

확산화염의 진동불안성의 기원에 대해서

김종수^{*†}

On the Origin of Oscillatory Instabilities in Diffusion Flames

Jong Soo Kim^{*†}

ABSTRACT

Fast-time instability is investigated for diffusion flames with Lewis numbers greater than unity by employing the numerical technique called the Evans function method. Since the time and length scales are those of the inner reactive-diffusive layer, the problem is equivalent to the instability problem for the Liñán's diffusion flame regime. The instability is primarily oscillatory, as seen from complex solution branches and can emerge prior to reaching the upper turning point of the S-curve, known as the Liñán's extinction condition. Depending on the Lewis number, the instability characteristics is found to be somewhat different. Below the critical Lewis number, L_C , the instability possesses primarily a pulsating nature in that the two real solution branches, existing for small wave numbers, merges at a finite wave number, at which a pair of complex conjugate solution branches bifurcate. For Lewis numbers greater than L_C , the solution branch for small reactant leakage is found to be purely complex with the maximum growth rate found at a finite wave number, thereby exhibiting a traveling nature. As the reactant leakage parameter is further increased, the instability characteristics turns into a pulsating type, similar to that for $L < L_C$.

Key Words : Fast-Time Instability, Flame Oscillation, Saddle-Node Bifurcation, Hopf Bifurcation, Bogdanov-Takens Bifurcation

1. 서론

열전달의 강도와 물질전달의 강도의 비를 나타내는 Lewis수가 1보다 큰 화염에서는 일반적으로 진동불안정성이 발생할 수 있는 것으로 알려져 있다 [1-3]. 열에너지를 화학종의 하나로 취급할 경우 각 화학종 사이의 확산과 반응물 사이의 불균형이 불안정성의 발생원인으로서 확산-전도 불안정성이라고 불리우며 [4], 보다 크게는 Turing 불안정성의 한 부류로 볼 수도 있다 [5]. 이와 같은 화염의 확산-전도 불안정성은 보다 일반화되어, 복사열전달을 포함한 열전달이 물질전달보다 큰 화염에서도 동일한 Turing 불안정성의 메카니즘에 의해서 진동불안정성이 발생할

수 있다. 화염에 대한 진동불안정성은 주로 예혼합화염에 대한 이론적 해석과 실험을 통해서 잘 알려져 있으나, 최근에는 확산화염에서도 발생할 수 있다는 사실이 Kim 등의 이론적 해석을 통해서 알려지게 되었다 [3]. 단지 확산화염에서는 불안정성이 유한화학반응물의 효과가 큰 소염조건 근처에서만 발생한다는 점이 다를 뿐 확산화염 불안정성의 많은 정성적 특성이 예혼합화염의 특성과 일치함을 보여주고 있다.

수치해석 및 실험을 통해서 밝혀진 확산화염의 진동불안정성에 대한 비선형적 전개의 양상은 매우 다양하다. 먼저 공간적으로 균일한 화염의 진동이 시간적으로 증폭되어 소염에 이르는 경우가 발견되고 있는 한편 [6] 화염의 진동이 일정한 진폭을 유지하는 Limit Cycle 거동도 예측되고 있다[7]. 또한 공간적으로 스파이럴 형태의 확산화염이 일정한 속도로 회전하는 결과가 실험적으로 발견되기도 하였으며, Lewis수가 1보다 작

* 한국과학기술연구원 대기차연연구센터

† 연락처, kimjs@kist.re.kr

은 화염에서나 발생할 것으로 예상되는 일정한 파장을 갖고 고정된 파동형태의 화염도 관찰되고 있다 [8].

이와 같이 다양한 형태의 화염의 진동불안정이 발생하는 원인을 체계적으로 규명하기 위해서, 본 연구에서는 Lewis 수가 1보다 큰 경우에 대한 Fast-Time 불안정성을 해석하고 있다. Fast-Time 불안정성은 Buckmaster에 의해서 제안된 용어로서 화염의 가장 얇은 구조인 확산-반응지역에 대한 불안정성을 지칭하고 있다 [9]. 확산-대류지역을 포함하는 전체 화염지역에 대한 특성시간은 화염스트레치 (a)의 역수인 $1/a$ 로 주어지고 있으며, 확산-대류지역의 내부층인 확산-반응지역은 활성화에너지에 대한 열에너지의 비인 Zel'dovich 수(β)에 대해서 두 차수가 높은 $1/a\beta^2$ 의 매우 짧은 특성시간을 갖기 때문에, 확산-반응구조에 대한 불안정성을 Fast-Time 불안정성이라고 부르고 있다.

Fast-Time 불안정성이 화염의 내부층인 확산-확산층에 대한 불안정성이므로, 이에 따른 결과가 일반적으로 적용될 수 있는 장점이 있다. 먼저 확산-대류층에서는 차수해석을 통해서 대류의 영향이 무시될 수 있으므로, 유동구조에 영향을 받지 않는 안정성에 대한 결과가 얻어질 수 있다. 특히 1단계 Arrhenius 화학반응을 채택할 경우, Linan의 확산화염영역 (Diffusion-Flame Regime)이라는 일반해에 의해서 화염의 구조가 정의될 수 있으므로 [10] 보다 일반적인 화염의 안정성에 대한 정보를 얻을 수 있다. 또한 Fast-Time 불안정성에는 확산과 반응만이 고려되므로, 고전적 의미의 Turing 불안정성에 보다 가까운 화염불안정성이라고 생각될 수 있다.

