|_2^2 < \nu$ 은 e_i 를 i 번째 값만 1이고 나머지는 0인 벡터라고 하고 입력을 $w = e_i\delta(t)$ 로 했을 때 출력 $z(t)$ 가 다음의 LQ 성능을 만족시킨다는 것을 의미한다.

$$\sum_{i=1} \int_0^\infty \delta(t)e_i^T * T_{zw}^T(t)\, T_{zw}(t) * e_i\delta(t)dt < \nu$$

보조정리 10을 이용하면 다음의 조건을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X + A_{cl}^TX & * \\ C_{cl}X & -I \end{bmatrix} < 0, \ \begin{bmatrix} XB_{cl} \\ * \ Q \end{bmatrix} > 0, \ \mathrm{Tr}(B_{cl}^TQB_{cl}) < \nu$$

위의 부등식 중 왼쪽 부등식은 다음과 같이 K, X 에 관한 식으로 정리될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_0X + * & * \\ C_rX & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ D_r \end{bmatrix} K[C_0X, \ 0] + * < 0 \quad (22)$$

결국 다음을 얻을 수 있다.

정리 4 : Φ_2, Θ_2 는 $[B_0^T, D_r^T]^T, [C_0, 0]^T$ 의orthogonal-complement라고 하고 $D_{yw} = D_{zw} = 0$ 라고 하자. $\|T_{zw}\|_2^2 < \nu$ 를 보장할 필요충분조건은 다음 LMI (23)과 rank 구속조건 (14)을 만족시키는 해가 존재하는 것이다.

$$\begin{aligned} &\Phi_2^T \begin{bmatrix} A_0X + * & * \\ C_rX & -I \end{bmatrix} \Phi_2 < 0 \\ &\Theta_2^T \begin{bmatrix} YA_0 + * & * \\ C_r & -I \end{bmatrix} \Theta_2 < 0 \\ &\begin{bmatrix} XB_r \\ * \ Q \end{bmatrix} > 0, \ \mathrm{Tr}(B_r^TQB_r) < \nu, \\ &\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (23)$$

4.3. L_∞ 성능지수

$D_{zu}=D_{zw}=0$ 인 상황에서 $\int_0^\infty w^T w dt \le 1$ 을 만족시키는 임의의 입력신호 w 에 대하여 출력 z 의 최고값을 μ 이하로 제한, 즉 $\|z\|_\infty < \mu$ 할 수 있다. 그러면 또한 백색잡음 입력에 대해 출력의 covariance 를 제한할 수 있다. 표준적인 결과에 의해 다음 식을 만족시키는 행렬이 존재하면 이러한 L_∞ 성능 조건을 만족시킴을 보일 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X+XA_{cl}^T & * \\ B_{cl}^T & -I \end{bmatrix} < 0, \quad C_{cl}XC_{cl}^T < \mu I$$

위의 부등식 중 왼쪽 부등식은 다음과 같이 K, X 에 관한 식으로 정리될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_0X+* & * \\ B_r^T & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \end{bmatrix} K [C_0X, \ \ D_0] + * < 0 \quad (24)$$

결국 다음을 얻을 수 있다.

정리 5 : Φ_L, Θ_L 는 $[B_0^T, 0]^T, [C_0, D_0]^T$ 의 orthogonal complement라고하고 $D_{zu}=D_{zw}=0$ 라고하자 $\int_0^\infty w^T w dt \le 1$ 을 만족시키는 임의의 입력신호 w 에 대하여 $\|z\|_\infty < \mu$ 를 보장할 필요충분조건은 다음 LMI (25)과 rank 구속조건 (14)을 만족시키는 해가 존재하는 것이다.

$$\begin{aligned} &\Phi_L^T \begin{bmatrix} A_0X+* & * \\ B_r^T & -I \end{bmatrix} \Phi_L < 0 \\ &\Theta_L^T \begin{bmatrix} YA_0+* & * \\ B_r^T Y & -I \end{bmatrix} \Theta_L < 0 \\ &C_rXC_r^T < \mu I, \ \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \ge 0 \end{aligned} \quad (25)$$

4.4. 극배치 조건

극배치 구속조건은 감쇠율과 적절한 동특성을 부과하는데 유용하게 쓰일 수 있다. 다음의 복소수 평면상의 영역을 고려해보자.

