

이중원호근사법을 이용한 자유형상곡선의 오프셋 계산에 관한 연구

유동진[#]

An Investigation on the Computing Offsets of Free Form Curve using the Biarc Approximation Method

Dong-Jin Yoo

ABSTRACT

In this study a general method for computing offsets of free form curves is presented. In the method arbitrary free form curve is approximated with point series considering required tolerance. The point series are offset precisely using the normal vectors computed at each point and loop removal is carried out by the newly suggested algorithm. The resulting offset points are transformed to lines and arcs using the biarc approximation method. Tangent vectors for approximation of discrete points data are calculated by traditional local interpolation scheme. In order to show the validity and generality of the proposed method, various offsettings are carried out for the base curves with complex shapes.

Key Words : Offset(오프셋), Biarc(이중원호), Free form curve (자유형상곡선)

1. 서론

CG, CAD 및 CAM 등의 분야에서 곡선의 오프셋은 다양한 용도로 활용되고 있는데 기본곡선이 직선과 원 등의 단순한 형상이 아닌 복잡한 일반적인 형상의 곡선인 경우 오프셋 곡선을 정확하고 신속하게 구해내기 위하여 많은 연구가 진행되어 왔다. Tiller 와 Hanson¹ 등은 C^0 연속인 즉 미분벡터가 불연속적인 평면곡선의 오프셋 계산을 위하여 불연속점들에서의 벌어짐과 교차(self intersection) 등에 관한 알고리즘을 제안하였고 Hoschek^{2,3} 등은 다양한 형태의 연속조건을 가진 곡선의 오프셋처

리를 위하여 새로운 루프 제거 방법을 소개하였다. Coquillart⁴ 와 Pham⁵ 등이 B-스플라인 곡선의 오프셋 방법에 관한 알고리즘들을 제안한 이후 다양한 형태의 곡선에 대한 오프셋 알고리즘들이 여러 연구가들에 의해 보고 되었다.⁶⁻⁸ Piegel⁹ 등은 NURBS 곡선의 오프셋 계산을 위하여 기본곡선을 오프셋 양만큼 이동시켜 일차적으로 점열을 생성한 후 생성된 점열을 NURBS 곡선 보간하고 허용오차를 만족시키는 범위내에서 필요없는 조정점 및 노트 벡터를 소거하는 새로운 방법을 제안하였다. 본 연구에서는 주어진 곡선방정식으로 부터 허용오차를 고려하여 점들과 각 점들에서의 법선벡터를 구

접수일: 2004년 8월 17일; 게재승인일: 2005년 5월 13일

교신저자: 대전대학교 컴퓨터응용기계설계공학과

E-mail djyoo@daejin.ac.kr Tel. (031) 539-2031

하고 각 점들을 법선벡터 방향으로 오프셋 양 만큼 이동시켜 오프셋 된 점열을 구성한 후 필요 없는 부분을 제거하여 남는 부분을 이중원호 근사법에 의하여 직선과 원호의 조합으로 나타내는 새로운 방법을 제안하였다. 본 연구의 가장 주요한 목표는 지금까지 연구 보고된 다양한 형태의 곡선에 대한 여러 오프셋 알고리즘을 대체할 수 있는 가장 일반적인 오프셋 알고리즘을 제시하고자 하는 것으로 어떠한 형태의 입력곡선, 어떠한 형태의 출력곡선에도 일관된 방법론이 적용될 수 있도록 하고자 하는 것이다.

2. 자유형상 곡선의 오프셋 계산

2.1 오프셋 점열의 생성

기본곡선의 방정식과 오프셋 양이 주어지면 오프셋된 곡선의 방정식은

$$\vec{r}^o(u) = \vec{r}(u) + d\vec{N}(u) \quad (1)$$

로 표현할 수 있다.

여기서,

$\vec{r}^o(u)$: 오프셋된 곡선의 방정식

$\vec{r}(u)$: 기본곡선의 방정식

d : 오프셋양

$\vec{N}(u)$: 임의의 점에서의 법선벡터

이다.