그럼에도 불구하고, 유동장과 이와 동반되는 확산-대류지역이 없는 화염이 존재할 수 없다. 따라서 Fast-Time 불안정성의 결과를 화염의 불안정성의 예측에 바로 도입하는 것에는 매우 신중할 필요가 있다. 따라서 실제 화염의 불안정성을 예측하기 위해서는 유동장과 확산장의 구체적인 구조를 고려하여, Fast-Time 불안정성에서 얻어진 예측결과에 대한 수정이 이루어져야 된다. 이와 같은 수정은 크게 두 가지에서 이루어질 수 있다.

먼저 고려되어야 될 사항은 확산-대류지역에 의한 안정성 특성의 수정이다. 먼저 확산-대류지역의 파동은 확산-대류지역의 관점에서는 매우 긴 파장을 갖는 파동이므로, 확산-대류지역의 영향은 Fast-Time 불안정성의 이산관계식 (Dispersion Relation)에서 매우 작은 파동수를 갖는 내부층에 대한 변화에 주로 영향을 미칠 것으로 예상할 수 있다. 따라서 구체적인 불안정성의 발생조건 및 최대 증폭률을 갖는 파동의 조건

등에 대한 수정이 이루어 질 것으로 예상할 수 있으나, 불안정성의 핵심적인 특성에 커다란 변화를 가져오지는 않을 것으로 예상되고 있다.

한편 두 번째로 고려되어야 될 사항은 Lewis 수의 변화와 동반되는 소화조건 수정이다. 확산-반응지역의 해석을 통해서 확산-반응지역에 대한 축소 Damkohler 수 (Δ)의 최소값에 해당하는 조건이 Linan의 확산화염 소염조건으로 통하고 있다 [10]. Lewis 수가 1에서 벗어나거나 복사열전달에 의해서 추가적인 열손실이 발생할 경우, 반응지역의 총 엔탈피에 변화를 초래할 수 있는 Excess Enthalpy 현상이 발생하며, 이에 따라서 화염의 Damkohler 수 (Da)의 최소값과 축소 Damkohler 수 (Δ)의 최소값 사이에 차이가 발생할 수 있다 [11]. 이러한 차이는 Lewis수가 1에서 많이 벗어남에 따라서 더욱 증가하게 된다. 결과적으로 축소 Damkohler 수 (Δ)를 매개 변수로 해서 얻어지는 확산-반응지역의 불안정성의 발생조건은 언제나 화염의 새로운 소염조건과 비교하여 해석되는 것이 타당할 것이다.

이와 같이 Fast-Time 불안정성의 결과가 화염의 불안정성을 직접 예측하는 결과를 제시하지 않아서 비록 단편적인 결과만이 얻어진 상태이지만, 모든 화염의 불안정성에 밑그림을 제공하고 있다는 점에서 매우 중요하다고 할 수 있다. 따라서 보다 체계적인 화염의 안정성을 파악하고자 하기 위한 연구의 시발점으로 의미가 큰 연구라고 할 수 있다.

본 연구에서는 먼저 확산화염에 대한 Fast-Time 불안정성을 해석하기 위한 수학적 모델을 제시한다. Lewis수가 1보다 큰 경우의 불안정성은 기본적으로 진동불안정성의 특성을 보이고 있으므로, 안정성에 대한 고유치 및 고유함수는 복소수와 복소함수로 주어질 것이다. 따라서 경계지역에서 진동하는 고유치 및 고유함수에 대한 처리를 원만히 하기 위해서 Evans Function 기법을 이용하여 수치해석을 수행하고 있다 [12]. 이와 같이 얻어진 불안정성에 대한 수치해석의 결과가 파동수가 0인 평탄한 섭동과 일정한 파동수를 갖는 섭동의 안정성에 대해서 각각 설명될 것이다.

2. 지배 방정식

본 장에서는 확산화염의 Fast-Time 불안정성 해석을 위한 지배방정식을 소개한다. 활성화에너지 접근법을 이용한 지배방정식의 구체적인 유도 과정은 매우 복잡하고 지루하므로, 유도과정에 구체적인 과정은 Kim, Williams와 Ronney의 논문을 참조할 수 있을 것이다 [13].

2.1 평균 화염장의 지배방정식

준정상 상태에 대한 확산화염의 내부층은 확산-반응지역에서 성립되는 열에너지 및 화학종(연료와 산화제)의 보존방정식은 Linan의 확산화염영역의 구조방정식으로 아래와 같이 주어질 수 있다 [10].