$$\mho = \{ s \in C : a + bs + bs^* + c^2 s^* s < 0 \}$$

표준적인 선택으로 $\mho$ 는 복소평면 상의 수직반평면으로 $\mathrm{Re}(s) < -\alpha < 0 (a=2\alpha, b=1, c=0)$ 이나 반지름 r 에 중심 $(-q, 0)$ 의원 $(a=q^2-r^2, b=q, c=1)$ 등을 들 수 있다. 적절한 a, b, c 값으로 임의의 반평면이나 원을 선정할 수 있다. 최근 결과를 이용하면 우리는 다음을 얻을 수 있다. 표준적인 결과에 의해 다음 식을 만족시키는 행렬이 존재하면 우리는 A_{cl} 의 극점이 $\mho$에 위치함을 보일 수 있다.

$$\begin{bmatrix} aX+bA_{cl}X+bXA_{cl}^T & * \\ cA_{cl}X & -I \end{bmatrix} < 0$$

위의 부등식은 다음과 같이 K, X 에 관한 식으로 정리될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} aX+bA_0X+bXA_0^T & * \\ cA_0 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bB_0 \\ cB_0 \end{bmatrix} K [C_0X, \ \ 0] + * < 0 \quad (26)$$

결국 다음을 얻을 수 있다.

정리 6: Φ_p, Θ_p 는 $[bB_0^T, cB_0^T]^T, [C_0, 0]^T$ 의orthogonal complement라고 하자. A_{cl} 의 극점이 $\mho$ 에 위치할 필요충분조건은 다음 LMI (27)과 rank 구속조건 (14)을 만족시키는 해가 존재하는 것이다.

$$\begin{aligned} &\Phi_p^T \begin{bmatrix} aX+bA_0X+bXA_0^T & * \\ cA_0X & -I \end{bmatrix} \Phi_p < 0 \\ &\Theta_p^T \begin{bmatrix} aY+bYA_0+bA_0^TY & * \\ cA_0 & -I \end{bmatrix} \Theta_p < 0 \\ &\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \ge 0 \end{aligned} \quad (27)$$

4.5. Positive real

T_{zw} 가 strictly positive real(SPR) 이면 시스템이 안정하고 $T_{zw}(jw) + T_{zw}^T(-jw) > 0, \forall w$ 이 성립한다. $(I-T_{zw})(I+T_{zw})^{-1}$ 가 SPR이면 $\|T_{zw}\|_\infty < 1$ 이 성립한다. $\int z^T w dt > 0$가 성립하며 $q=r=1$인 경우 즉 SISO인 경우 전달함수의 나이키스트선도 는 복소평면상의 우반면에 위치한다. 그리고 SPR 시스템은 불확실성을 갖거나 비선형적이지만 SPR 특성을 갖는 출력궤환 제어기를 통해 안정화 시킬 수 있다.

T_{zw} 가 SPR이 될 필요충분조건은 보조정리 11에 따라 아래를 만족시키는 행렬 X 가 존재하는 것이다.

$$X>0,\ \begin{bmatrix} A_{cl}X+XA_{cl}^T & * \\ B_{cl}^T-C_{cx}X & -D_{cl}-D_{cl}^T \end{bmatrix}<0$$

위의 부등식은 다음과 같이 K, X 에 관한 식으로 정리될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} A_0X+* & * \\ B_r^T-C_rX & -D_{zw}-D_{zw}^T \end{bmatrix}+ \begin{bmatrix} B_0 \\ -D_r \end{bmatrix}K[C_0X,\ \ D_0]+*\ <\ 0 \tag{28}$$

결국 다음을 얻을 수 있다.

정리 7: Φ_R, Θ_R 는 $[B_0^T, D_r^T]^T, [C_0, D_0]^T$ 의 orthogonal complement라고 하자. T_{zw} 가 strictly positive real 할 필요충분조건은 다음 LMI (29)와 rank 구속조건 (14)을 만족시키는 해가 존재하는 것이다.

$$\begin{gathered} \Phi_R^T\begin{bmatrix} A_0X+* & * \\ B_r^T-C_rX & -D_{zw}-D_{zw}^T \end{bmatrix}\Phi_R\ <\ 0 \\ \Theta_R^T\begin{bmatrix} YA_0+* & * \\ B_r^TY-C_r & -D_{zw}-D_{zw}^T \end{bmatrix}\Theta_R\ <\ 0 \\ \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}\geq 0 \end{gathered} \tag{29}$$