Fig. 1 에서 보는 바와 같이 기본곡선이 C^1 연속이라면 오프셋된 곡선의 방정식은 식(1)로 충분히 나타낼 수 있지만 기본곡선이 C^0 연속인 경우에는 오프셋 계산시 미분벡터의 불연속점에 대하여 추가적인 처리를 해 주어야 한다. 본 연구의 주된 목적은 형상가공을 위한 공구경로의 생성과 밀접한 관계가 있으므로 정확한 형상가공 및 가공의 효율성을 위하여 다음과 같은 방법을 제안하였다. Fig. 2 에서 보는 바와같이 미분벡터의 불연속점에서의 오프셋은 다음과 같은 두가지 경우로 분류될 수 있다.

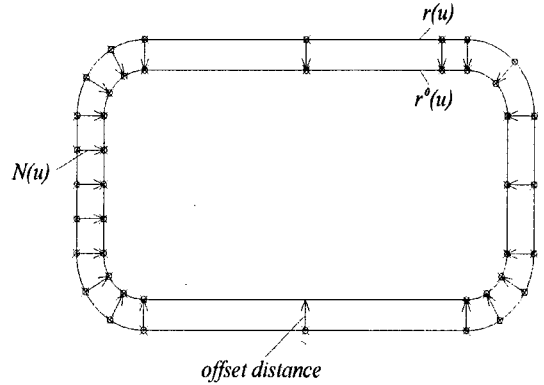
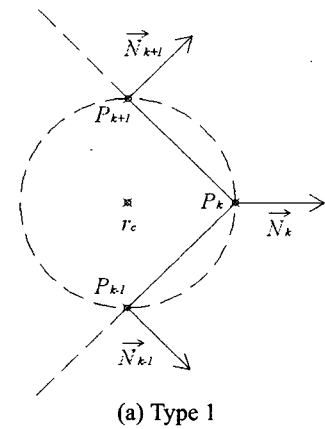
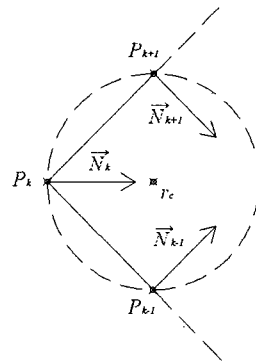


Fig. 1 Schematic diagram illustrating the concept of offsetting



(a) Type 1



(b) Type 2

Fig. 2 Type selection for the points with discontinuous tangent vectors

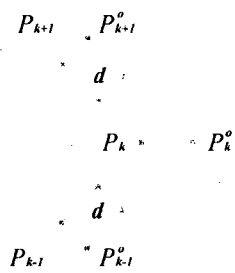
$$\begin{aligned}
 (\mathbf{p}_k - \bar{r}_c) \cdot \bar{N}_k > 0 & : \text{Type 1} \\
 (\mathbf{p}_k - \bar{r}_c) \cdot \bar{N}_k < 0 & : \text{Type 2}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

여기서,

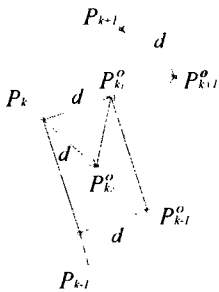
\bar{r}_c : $\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_{k+1}$ 세점을 지나는 원의 중심
 \bar{N}_k : \mathbf{p}_k 에서의 법선벡터

이다.

\mathbf{N}_k 는 \mathbf{p}_{k+1} 에서의 법선벡터 \mathbf{N}_{k+1} 과 \mathbf{p}_{k-1} 에서의 법선벡터 \mathbf{N}_{k-1} 의 합벡터로 구하였다. 본 연구에서는 불연속점의 형태에 따라 Fig. 3 에서 보는 바와 같이 바깥쪽으로 벌어지는 경우에는 두 직선의 교차점을 구해 오프셋 점으로 하였으며 안쪽으로 좁아지는 경우에는 오프셋된 두 점을 연결하여 루프를 구성하므로써 후처리를 통하여 자연적으로 소멸되도록 하였다.