$$\begin{aligned} \Theta_{\xi\xi} &= \Delta(\Theta - \xi)(\Theta + \xi)\exp\{-(\Theta + \gamma\xi)\} \\ \Theta_{\xi} &\rightarrow \pm 1 \text{ as } \xi \rightarrow \pm \infty \\ \Theta_F &= \Theta - \xi, \quad \Theta_O = \Theta + \xi \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서 Δ 는 내부층인 확산-반응지역의 축소 Damkohler 수이며, $(\Theta, \Theta_F, \Theta_O)$ 는 내부층의(온도, 연료, 산화제)에 대해서 스케일된 변수이며, ξ 는 얇은 확산-반응지역에 대한 직교방향의 내부 좌표계이다. 식 (1)에 주어진 열손실인자 γ 는 내부층에서 외부층으로 발생하는 열손실의 비대칭성을 나타내는 인자로서, $\gamma = 0$ 은 양쪽으로 발생하는 열손실이 같은 경우에 해당하며, (양수, 음수)의 γ 는 (산화제, 연료)쪽으로 발생하는 열손실이 더욱 커서, (연료, 산화제)의 누출이 더 크게 발생하는 경우에 해당한다. 양수와 음수의 γ 에 대한 해석은 상호 대칭이므로, 본 연구에서는 연료의 누출이 더 크게 발생하는 $0 \leq \gamma < 1$ 의 경우에 대한 해석으로 국한하고자 한다.

평균 화염장에 대한 해석은 주어진 γ 의 조건 하에서 축소 Damkohler 수 Δ 가 변화함에 따라서 화염구조 함수 $(\Theta, \Theta_F, \Theta_O)$ 의 분포를 구하는 문제로 귀착된다. 이때, 화염구조의 특성은 연료의 누출량 $\alpha = \Theta_{F,\infty} = (\Theta - \xi)_{\infty}$ 로 대표될 수 있다. 이때, $0 \leq \gamma < 1$ 에 대해서 Δ 의 변화에 따른 α 의 변화가 유명한 C-형태 곡선으로 주어지게 되며, 최소 Δ 는 Saddle-Node 조건에 (또는 Turning Point 조건에) 해당하며, 이 조건의 주변에서 다양한 불안정성이 발생할 것으로 예상할 수 있다. 또한 최소 Δ 조건은 일명 Linan의 소염조건으로 알려져 있다. 주어진 γ 에 대해서

$$\begin{aligned} \Delta_m &= e\{[(1 - |\gamma|) - (1 - |\gamma|)^2] \\ &+ 0.26(1 - |\gamma|)^3 + 0.055(1 - |\gamma|)^4\} \end{aligned} \quad (2)$$

로 주어지며, Lewis 수가 1에서 멀지 않은 화염의 소염조건에 대한 1차 근사식으로 취급될 수 있다.

화염의 불안정성은 화학반응상태의 비평형성의 정도에 크게 좌우되므로, 화학반응의 비평형성을 나타낼 수 있는 적절한 인자가 도입될 필요가 있으며, 본 논문에서는 연료의 누출량 α 에 대한 축소 Damkohler 수 Δ 의 로그 미분량인 $\Delta' = \Delta^{-1}d\Delta/d\alpha$ 로서 표현하고자 한다. 축소

Damkohler 수 Δ 는 화학반응의 동결정도에 따라서 이중의 값을 나타내는 특성을 보여주고 있으나, Δ' 은 식 (1)의 모든 해에 대해서 하나의 값을 보여주고 있다. 즉 화학반응이 무한히 빠른 경우인 $\alpha \rightarrow 0$ 의 극한에서는 $\Delta' \rightarrow -\infty$ 의 값을 보이며, 화학반응이 점차 느려져서 α 의 값이 증가함에 따라서 Δ' 도 증가하게 된다. 특히 Δ' 은 Δ 가 최소가 되는 Saddle Node 조건에서 $\Delta' = 0$ 이 되고 Saddle Node를 지난 조건에서는 Δ' 이 양수가 된다. 따라서 $\Delta' = 0$ 을 주변으로 하는 불안정성의 출현을 적절히 표현할 수 있는 변수로 사료될 수 있다.

2.2 불안정성에 대한 지배방정식

불안정성을 고려하기 위해서 식 (1)에 주어진 평균 화염장에서 조화함수 형태로 섭동된 (온도, 연료, 산화제)에 대한 거동을 다음의 지배방정식을 통해서 알아보려고 한다.

$$\begin{aligned} \Psi_{\xi\xi} - (S + K^2)\Psi &= \chi_{\xi\xi} - (LS + K^2)\chi = \\ \Delta e^{-(\Theta + \gamma\xi)} \{2\Theta\chi - (\Theta^2 - \xi^2)\Psi\} \end{aligned} \quad (3)$$

위의 식에서 L 은 연료와 산화제에 공통으로 적요되는 Lewis 수이며, S 는 고유치로서 섭동량의 증폭률을 나타내고 있으며 (즉 ReS 가 양수이면 불안정성이 발생), 고유함수 (Ψ, χ) 는 (온도, 연료 및 산화제)의 섭동량에 대한 ξ 좌표계상의 분포를 나타낸다. 한편 식 (3)에 대한 경계조건은

$$(\Psi_{\xi}, \chi_{\xi})_{\xi \rightarrow \pm \infty} \rightarrow \mp \sqrt{(1, L)S + K^2} (\Psi, \chi)_{\pm \infty} \quad (4)$$

로 주어진다.

위의 문제에서 우리는 주어진 γ 에 대해서 조 정인자 Δ' 과 L 에 대한 고유치 S 의 파동수 K 에 대한 변화인 이산관계식 $S(K)$ 를 구하고자 하며, 이를 통해서 불안정성의 특성을 파악할 예정이다.