주 8 : 만약 위에서 고려한 극배치조건, LQ/H_2 성능조건, L_∞ 성능조건, H_∞ 성능조건 중 하나를reduced order output feedback 설계에 고려해 넣으려면 앞장에 주어진 출력궤환 제어기 설계 알고리즘에서 최적화 문제 Σ_i 의 구속조건 (13)을 고려해 넣을 성능조건에 해당되는 LMI식으로 바꾸면 된다. 예를 들어 폐회로 시스템 응답이 H_∞ 성능 구속조건 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$ 를 만족시키는 제어기를 구하려 한다면 최적화 문제 Σ_i 의 LMI 구속조건 (13)을 (21)로 대체하면 된다. 즉 Σ_i 를 다음으로 대체시켜 (X, Y) 를 찾는다.

$$\Sigma_i:\ \text{minimize}\quad N_i=\mathrm{Tr}(Y_{i-1}X+X_{i-1}Y) \\ \text{subject to}\quad (21)$$

그리고 이렇게 구해진 X 를 (20)에 대입하면 K 에 대한 LMI가 되므로 이를 풀어 K 를 구하면 된다. 만약 위에서 고려한 극배치조건, LQ/H_2 성능조건 L_∞ 성능조건, H_∞성능조건, positive real 조건 등을 reduced order output feedback 설계에 한꺼번에 여러 개 고려해 넣으려면 앞장에 주어진 **출력궤환 제어기 설계 알고리즘**에서 최적화 문제 Σ_i 의 구속조건 (13)에 고려해 넣을 성능조건에 해당되는 LMI식을 부가하거나 대체하기만 하면 된다. 예를 들어 폐회로 시스템 응답이 H_∞성능 구속조건 $\|T_{zw}(s)\|_\infty<\gamma$ 와 A_{cl} 의 극점이 $\mho$에 위치하는 것을 보장하는 제어기 이z득을 구하려 한다면 최적화 문제 Σ_i 의 LMI 구속조건 (13)을 (21), (27)로 대체하면 된다. 즉 Σ_i 를 다음으로 대체시켜 각 성능조건을 위한 조건식의 해들이 같은 값을 갖는다고 간주하고 공통의 해 X 를 찾는다.

$$\Sigma_i:\ \text{minimize}\quad N_i=\mathrm{Tr}(Y_{i-1}X+X_{i-1}Y) \\ \text{subject to}\quad (21),(27)$$

그리고 이렇게 구해진 X 를 (20)과 (26)을 대입하여 이들을 동시에 만족시키는 K 를 구하면 된다. 그러나 이 경우 (20)과 (26)의 행렬식은 (21)과 (27)의 행렬식과 동치가 아니고 필요조건일 뿐이므로 (21)과 (27)을 만족시키는 X 에 대하여 (20)과 (26)을 만족시키는 K 가 항상 존재하지 않으므로 제어기 설계에 실패할 가능성이 있음에 유의해야 한다.

주 9 : A_0, B_0, C_0 의 구조적인 특성과 보조정리 12를 이용해 주 6에 보인 것처럼 X, Y 차원이 $(n+k)\times(n+k)$ 로 주어지는 (21), (23), (25), (27), (29)의 LMI를 차원이 $n\times n$ 로 주어지는 X, Y 를 사용한 LMI형태로 고쳐 쓸 수 있음에 유의하라. $k=n$ 의 full order feedback의 경우 (14), (16)의 rank 구속조건이 없어지고 간결한 LMI 형태로 변환될 수 있다.

5. Matlab을 이용한 설계 예

본장에서는 Matlab의 LMI 변수를 정의하는 명령 lmivar, LMI 식을 표현하는 명령 lmiterm, setlmis, 내부적인 LMI 표현에 쓰이는 명령 getlmis, LMI 식의 해만 단순히 구하도록 하는 명령 feasp, LMI 최적화 해를 구하는 mincx 명령 등의 사용법과 이들을 사용하여 제어시스템을 설계하는 예를 보인다.