(a) in case of Type 1 of Fig. 2



(b) in case of Type 2 of Fig. 2

식(2)의 \bar{r}_c 는 $\mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_{k+1}$ 세점을 지나는 원의 중심점으로서 다음과 같은 벡터 방정식을 이용하여 구하였다.¹⁰

$$\bar{r}_c = \frac{b^2(a^2 - \bar{a} \cdot \bar{b})\bar{a} + a^2(b^2 - \bar{a} \cdot \bar{b})\bar{b}}{2|\bar{a} \times \bar{b}|^2} + \mathbf{p}_{k-1}
 \tag{3}$$

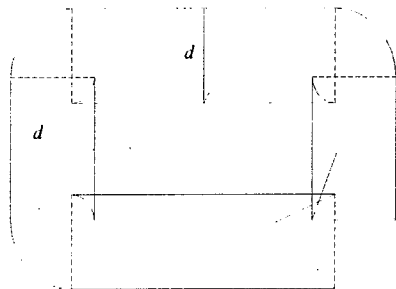
여기서,

$$\begin{aligned}
 \bar{a} &= \mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k-1} \\
 \bar{b} &= \mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_{k-1} \\
 a &= |\bar{a}|, \quad b = |\bar{b}|
 \end{aligned}$$

이다.

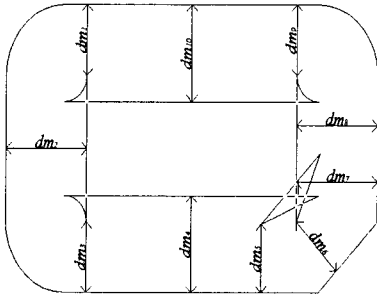
2.2 루프의 제거

루프(loop)는 곡선상의 곡률 반지름보다 오프셋 양이 클 때 또는 미분벡터의 불연속점에서의 추가적인 처리로 인하여 발생하는 것으로 루프의 제거는 오프셋 계산시 가장 중요한 알고리즘 중의 하나이다. 본 연구에서는 루프를 모든 교차점에서 절단한 후 절단된 각 부분과 원래의 기본 곡선과의 수직거리를 오프셋 양과 비교함으로써 남은 부분과 버릴 부분을 구분하는 새로운 방법을 제안하였다. Fig. 4 에서 보는 바와같이 오프셋된 점열로 구성된 곡선을 모든 교차점에서 절단한 후 절단된 각 부분과 기본곡선과의 최소 수직거리 dm_i 를 구해서 dm_i 가 오프셋 양보다 작으면 그 부분을 제거하고 dm_i 가 오프셋 양과 허용오차 내에서 같으면 남은 부분으로 처리한다.



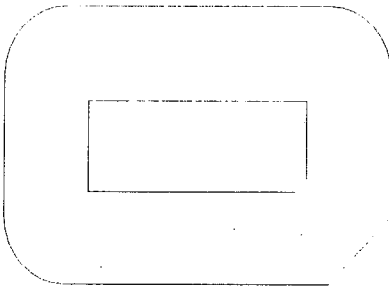
(a) before the loop removal

Fig. 3 Treatment of points with discontinuous tangent vectors



$dm_1 < d, dm_3 < d, dm_5 < d, dm_6 < d, dm_9 < d$
 $dm_2 = dm_4 = dm_7 = dm_8 = dm_{10} = d$

(b) isolated elements at the break points



(c) after the loop removal

Fig. 4 Schematic diagram illustrating the loop removal

본 연구에서는 2 차원 평면상의 직선들간의 효율적인 교차점 계산을 위하여 다음과 같은 매개변수에 의한 직선의 방정식을 이용하였다. (Fig. 5)