2.3 수치해석 방법

확산화염의 Fast-Time 불안정성에 대한 수치 해석의 2단계에 걸쳐서 수행된다. 먼저 식 (1)에 주어진 준정상 상태의 화염장에 대한 해를 Shooting 기법과 Relaxation 기법을 활용하여 얻는다.

일단 정상상태의 화염장에 대한 해가 얻어진다면, 식 (3)과 (4)에 주어진 불안정성에 대한 고유치의 문제를 Evans Function 기법을 이용하여 풀게 된다. Evans Function $D(S)$ 는 다음과 같은 성질을 만족시킨다. 식(4)의 경계조건을 만족시키고 $(-\infty, \infty)$ 의 구간에서 유한한 식 (3)의 해가 존재한다면, $D(S) = 0$ 의 조건을 만족시키는 S 가 존재한다. 따라서 식 (3)과 (4)에 주어진 고유

치의 문제는 Evans Function의 근을 구하는 문제로 전환될 수 있다. 이러한 특성은 특히 고유치가 복소수인 경우, 경계조건 근처에서 진동하는 고유함수에 대한 수치해석상의 어려운 점을 우회할 수 있는 매우 유용한 방법으로 활용될 수 있다.

본 연구에서는 모든 γ 에 대한 수치해석에는 너무 많은 계산시간이 요구되며, 또한 불안정성에 대한 정성적 특성이 유사할 것이라는 가정 하에서, $\gamma=0$ 인 경우에 대한 수치해석의 결과만을 제시할 예정이다. 다른 조건에 대한 수치결과는 예혼합화염영역에 해당하는 $\gamma \rightarrow \pm 1$ 의 안정성 해석의 결과가 정성적으로 다른 경우에 실시하는 것이 타당할 것으로 사료된다.

3. 안정성해석의 결과

지금부터는 확산화염의 진동불안정성에 대한 Fast-Time 불안정성의 해석결과를 소개하고자 한다. 결과는 불안정성의 증폭률에 해당하는 고유치 S 의 실수부인 ReS 를 중심으로 소개하고자 한다. 그러나 진동불안정성의 경우, 이산방정식에 나타나는 고유치가 복소수일 수 있으므로, 이에 대한 각별한 주의가 요구된다.

본 장에서는 먼저 평면섭동(즉, $K=0$)에 대한 안정성해석의 결과를 제시한 후에, 일반적인 파동수를 갖는 섭동에 대한 안정성해석의 결과인 이산관계를 소개한다.

3.1 평면섭동($K=0$)에 대한 안정성해석결과

Lewis 수가 1보다 큰 경우에 대한 평면섭동의 불안정성에 대한 해석결과를 고유치의 실수부를

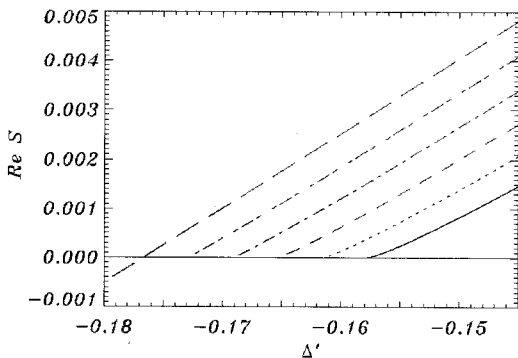


Fig. 1 Δ' 에 대한 ReS 의 변화에 대한 도시 (좌측부터 $L=1.45, 1.44, 1.43, 1.42, 1.41, 1.40$ 에 대한 계산결과)

통해서 다음의 Fig. 1에 도시하였다.

위의 Fig. 1에는 Δ' 에 대한 ReS 의 변화를 $L=1.40, 1.41, 1.42, 1.43, 1.44, 1.45$ 의 여섯 경우에 대해서 도시한 그림으로서, 다음의 세 가지 특징을 확인할 수 있다.

먼저 음수의 Δ' 에 대해서 불안정성이 발생할 수 있다는 점이다. 음수의 Δ' 영역에서는 연료의 누출이 Linan의 소염조건보다 작은 영역으로서 Lewis 수가 커짐에 따라서 보다 작은 화학적 비평형성에 의해서도 화염의 불안정성이 발생할 수 있음을 보여주고 있다. 또한 Lewis 수가 커짐에 따라서 불안정성이 등장하는 Δ' 이 더욱 작아지고 같은 Δ' 에서는 증폭률에 해당하는 ReS 가 더욱 커지는 특징을 보여주고 있어, 증가하는 Lewis수에 따라서 불안정성의 경향도 강해지고 있음을 알 수 있다. 마지막으로 $L=1.44$ 와 $L=1.45$ 의 경우를 비교하여 보면 ReS 의 분포 특성이 매우 다름을 확인할 수 있으며 이들 Lewis 수 사이에서 불안정성의 정성적 특성이 차이를 보임을 알 수 있다. 먼저 $L=1.44$ 경우에는 $ReS=0$ 에서 불연속적인 스펙트럼이 사라지고 그 아래에서는 연속적인 스펙트럼이 등장하게 된다. 그러나 $L=1.45$ 에서는 $ReS=0$ 의 이하에서도 불연속적인 스펙트럼이 계속 존재하는 특성을 보여주고 있다. 이와 같은 정성적인 특성의 차이를 구별하는 임계 Lewis수 L_C 가 수치해석을 통해서 $L_C=1.4458$ 로 확인되었다.