LMI를 풀 때 유용한 Matlab 명령 요약 설명[5]:

① setlmis([]), getlmis : LMI Lab을 사용하여 LMI를 표현할 때 반드시 setlmis([])로 시작해서 lmi_name = getlmis 형태로 끝내야 한다(프로그램 예 참조).

② lmivar : setlmis([]) 로 초기화한 후에는 lmivar 명령을 사용하여 LMI 변수를 선언하고 형태를 정의해야 하는데 일반적인 형태는 lmivar(type,dim)의 형태이다. type에는 1,2,3이 있는데 1형은 대칭의 블록다이아고널 형태이고 2형은 임의의 4각행렬을 의미하고 3형은 보다 복잡한 형태를 정의하는데 사용한다. 1형의 경우 dim은 2개의 열과 다이아고널블록의 개수만큼의 행으로 구성되는 행렬로 첫 번째 열은 다이아고널블록의 차원을 써주고 두 번째 열에는 1(일반적대칭블록), 0(scalar 블록), -1(zero 블록)을 사용할 수 있다. 만약 X=lmivar (1,[2 0;2 1;1 0])로 주어졌다면 이는 X가 3개의 블록으로 이루어졌고 첫 번째 블록은 2x2의 scalar 블록이고 두 번째 블록은 2x2의 일반적 대칭블록임이고 세 번째 블록은 1x1의 scalar 블록임을 의미한다. 만약 K=lmivar (2,[3 2])로 주어 졌다면 K는 3x2의 일반적 행렬임을 의미한다. 즉 X, K가 다음과 같은 형태임을 의미한다.

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 \end{bmatrix}, \quad K=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \\ k_{31} & k_{23} \end{bmatrix}$$

③ lmiterm : lmivar로 변수를 선언한 후 LMI 식을 표현할 때 사용한다. LMI식에 사용되는 term은 상수형, 변수형, outer factor 형 3가지 유형으로 분류할 수 있다. 첫 번째 유형인 상수형은 AXB-C < 0(여기에서 C는 상수의 대칭행렬, A와 B는 적절한 상수 행렬 X는 변수라고 가정)에서 C와 같은 상수형태의 term이고 두 번째 유형인 변수형은 일반적으로 AXB와 같이 좌, 우에 계수가 곱해진 형태를 취한다. 세 번째 유형인 outer factor는 (21)식의 $\Phi_\infty, \Theta_\infty$ (23)식의 Φ_2, Θ_2 과 같은 term을 지칭한다. lmiterm([x y1 y2 w],A,B,flag)의 형식으로 LMI식에 사용된 term을 표현하는데 x는 몇 번째 LMI식인가를 의미하고(x는 양수나 음수가 될 수 있는데 해당 term이 < 부호의 왼쪽에 있을 때는 양수이고 오른쪽에 있을 때는 음수이다). y1, y2는 LMI식의 몇 번째 entry인가를 의미하고 w는 사용된 변수명이고(만약 상수형태일 때 w=0이고 만약 outer factor일 때 y1=y2=w=0), A,B는 변수형 term의 좌우에 곱해진 상수계수를 표현할 때 사용하고(상수형 또는 outer factor 형 term을 표현할 때 A,B, flag는 사용하지 않고 대신 해당값을 써준다). LMI식은 대칭이므로 (y1, y2) entry에 나타나는 term은 (y2, y1)에도 대칭된 형태로 나타나는데 중복해서 표현할 필요는 없이 그 term에 대해 y1, y2에 대해 표현하거나 y2, y1에 대해 한 차례만 표현하면 된다. flag는 사용된 term이 대칭으로 나타날 때 's'를 써준다(대칭이 아닌 경우 flag는 생략한다). 다음 소절의 프로그램 예는 (21)식을 setlmis([]), getlmis, lmivar, lmiterm으로 표현했는데 이를 참조하면 이해가 쉬울 것이다.

④ feasp : LMI 식을 만족시키는 해를 구하는 함수로 setlmis([])로 시작해서 lmivar, lmiterm으로 LMI식을 표현하고 lmi_name = getlmis 형태로 끝내 lmi_name라는 LMI식을 정의한 후 [tmin, xsol] = feasp(lmi_name) 명령을 치면 해가 존재할 경우 xsol에 벡터형태의 해를 tmin은 음수를 되돌려진다.