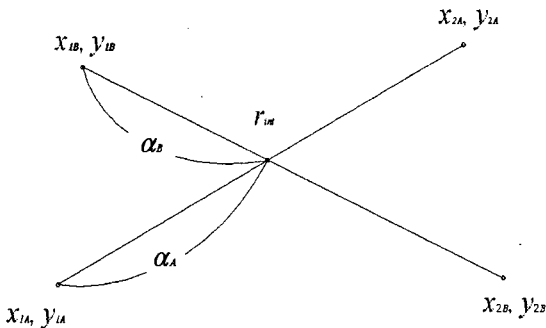


Fig. 5 Intersection between two lines

$$\vec{r}_{int} = (1 - \alpha_A)\vec{r}_{1A} + \alpha_A\vec{r}_{2A} \quad (0 \leq \alpha_A \leq 1)$$

or

$$\vec{r}_{int} = (1 - \alpha_B)\vec{r}_{1B} + \alpha_B\vec{r}_{2B} \quad (0 \leq \alpha_B \leq 1)$$

여기서,

$$\alpha_A = (ed - bf) / (ad - bc)$$

$$\alpha_B = (af - ec) / (ad - bc)$$

$$a = x_{2A} - x_{1A} \quad , \quad d = y_{1B} - y_{2B}$$

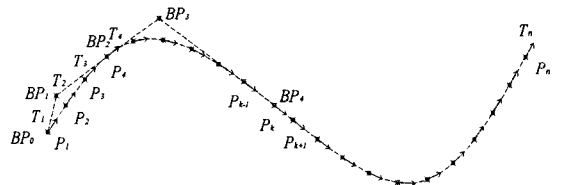
$$b = x_{1B} - x_{2B} \quad , \quad e = x_{1B} - x_{1A}$$

$$c = y_{2A} - y_{1A} \quad , \quad f = y_{1B} - y_{1A}$$

이다.

2.3 이중원호근사에 의한 오프셋곡선의 생성

루프의 제거를 통하여 최종적으로 정리된 점열들을 곡선의 방정식으로 나타내기 위하여 본 연구에서는 최근에 CAD 와 CAM 등의 분야에서 많이 적용되고 있는 이중원호 근사법을 이용하였다. 이중원호 근사법은 Fig. 6 에서 보는 바와 같이 주어진 점들을 부드럽게 통과하는 연속된 원호들로 재구성하는 방법으로서 결과적으로 생성되는 원호들이 NURBS 곡선형태로 표현되기 때문에 여러 분야에의 응용이 가능하다. 본 연구에서는 구간 탐색법을 이용하여 주어진 점들을 허용오차 내에서 C¹의 연속성을 가진 직선과 원호들의 조합으로 표현하는 방법을 제안하였다.



$BP_0 = P_1, BP_4 = P_4$
 BP_0, BP_1, BP_2 : control points for 1-st arc
 BP_2, BP_3, BP_4 : control points for 2-nd arc

Fig. 6 Generation of biarcs using the point series with derivatives

Fig. 6 에서 보는 바와 같이 점들로부터 원호근사를 하려면 점들의 좌표값 뿐만 아니라 각 점들에서의 접선벡터도 필요하게 되는데 본 연구에서는 주위의 점들로부터 특정점에서의 접선벡터를 추정하는 방법을 이용하였다.¹¹

$$\vec{T}_i = (1 - \alpha_i) \vec{D}_i + \alpha_i \vec{D}_{i+1} \quad (5)$$

여기서,

$$\vec{D}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}$$

$$\alpha_i = \frac{|\vec{D}_{i-1} \times \vec{D}_i|}{|\vec{D}_{i-1} \times \vec{D}_i| + |\vec{D}_{i+1} \times \vec{D}_{i+2}|} \quad (3 \leq i \leq n-2)$$

이다.

곡선의 시작부분의 두 점과 끝부분의 두 점에서의 접선벡터는 시작부분과 끝부분의 세점을 통과하는 원의 접선벡터로부터 구하였다. Fig. 6 의 BP_0, BP_1, BP_2 는 첫번째 원호를 구성하는 NURBS 곡선의 조정점이고 BP_2, BP_3, BP_4 는 두번째 원호를 구성하는 NURBS 곡선의 조정점에 해당되는데 BP_0 는 P_1 과 같고 BP_4 는 P_k 와 같으므로 BP_1, BP_2, BP_3 가 실질적으로 구해야 할 조정점들이다. 각 조정점들은 다음과 같은 벡터방정식으로부터 구할 수 있다.