Fast-Time 불안정성의 정성적 특성의 변화가 예상되는 $L_C=1.4458$ 전후에 대한 평면섭동의 특성을 보다 자세히 파악하기 위해서 $L=1.4$ 와 $L=1.5$ 의 경우에 대한 ReS 의 Δ' 에 대한 상세한 변화특성이 Fig. 2에 도시되어 있다. $L=1.4$ 에 대한 Fig. 2a에서는 고유치 S 가 실수로 남아 있으면서 $\Delta' \approx -0.1580$ 보다 커짐에 따라서 양수가 되며 단조적으로 Δ' 과 같이 증가하는 특성을 보여주고 있다.

그러나 Fig. 2b에 도시된 $L=1.5$ 의 경우에는 매우 다른 특성을 보여주고 있다. 매우 작은 Δ' 에서도 고유치는 불연속적인 복소수의 스펙트럼을 갖고 있으며 ReS 는 음수의 상태로 남아있다. Δ' 이 증가함에 따라서 $\Delta' \approx -0.1959$ 에서 ReS 가 양수가 되어 불안정성이 발생하기 시작하며, $\Delta' \approx -0.19545$, $S=6.5827 \times 10^{-5}$ 에서는 고유치의 복소수 줄기가 사라지고 실수의 중근이 발생하고 있다. 여기에서 Δ' 을 더욱 증가시키면 중근이 분리되어 큰 실수의 근은 단조적으로 증가하지만 작은 실수의 근은 감소하여

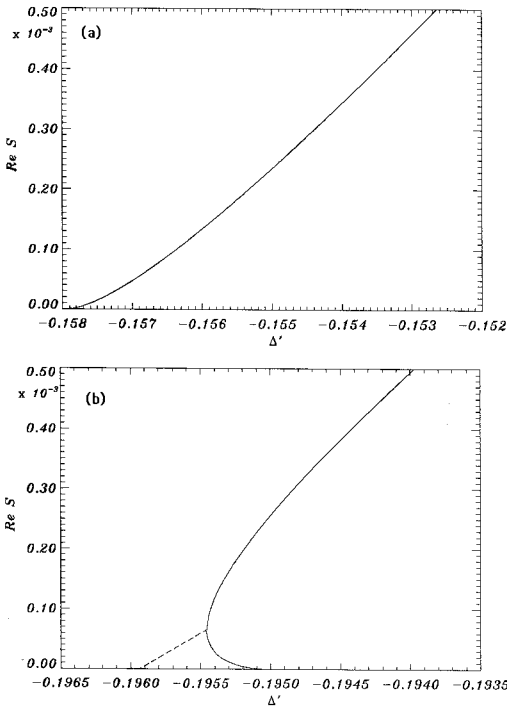


Fig. 2 Δ' 에 대한 ReS 의 변화 (a) $L = 1.40$, (b) $L = 1.5$

$\Delta' \approx -0.19498$ 에서 $S=0$ 이 되어 연속적인 스펙트럼과 병합된다.

이와 같이 임계 Lewis 수 $L_C = 1.4458$ 를 전후로 평면섭동의 거동이 매우 다른 것으로 밝혀졌으며, 이와 같은 차이가 전체적인 불안정성의 특성에 미치는 영향을 파악하기 위해서는 다음에 소개될 일반적인 파동수에 대한 불안정성의 이산관계(Dispersion Relationship)를 검토하여야 한다.

3.2 이산관계의 해석결과

화학적 비평형성의 척도인 Δ' 에 대한 안정성의 변화를 파악하기 위해서, 임계 Lewis 수 전후의 두 Lewis 수 $L = 1.1$ 과 1.9 에 대한 이산관계(즉 $S(K)$)를 알아보았다.

먼저 Fig. 3은 $L = 1.1$ 의 조건에서 $\Delta' = -0.05, 0.0, 0.05$ 그리고 0.10 에 대한 고유치의 파동수에 대한 변화를 $ReS : K^2$ 의 관계로 보여주고 있다. 먼저 평면섭동이 ($K=0$) 안정한 $\Delta' = -0.05$ 조건에서는 고유치 S 가 복소수이면서 모든 파동수의 영역에 대해서 증폭률이 음수인(즉, $ReS < 0$)인 특성을 보여주고 있어 안정적인 반응지역 구조를 예측하고 있다. 또한

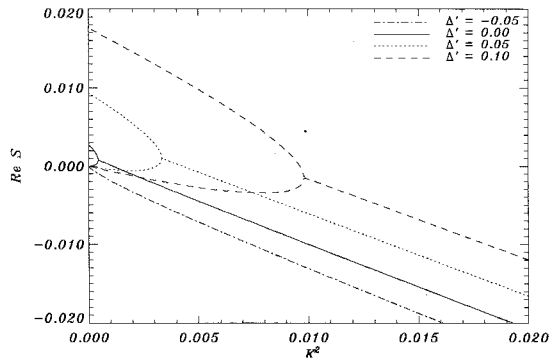


Fig. 3 $L = 1.1$ 에 대한 이산관계

평면섭동에 대해서 $S \leq 0$ 인 실수축에 대해서는 연속적인 스펙트럼이 존재하므로 언제나 $K=0$ 에서 $S=0$ 의 값을 갖는다.