⑤ mincx : LMI 최소화문제의 해를 구하는 함수로 LMI식을 정의하고 decnbr, defcx등을 통해 정의된 목적함수를 최소화하는 해를 구한다. [copt, xsol] = mincx(lmi_name, co, options)의 형태를 취한다. options는 5개의 entry를 갖는 벡터형태로 options=[1e-8,0,0,0,0]로 미리 정의해서 주면 적당하다. co는 결정할 변수의 길이와 같은 크기를 갖는 벡터로 decnbr 함수를 이용하여 nvar=decnbr(lmi_name);co=zeros(nvar,1) 로 설정해 주면된다. 되돌려지는 값 copt는 목적함수의 최적값이고 xsol은 최적일 때 변수의 벡터형태 표현값이다.

⑥ defcx : mincx를 통해 LMI 최소화문제의 해를 구할 때 목적함수를 정의하는 함수이다. lmi_name라는 이름의 LMI식에 변수 X,Y,Z가 정의된 경우 결정할 변수의 길이값과 같은 길이를 갖는 벡터 cost를 decnbr 함수를 이용하여 설정하고 다음처럼 목적함수를 정의한다.

```
nvar=decnbr(lmi_name); cost=zeros(nvar,1)
for j=1:n
[Xj,Yj,Zj] = defcx(lmi_name,j,X,Y,Z);
cost(j) = objective_function(Xj,Yj,Zj);
end
```

다음 소절의 프로그램 예를 참조하면 defcx를 통해 목적함수를 정의하는 법을 쉽게 이해할 수 있을 것이다.

⑦ dec2mat : feasp나 defcx 등 LMI를 푸는 루틴은

해를 벡터형태로 되돌리는 데 이를 행렬값으로 복원시킬 때 사용한다. valX = dec2mat(lmi_name, xsol, X)의 형태로 lmi_name라는 이름의 LMI식을 feasp나 defcx로 풀어 벡터형태의 xsol 해를 얻은 후 이로 부터 LMI식의 행렬변수 X를 행렬형태로 복원시킨다.