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + 2\beta \mathbf{V} \cdot (\vec{T}_1 + \vec{T}_k) + 2\beta^2 (\vec{T}_1 \cdot \vec{T}_k - 1) = 0 \quad (6)$$

여기서,

$$\mathbf{V} = \mathbf{BP}_0 - \mathbf{BP}_4$$

이다.

식(6)은 β 에 관한 이차방정식이므로 β 를 근의 방정식으로부터 쉽게 구할 수 있으며 구한 β 를 다음의 식에 대입하면 BP_1, BP_2, BP_3 를 구할 수 있다.

$$BP_1 = BP_0 + \beta \vec{T}_1$$

$$BP_2 = \frac{1}{2} BP_1 + \frac{1}{2} BP_3 \quad (7)$$

$$BP_3 = BP_4 - \beta \vec{T}_k$$

두 원호의 공통점 BP_2 에서의 노트값 t 를

$$t = \frac{|\mathbf{BP}_0 \cdot \mathbf{BP}_2|}{|\mathbf{BP}_0 \cdot \mathbf{BP}_2| + |\mathbf{BP}_2 \cdot \mathbf{BP}_4|} \quad (8)$$

로 정의하면 노트벡터 U 는

$$U = \{0, 0, 0, t, t, 1, 1, 1\} \quad (9)$$

로 표현되고 점 BP_1 과 점 BP_3 에서의 가중치 w_1, w_3 는

$$w_1 = \cos(\alpha_1)$$

$$w_3 = \cos(\alpha_3) \quad (10)$$

로 된다.

여기서,

$$\alpha_1 = \angle \mathbf{BP}_0 \mathbf{BP}_1 \mathbf{BP}_2$$

$$\alpha_3 = \angle \mathbf{BP}_2 \mathbf{BP}_3 \mathbf{BP}_4$$

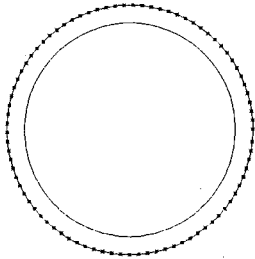
이다.

첫번째 원호는 노트벡터가 0 과 t 사이에 있을 때, 두번째 원호는 노트벡터가 t 와 1 사이에 있을 때 정의되므로 중간의 한점을 구한 후 세점을 지나는 원을 구하면 중심점 및 반지름을 구할 수 있다. 이렇게 구해진 두개의 원호와 P_2 부터 P_{k-1} 까지의 점들과의 최대간격이 주어진 허용오차를 넘게 되면 구간의 폭을 줄여 앞의 과정을 반복하게 된다. 이상의 과정을 거쳐 현재구간의 끝점이 결정되면 현재구간의 끝점을 다음 탐색구간의 시작점으로 해서 현재구간의 끝점이 곡선의 끝점 P_n 에 도달할 때까지 앞의 모든 과정을 반복수행한다.

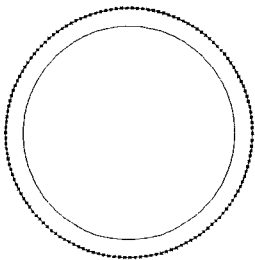
3. 적용예

본 연구에서 제안한 오프셋 알고리즘의 효용성 및 일반성을 확인해 보기 위하여 다양한 형태의 자유형상 곡선에 대하여 실험을 해 보았다. 자유형상곡선의 실험에 앞서 실제 적용면에 있어 매우 중요한 원에 대하여 오프셋 곡선을 구해 보았다. 반지름 300mm 인 원을 상용 CAD 시스템중의 하나인 CATIA™ 에서 생성한 후 일반적인 다항식곡선 형태로 저장하였다. 허용오차에 따라 오프셋된

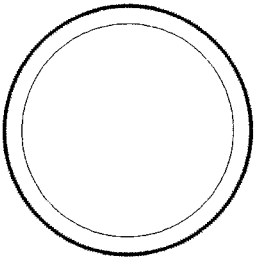
원의 반지름의 정확도를 알아보기 위하여 Fig. 7 에서 보는 바와 같이 50mm 의 오프셋을 주고 허용오차 0.1mm, 0.01mm, 0.001mm 세 경우에 대하여 실험을 해 보았다.