그러나 화학적 비평형성이 증가해서 평면섭동이 불안정해지는 경우에는 화염의 불안정성이 나타나는 것을 $\Delta' = 0.0, 0.05$ 그리고 0.10 에 대한 이산관계에서 보여주고 있다. 평면섭동이 불안정해짐에 따라서 양의 실수를 갖는 제 1의 고유치가 나타나게 되며, 또한 제 2의 고유치인 $S=0$ 는 언제나 존재한다. $K=0$ 부터 파동수가 증가함에 따라서 제 1의 고유치는 감소하게 되고, 제 2의 고유치는 증가하게 되며, 유한한 파동수의 구간에서 하나의 반고리형태를 만들게 된다. 두개의 고유치는 반고리를 형성하므로 일정한 파동수에서 실수의 고유치는 중근을 형성하며, 이러한 중근으로부터 파동수가 증가함에 따라서 한 쌍의 복소수인 고유치가 분기되며, 복소수인 고유치의 실수부 ReS 는 파동수가 증가함에 따라서 단조적으로 감소하게 된다.

화학적 비평형 인자 Δ' 가 증가함에 따라서 불안정성은 강화된다. 이러한 특징은 같은 파동수에 대한 고유치의 최대실수부 및 반고리의 크기에서 알 수 있다. 한편 이와 같은 분기(bifurcation)를 Saddle-Node Bifurcation 이라고 하며, 이에 대응하는 비선형적 운동특성은 공간적으로 균일하며 시간적으로 진동하는(Uniform Oscillatory)특성인 것으로 알려져 있다 [14].

임계 Lewis 수 $L_C = 1.4458$ 보다 작은 $L = 1.1$ 의 경우에서는 Saddle Node Bifurcation 을 통해서 바로 Uniform Oscillation 형태의 불안정성으로 진입한 것과 달리, 임계 Lewis 수 보다 큰 경우에는 여러 단계를 거쳐서 불안정성의 양상이 변화되는 특성을 보여주고 있다. 이러한 양상이 $L = 1.9$ 의 경우에 대한 이산관계의 변화를 3개의 그래프를 통해서 보여주고 있는 Fig. 4에

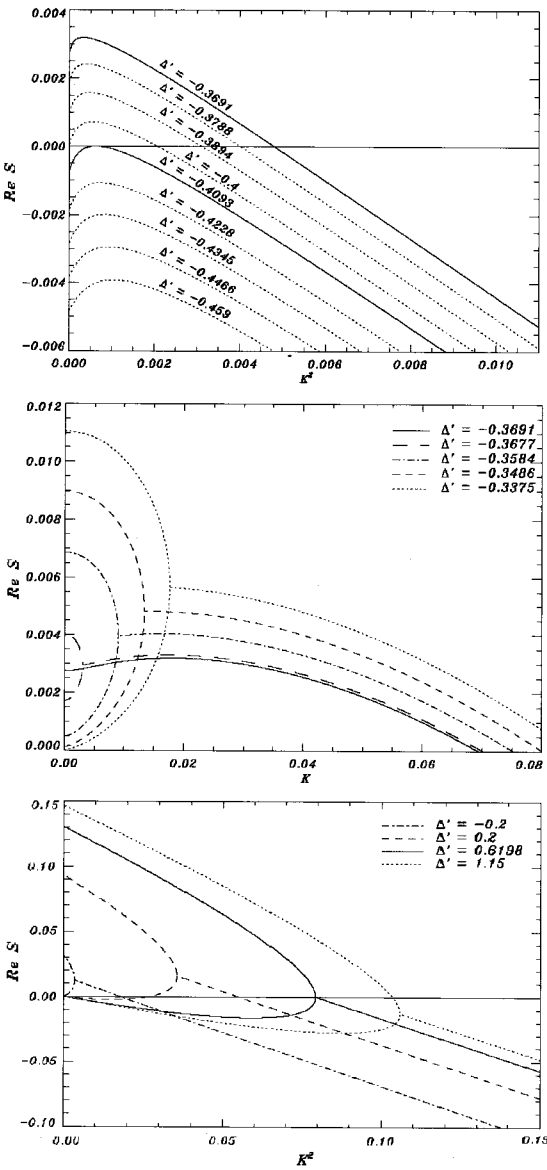


Fig. 4 $L = 1.9$ 에 대한 이산관계

잘 나타나있다. 특히 Fig. 4에 나타난 이산관계의 변화과정을 올바르게 이해하기 위해서는 Fig. 2b에 주어진 평면섭동에 대한 불안정성과 연계시켜 이해하는 것이 필요하다.