H_∞ 제어기 설계와 F4E 팬텀기 응용 예 : 다음은 시스템 (18)과 같이 주어지는 시스템을 위한 H_∞ 출력궤환 제어기 설계를 위한 matlab프로그램 예이다. (21)과 구속조건(14)로 이루어진 rank구속조건을 갖는 LMI를 풀기위해 (30)을 반복적으로 푼다. 초기값 X_0, Y_0 는 matlab의 Riccati 방정식을 풀기위한 명령어 care를 사용한다. 변수 X, Y 를 lmivar로 정의하고 (21)을 lmiterm명령으로 표현하고 defcx 명령을 통해 매 스텝마다 최적값 X_i, Y_i 을 구하고 $\mathrm{Tr}(I-X_iY_i)<e^{-8}$ 이거나 $i=100$ 이 되면 (30)을 푸는 것을 종료하고 이 때 구해진 $X=X_i$ 를 (20)에 대입하여 구해진 LMI를 feasp명령을 통해 제어이득 K 를 구한다.

```
% 입력 : A, Bu, Bw, Cy, Dyw, Cz, Dzw, Dzu,
% kk(제어기 차수), gamma(H놈 bound)
% 출력 : 이득 K11, K12, K21, K22
[nn,mm]=size(Bu); [pp,rr]=size(Dyw);
[qq,rr]=size(Dzw);
rn=nn+kk; rp=pp+kk; rm=mm+kk;
A0=[A zeros(nn,kk);zeros(kk,nn) zeros(kk,kk)];
B0=[Bu zeros(nn,kk);zeros(kk,mm) eye(kk)];
C0=[Cy zeros(pp,kk);zeros(kk,nn), eye(kk)];
D0=[Dyw;zeros(kk,rr)]; Br=[Bw;zeros(kk,rr)];
Cr=[Cz zeros(qq,kk)];Dr=[Dzu zeros(qq,kk)];
RR=[C0,D0, zeros(rp,qq)];
LL=[B0', zeros(rm,qq),Dr'];
Ph = null(RR); Th = null(LL);
% initial value (X0, Y0)의 결정
Q=rand(rn); Qr=Q*Q';
Y0=care(A0,B0,Qr); X0=care(A0',C0',Qr); i=0;
setlmis([]);
% 대칭 행렬 변수 X, Y 정의
X=lmivar(1,[rn 1]); Y=lmivar(1,[rn 1]);
% LMI 식 (21)의 표현
lmiterm([1 0 0 0],Th);  %outer factor
lmiterm([1 1 1 X],A0,1,'s');  % 변수형 대칭
lmiterm([1 1 2 0],Br); lmiterm([1 1 3 X],1,Cr');
lmiterm([1 2 2 0],-gamma); lmiterm([1 2 3 0],Dzw');
lmiterm([1 3 3 0],-gamma); %상수형
lmiterm([2 0 0 0],Ph); %outer factor
lmiterm([2 1 1 Y],1,A0,'s');  % 변수형 대칭
lmiterm([2 1 2 Y],1,Br);  % 변수형
lmiterm([2 1 3 0],Cr'); lmiterm([2 2 2 0],-gamma);
lmiterm([2 2 3 0],Dzw'); lmiterm([2 3 3 0],-gamma);
lmiterm([-3 1 1 X],1,1); lmiterm([-3 1 2 0],1);
lmiterm([-3  2 2 Y],1,1);
choilmi = getlmis;
% 목적함수  trace(X0Y + Y0X)의 정의
n=decnbr(choilmi); co=zeros(n,1);
while (abs(trace(eye(rn)-X0*Y0)) >1.0e-8)&(i~=100),
        for  j=1:n
        [Yj,Xj] = defcx(choilmi,j,Y,X);
        co(j) = trace(X0*Yj+Y0*Xj) ;
        end
options = [1e-8,0,0,0,0];
[copt,xopt]=mincx(choilmi,co,options);
% 벡터형 해 xopt에서 행렬형태로 해값 X0, Y0 복원
Y0=dec2mat(choilmi,xopt,Y);
X0=dec2mat(choilmi,xopt,X);
  end
% 이득 K의 결정
if (abs(trace(eye(rn)-X0*Y0)) <1.0e-8)
W=[ A0*X0+X0*A0', Br, X0*Cr';
        Br',-gamma*eye(qq), Dzw';
        Cr*X0, Dzw, -gamma*eye(qq)]
RR=[C0*X0,D0, zeros(rp,qq)];
setlmis([]);
K=lmivar(2,[rm rp]); % 사각행렬  K의 변수 선언
lmiterm([1 1 1 0],W);  %상수형
lmiterm([1 1 1 K],LL',RR,'s');  %변수형 대칭
choilmi = getlmis; [tmin,xfeas]=feasp(choilmi);
K0 = dec2mat(choilmi,xfeas,K);
K11=K0(1:mm,1:pp);K22=K0(mm+1:rm,pp+1:rp);
K12=K0(1:mm,pp+1:rp);K21=K0(mm+1:rm,1:pp);
sprintf('\n\n\n K is given by')
K11, K12, K21, K22
else sprintf('\n\n\n FAILED !!!!!!')
end
```

위의 프로그램은 A, Bu, Bw, Cy, Dyw, Cz, Dzw, Dzu의 시스템 행렬과 제어기의 차수 kk, 그리고 놈 한

계값 gamma를 지정해주고 사용하면 된다. 다음의 데이터를 갖는 시스템 (30)을 고려하자.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -0.990 & 17.410 & 96.150 \\ 0.265 & -0.851 & -11.390 \\ 0 & 0 & -30.000 \end{bmatrix}, \\ B_u &= \begin{bmatrix} -97.780 \\ 0 \\ 30.000 \end{bmatrix}, \ B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ D_{yw} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_z &= [1 \ \ 1 \ \ 0], \ D_{zu} = 0, \ D_{zw} = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

위의 시스템은 F4E 팬텀 전투기의 5000피트에서의 동역학이라 생각할 수 있다[7]. $\|H_{zw}(s)\|_\infty < 0.5$ 를 만족시키는 제어기 설계가 요구된다고 가정하자. (30)에 주어진 시스템 행렬값과 kk=0, gamma=0.5라고 주고 위에 주어진 프로그램을 실행한 결과 다음과 같은 출력궤환 제어기를 얻었다.

$$u = [0.1249 \ \ 0.3236]y$$

비선형 관측기의 LMI 기반 설계 예 : 다음 불확실성을 갖는 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= Ax(t) + B_u u(t) + B_u \rho(t, x, u) \\ y(t) &= C_y x(t) \end{aligned} \tag{31}$$