(a) tolerance : 0.1mm



(b) tolerance : 0.01mm



(c) tolerance : 0.001mm

Fig. 7 Offsetting of circle of radius 300mm

허용오차에 따라 오프셋된 곡선을 구성하는 점들의 개수는 다르지만 오프셋된 원의 반지름은 모두 350mm 로서 본 연구에서 제안한 알고리즘의 경우 원은 주어진 허용오차에 관계없이 정확히 원으로 오프셋됨을 알 수 있다. Fig. 8 은 다양한 오프셋 양에 대하여 실험을 해 본 결과인데 원래의 원에

대하여 오프셋양 만큼 정확히 오프셋됨을 확인할 수 있었다.

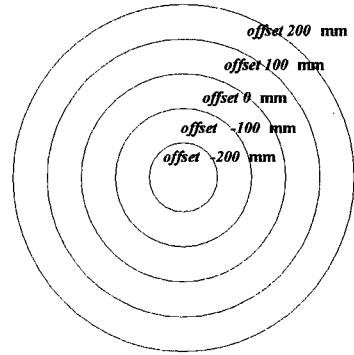
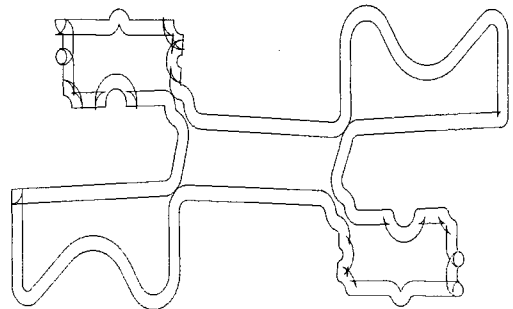
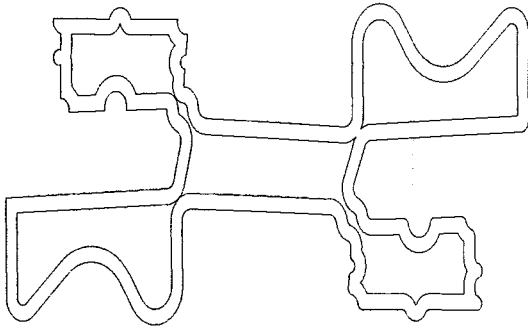


Fig. 8 Offsets of circle of radius 300mm

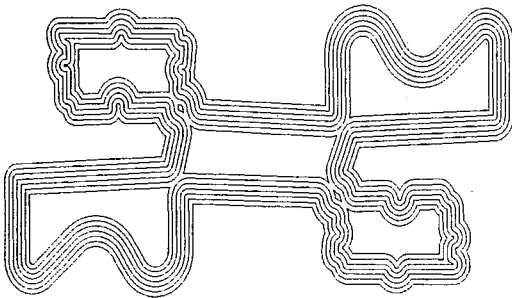
본 연구의 주된 목적은 보다 복잡한 형상의 일반적인 자유곡선에 대한 오프셋 처리에 있기 때문에 제안된 제반 알고리즘의 신뢰성을 확인해 보기 위하여 Fig. 9 와 같이 직선, 원, 자유곡선 등 실제 산업현장에서 접할 수 있는 모든 데이터로 구성된 형상을 모델링하여 실험을 해 보았다. Fig. 9(a)는 원래곡선에 10mm 오프셋 처리를 하여 점열을 생성한 단계를 보여주고 있고 Fig. 9(b)는 필요없는 루프부분을 제거한 후의 결과를 보여주고 있는데 본 연구에서 제안한 오프셋 점열 생성 및 루프의 제거등과 관련한 제반 알고리즘들이 성공적으로 적용되고 있음을 확인할 수 있었다. Fig. 9(c)는 다양한 오프셋양에 따른 결과들을 보여주고 있는데 안정적으로 오프셋 처리가 되고 있고 특히 NC 공구경로의 자동생성에 있어 필수적인 가우징(gauging)처리 또한 자연스럽게 이루어지고 있다.