화학적 비평형 인자 Δ' 이 작은 경우에 대한 그림이 Fig. 4의 가장 위에 도시되어 있다. 먼저 ReS 에 대한 해가 모든 파동수에 대해서 복소수로 나타나고 있다. 또한 Fig. 3과 달리 복소해를 갖는 고유치의 실수부 ReS 가 파동수에 따라서 단조감소하는 것이 아니라 유한한 파동수에서 최대값을 보여주고 있다. 가장 먼저 고려된

$\Delta' = -0.459$ 에서는 모든 파동수에 대해서 ReS 가 음수의 값을 보여주지만, Δ' 이 증가함에 따라서 ReS 도 모든 파동수의 영역에 대해서 증가하고, $\Delta' = 0.4093$ 의 경우에서 $K^2 = 0.001$ 근처에서 ReS 가 "0"을 통과하는 것을 관찰할 수 있다. 따라서 불안정성의 시작은 복소수인 고유치가 $ReS = 0$ 인 허수축을 통과하는 Hopf Bifurcation으로 분류될 수 있으며, 불안정성에 의해서 일정한 파동수를 갖는 불안정성이 한 쪽으로 이동하는 Traveling Instability의 양상으로 나타날 것이다.

Δ' 을 더욱 증가시키에 따라서 평면섭동에 대해서도 ReS 가 양수를 갖게 되며, 더욱 증가된 Δ' 에 대해서는 Fig. 2b에서 보여진 바와 같이 평면섭동 ($K = 0$)에 대해서 고유치가 한쌍의 복소수로 주어지는 것이 아니라 실수의 증근에서 분기되는 현상이 발생할 것이다. 이러한 과정에 대한 이산관계의 변화가 Fig. 4의 가운데 그림에 도시되어 있다.

$\Delta' = -0.3691$ 에서는 모든 고유치가 복소수이지만, $\Delta' = -0.3677$ 에서는 $K = 0$ 근처에서 두개의 실수인 고유치가 나타나서 Fig. 3과 같이 반고리형태를 형성하며, 반고리의 최대 파동수에 해당하는 조건에서 한 쌍의 복소 고유치가 분기하는 양상의 이산관계를 보이고 있다. Fig. 3과 비교하여 $\Delta' = 0.3677$ 의 이산관계가 보여주는 다른 점은 (1) 제2의 고유치가 $S = 0$ 이 아니라 양의 실수라는 점과 (2) 복소 고유치를 갖는 영역에서 아직도 ReS 가 파동수에 대해서 단조감소하지 않는다는 점이다.

가운데 그림에서 Δ' 을 더욱 증가시킬 경우 위에서 지적된 두 가지의 경향이 완화되는 것을 보여주고 있다. $\Delta' = -0.3486$ 에서는 복소쌍의 고유치 줄기가 파동수에 대해서 단조감소하는 양상을 보이고 있으며, $\Delta' = -0.3375$ 에서는 제2의 고유치가 $S = 0$ 인 상태를 보여주고 있다.

가운데 그림에 도시된 전환단계를 지나 더욱 커진 Δ' 에 대한 이산관계가 Fig. 4의 세 번째 그림에 도시되어 있다. 즉, 한 개의 양수와 0을 갖는 두개의 고유치가 평면섭동에 대해서 존재하며, 일정한 파동수영역까지 이 두 고유치에서 나온 줄기가 반고리형태를 유지한다. 또한 반고리의 우측 끝에서 한 쌍의 복소 고유치가 분기된다. 또한 Δ' 가 커짐에 따라서 반고리의 크기도 증가하고 있으며, 복소 고유치의 줄기에서도 같은 파동수에 대해서 ReS 가 커짐을 관찰할 수 있다. 이러한 점에서 세 번째 그림의 특성은 Fig. 3과 동일하다.