여기에서 $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^p$ 로 주어지고 $A \in R^{n\times n}, B_u \in R^{n\times m}, C_y \in R^{p\times n}$ 는 상수 행렬들이고, $\|\rho(u, x, t)\| \le \rho_1 \|u\| + \rho_2(t, y)$ 를 만족시키는 상수 ρ_1 와 함수 $\rho_2(t, y)$ 가 알려져 있다고 가정하자. [8]에서는 시스템 (31)에서 관측기가 존재할 충분조건을 다음과 같은 행렬식으로 구했다.

$$P(A - LC_y) + * < 0, \ B_u^T P = FC_y \tag{32}$$

위 조건을 만족시키는 L, F 를 가지고 다음과 같은 관측기를 구성하면 $\hat{x} - x$ 는 안정하다[8].

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= A\hat{x} + Ly - LC_y\hat{x} + B_u u \\ &\quad - (\rho_1\|u\| + \rho_2(t, y))B_u \frac{Fy}{\|Fy\|} \end{aligned}$$

보조정리 2와 6 그리고 $K = PL$ 을 이용하면 (32)식을 다음의 LMI로 고쳐 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} &(\bar{B}_u V \bar{B}_u^T + C_y^T W C_y)A - KC_y + * < 0 \\ &\bar{B}_u V \bar{B}_u^T + C_y^T W C_y > 0, \ \ V = V^T, \ \ W = W^T \end{aligned} \tag{33}$$

결국 위 LMI식 (33)의 해 K, V, W 를 이용해 L, F 이득 를 다음과 같이 구할 수 있다[9].

$$L = (\bar{B}_u V \bar{B}_u^T + C_y^T W C_y)^{-1} K, \ F = B_u^T C_y^T W \tag{34}$$

다음은 LMI (33)을 풀어 공식 (34)를 통해 L, F 를 구하기 위한 matlab 프로그램 예이다. 변수 K, V, W 를 lmivar로 정의하고 (33)을 lmiterm명령으로 표현하고 feasp 명령을 통해 풀어 해를 구하고 이를 (34)에 대입해 이득 L, F 를 구한다.

```
% 입력 : 시스템 행렬 A, Bu, Cy  출력 : 이득 L, F
[nn, mm]=size(Bu); [pp,nn]=size(Cy);
Bg=null(Bu');Cg=null(Cy);
setlmis([]);
K=lmivar(2,[nn pp]); W=lmivar(1,[pp 1]);
V=lmivar(1,[nn-mm 1]);
lmiterm([1 1 1 V],Bg,Bg'*A,'s');
lmiterm([1 1 1 W],Cy',Cy*A,'s');
lmiterm([1 1 1 K],-1,Cy,'s');
lmiterm([-2 1 1 V],Bg,Bg','s');
lmiterm([-2 1 1 W],Cy',Cy,'s');
choilmi = getlmis; [tmin,xfeas]=feasp(choilmi);
V0 = dec2mat(choilmi,xfeas,V);
W0 = dec2mat(choilmi,xfeas,W);
K0 = dec2mat(choilmi,xfeas,K);
F =Bu'*Cy'*W0; L=inv(Bg*V0*Bg'+Cy'*W0*Cy)*K0;
```

위의 프로그램은 A, Bu, Cy의 시스템 행렬를 지정해주고 사용하면 된다. (30)처럼 A, B_u, C_y 가 주어졌을 때 위의 프로그램을 실행한 결과 다음과 같은 이득 L, F 를 구할 수 있다.

$$F^T = \begin{bmatrix} -6082 \\ 101.2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} -29.194 & 4.739 \\ 10.285 & 0.721 \\ 112.610 & -11.452 \end{bmatrix}$$

6. 결 론

본고에서 LMI를 이용한 제어기 설계와 해석에 필수적이며 기본적인 개념과 이론 그리고 LMI에 기반한 선형 제어시스템 설계방법을 살펴보았다. 또한 LMI를 푸

논데 유용한 matlab 명령의 사용법을 다루었고 H_∞ 출력궤환 제어기설계를 위한 matlab 프로그램 예를 보였고 비선형 관측기의 LMI 기반 설계를 위한 matlab 프로그램 예도 보였다. 지면 관계상 선형 강인 제어시스템 설계를 주로 다루었다. LMI 기반 설계의 다양한 기법을 모두 소개하지는 못했지만 주어진 이론과 프로그램밍 예는 대체적인 이해와 적용에는 충분히 도움이 되리라 사료된다.