(a) offsetting of point series



(b) after loop removal



(c) offsets for the various offset distances

Fig. 9 Offsetting of general free form curve

Fig. 10 은 실제 차체판넬을 성형하기 위한 프레스 금형에 있어서의 윤곽가공용 프로파일을 오프셋 처리한 결과를 보여주고 있는데 본 연구결과의 CAM 등의 응용분야에의 실제 적용가능성을 확인할 수 있었다. 특히 Fig. 11 에서 보는 바와같이 기본곡선이 복수개 있는 경우 오프셋 곡선간에 겹침이 발생할 수도 있는데 본 연구에서 제안한 루프 제거 알고리즘에 의하여 그런 현상을 원천적으로 제거 할 수 있었다. 이러한 다중곡선에 대한 루프 제거는 복잡한 형상의 2 차원 NC 가공을 위한 공구 경로 산출시 반드시 필요한 과정으로서 널리 사용되고 있는 상용화된 CAM 시스템에서도 많은 문제를 일으키고 있는 주요한 개선점 중의 하나이다. Fig. 11 에서 보는 바와 같이 모든 곡선 및 모든 공

구경에 대한 오프셋처리가 일괄적으로 이루어지고 있으며 모든 오프셋 곡선간 가우징 처리도 후처리 작업이 필요 없을 정도로 성공적으로 수행되고 있음을 확인할 수 있었다. Fig. 12 는 불연속점에서의 오프셋처리 방법에 따른 차이점을 보여주고 있는데 Fig. 12(a)는 본 연구에서 제안한 방법으로 불연속점들을 처리한 결과를 보여주고 있다. 사용하고자 하는 목적에 따라서는 Fig. 12(b)와 같이 불연속점에서의 오프셋 시 챔퍼를 주는 경우도 있을 수 있고 Fig. 12(c)와 같이 불연속점을 중심으로 오프셋 양 만큼의 원호를 생성하는 것이 바람직할 수도 있을 것이다. 본 연구에서는 모든 경우를 대비하여 옵션선택에 의하여 사용자가 원하는 형태의 처리가 이루어 질 수 있도록 프로그램하였다.

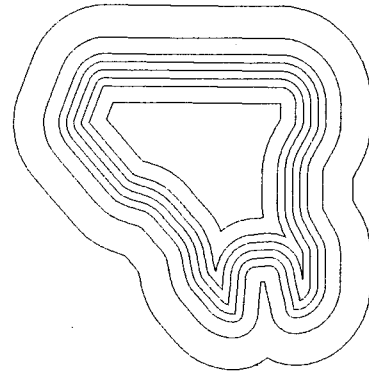


Fig. 10 Offsetting for the profile of stamping die

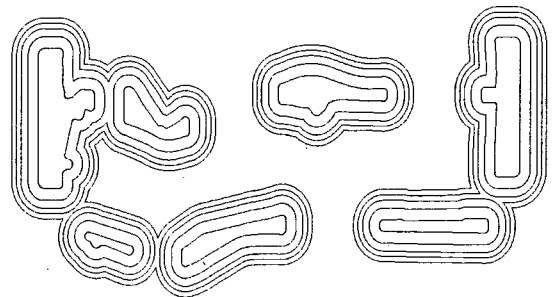


Fig. 11 Offsetting for the profile of stamping die with multiple base curves

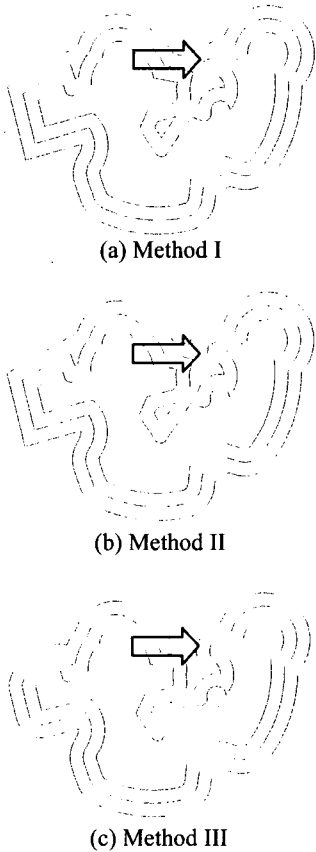


Fig. 12 Differences of offset treatments in the points with discontinuous tangent vectors

4. 결론

본 연구에서는 복잡한 일반적인 형상의 자유곡선을 오프셋 처리하기 위한 제반 알고리즘을 제안하여 다양한 형태의 기본 곡선에 대하여 시뮬레이션 해 본 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 오프셋된 점들을 이중원호근사법에 의하여 근사하게 되면 원은 주어진 허용오차에 관계없이 새로운 반경의 원으로 오프셋됨을 확인하였다.
- 2) 본 연구에서 제안한 오프셋 알고리즘은 직선, 원호 및 자유곡선 등 다양한 형태의 CAD 요소로 구성된 일반적인 형상의 복합곡선에도 적용이 가능함을 확인하였다.
- 3) 본 연구결과는 모든 형태의 곡선을 입력으로 받을 수 있고 또한 다양한 형태의 곡선으로의 출력도 가능하므로 CG 와 CAM 등의 응용분야

에 실제적으로 사용될 수 있을 것이다.

- 4) 모든 곡선 및 모든 공구경에 대한 오프셋 처리가 일괄적으로 이루어지므로 향후에는 금형 한 세트에 대한 전체 NC 데이터의 완전 자동 산출 알고리즘의 개발도 가능할 것으로 판단된다.

참고문헌

1. Tiller, W. and Hanson, E.G., "Offsets of two-dimensional profiles," IEEE Computer Graphics and Application, Vol. 4, pp. 61-69, 1984.
2. Hoschek, J. and Wissel, N., "Optimal approximate conversion of spline curves and spline approximation of offset curves," Computer Aided Design, Vol. 20, pp. 475-483, 1988.
3. Hoschek, J., "Spline approximation of offset curves," Computer Aided Geometric Design, Vol. 5, pp. 33-40, 1988.
4. Coquillart, S., "Computing offsets of B-spline curves," Computer Aided Design, Vol. 19, pp. 305-309, 1987.
5. Pham, B., "Offset approximation of uniform B-splines," Computer Aided Design, Vol. 20, pp. 471-474, 1988.
6. Meek, D.S. and Walton, D.J., "Offset curves of clothoidal splines," Computer Aided Design, Vol. 22, pp. 199-201, 1990.
7. Sederberg, T.W. and Buehler, D.B., "Offset of polynomial Bezier curves : Hermite approximation with error bounds," Mathematical methods in computer aided geometric design II. San Diego, CA : Academic Press, pp. 549-558, 1992.
8. Wolter, F.E and Tuohy, S.T., "Approximation of high-degree and procedural curves," Engineering with Computers, Vol. 8, pp. 61-80, 1992.
9. Piegl, L. and Tiller, W., "Computing offsets of NURBS curves and surfaces," Computer Aided Design, Vol. 31, pp. 147-156, 1999.
10. Faux, I.D. and Pratt, M.J., "Computational geometry for design and manufacture, John Wiley & Sons, 1981.
11. Piegl, L. and Tiller, W., "Data approximation using biarcs," Engineering with Computers, Vol. 18, pp. 59-65, 2002.