시변 시스템이나 집중제어시스템, PID 제어시스템과 같이 제어시스템 구조에 제약이 있거나 보다 복잡한 제어시스템 설계 문제를 해결하기 위해서는 소개된 것보다 고차원적인 기법(예로 기존의 리아푸노프정리와는 다른 형태의 보조정리 14가 제안되어 이용되고 있다.)이 요구된다. 관심있는 독자들은 [12]등과 같은 최신의 논문을 참조하거나 아래에 주어진 D. Henrion, C.W. Scherer, S. Weiland, S. Boyd교수의 홈페이지에 주어진 자료를 참조하시길 바랍니다.

www.laas.fr/~henrion
www.cl.ele.tue.nl/SWeiland/
www.dcsc.tudelft.nl/~cscherer/
www.stanford.edu/~boyd

그리고 Matlab 프로그램에 사용된 명령들의 더 자세한 설명은 matlab의 메인창에서 help 명령을 통해 얻거나 Matworks 사의 홈페이지인 www.mathworks.com에 주어진 자료 혹은 [5]를 참조하시길 바랍니다.

참고문헌

[1] J.C. Willems, "Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation," *IEEE Trans. Automat. Contr.,* vol. 16, pp. 621 -634, 1971.

[2] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in system and Control Theory, Philadelphia, SIAM, 1994, http://www.stanford.edu/~boyd/lmibook/

[3] L. El Ghaoui and S. Niculescu, "Robust decision problems in engineering:A linear matrix inequality approach," *in Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control,* L. El Ghaoui and S. Niculescu, eds. SIAM, 2000, pp. 3-37

[4] R.E. Skelton and T. Iwasaki, "Increased roles of linear algebra in control education," *IEEE Control Systems Magazine,* no.4, pp. 76-90, 1995.

[5] P. Gahinet, A. Nemirovski and A.J. Laub, LMI Control Toolbox User's Guide, Natic, MA:The MathWorks Inc., 1995.

[6] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami, "A cone complementary linearization algorithm for static output-feedback and related problems," *IEEE Trans. Automat. Contr.,* vol. 42, pp. 1171-1176, 1997.

[7] U Shaked, "An LPD approach to robust H_2 and H_∞ static output-feedback design," *IEEE Trans. Automat. Contr.,* vol. 48, pp. 866-872, 2003.

[8] B.L. Walcott and S.H. Zak, "State observation of nonlinear uncertain dynamical systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.,* vol. 32, no. 2, pp. 166-170, 1987.

[9] 최한호, "슬라이딩 모드 관측기 설계를 위한 선형 행렬부등식 접근법," 제어 자동화 시스템공학 논문지, 제11권, 1호, pp. 9-12, 2005.

[10] C. Scherer and S. Weiland, Linear Matrix Inequalities in Control, http://www.cs.ele.tue.nl /SWeiland/lmi.html

[11] A. Packard, K. Zhou, P. Pandey, and G. Becker, "A collection of robust control problems leading to LMI's," *In Proc. of the IEEE CDC,* pp. 1245-1250, Brighton, England, Dec. 1991.

[12] Y. Ebihara, T. Hagiwara, "Structured controller synthesis using LMI and alternating projection method," *in Proc. of the IEEE CDC,* pp. 5632-5637, Maui, Hawaii USA, Dec. 2003.

[13] J.G. VanAntwerp, R.D. Braatz, "A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities," *Journal of Process control,* vol. 10, pp. 363-385, 2000.

저자약력

《최 한 호》

- 1966년 8월 25일생.
- 1988년 2월 서울대학교 제어계측공학과(공학사).
- 1990년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사).
- 1994년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사).
- 1994년 9월~1998년 2월 대우전자 전략기술 연구소 연구원.
- 1998년 3월 ~ 2003년 2월 안동대학교 전자공학교육과 교수.
- 2003년 3월 ~ 현재 동국대학교 전기공학과 교수. 관심분야는 강인제어이론, 마이콤 기반 제어, 가상현실 및 로보틱스.