Figure 4의 첫째 그림에 나타난 불안정화 초

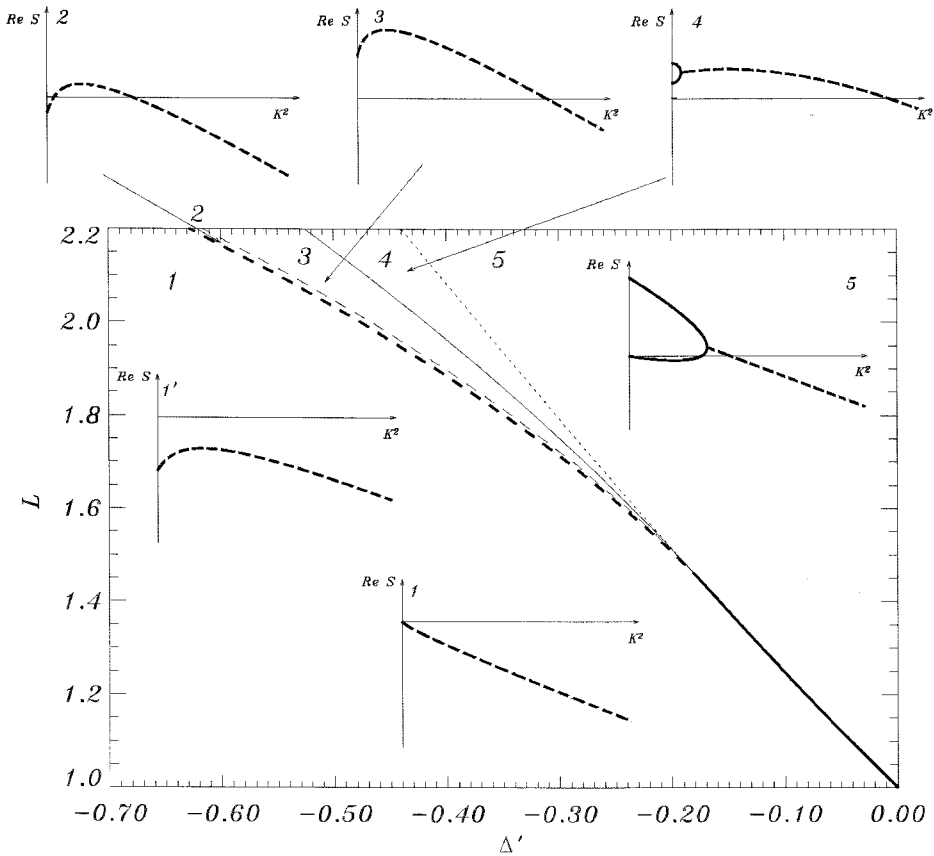


Fig. 5 다른 불안정성이 나타나는 경계에 대한 $L-\Delta'$ 지도. 작은 삽입그림들에 나타난 이산관계에서 실선은 실수 고유치의 줄기를 나타내고, 점선은 복소 고유치의 줄기를 나타낸다. 또한 불안정성 경계지도에서 굵은 실선은 Saddle Bifurcation이 발생하는 조건을, 굵은 파선은 Hopf Bifurcation이 발생하는 조건을 도시하고 있다.

기의 양상이 Hopf Bifurcation에 기인한 Traveling Instability 이었다고 한다면, 불안정화가 더욱 강화된 단계에서는 임계 Lewis 수 이하에서 예측되었던 Uniform Oscillatory Instability의 양상이 나타나고 있다. 임계 Lewis 수 이하에서는 Uniform Oscillatory Instability가 Saddle Node Bifurcation에 의해서 야기되었다. 하지만 임계 Lewis 수 이상에서는 Traveling Instability에서 Uniform Oscillatory Instability로 전환되는 확실한 경계를 비선형해석이 수행되지 않은 현 단계에서는 파악하기 어렵다. 단 비선형 안정성해석이 수행된다면 불안정성과 연관된 Manifold의 특성이 정성적으로 전환되는 조건으로부터 불안정성의 전환시기를 예측할 수 있을 것이다.

3.3 불안정성의 종합적 특성

불안정성을 제어하는 인자는 Lewis 수 L 과

화학적 비평도를 나타내는 인자 Δ' 이다. 이 두 인자에 대해서 불안정성의 특성이 변하는 양상이 Fig. 5의 불안정성 경계지도에 나타나있다. 또한 Fig. 5에는 숫자로 매겨진 $L-\Delta'$ 의 각 영역에서 나타날 수 있는 전형적인 이산관계를 삽입그림으로 도시하였다. 삽입그림에 나타난 이산관계에서 실선은 실수 고유치의 줄기를 점선은 복소 고유치의 줄기를 보여주고 있다.

먼저 Fig. 5에서 Lewis 수가 커짐에 따라서 불안정성이 보다 작은 화학적 비평형도에서 발생할 수 있음을 알 수 있다. 또한 임계 Lewis 수 $L_C = 1.4458$ 를 전후하여 불안정성이 발생하는 과정이 매우 다름을 알 수 있다.

$L_C = 1.4458$ 보다 작은 Lewis 수에서는 안정적인 영역 1의 상태에서 Saddle Node Bifurcation을 통해서 공간적으로 균일하고 시간적으로 진동하는 Uniform Oscillatory Instability

가 예측되는 영역 5로 바로 진입하는 특성을 보이고 있다.

그러나 임계 Lewis 수 보다 큰 경우에는 안정된 영역 1에서 유한한 파장의 섭동에 대해서 Traveling Instability 가 발생하는 영역 2로 진입하게 되며, 혼재된 불안정성의 특성이 예상될 수 있는 영역 3, 4의 전환 단계를 거쳐서 Uniform Oscillatory Instability 가 예측되는 영역 5로 진입하는 다단계의 불안정성 전개과정을 거치게 된다.

특히 $L_C = 1.4458$, $\Delta' = -0.158$ 의 조건에서는 Bifurcation의 형태가 Saddle Node Bifurcation에서 Hopf Bifurcation으로 전환된다. 또한 1-5 영역의 단 하나의 경계가 존재하는 양상에서 1-2, 2-3, 3-4, 4-5의 4개의 다른 경계로 분기되는 현상도 같은 $L_C = 1.4458$, $\Delta' = -0.158$ 의 조건에서 발생한다. 따라서 이 조건도 Bifurcation 조건으로 볼 수 있으며, 구체적으로는 Bogdanov-Takens Bifurcation에 해당한다.

4. 결론

본 논문에서는 Lewis 수가 1보다 큰 경우에 발생할 수 있는 확산화염의 진동불안정성에 대한 일반적인 특성을 파악하고자, 화염의 내부충진 확산-반응지역에 대한 불안정성 해석인 Fast-Time Instability 해석을 수행하였다. 이로 부터 Lewis 수가 1보다 큰 경우에 불안정성의 특성이 달라지는 임계 Lewis수가 있음을 밝혔다.

임계 Lewis수 보다 작은 Lewis 수를 갖는 화염은 Saddle-Node Bifurcation을 통해서 바로 안정한 화염에서 Uniform Oscillatory Instability가 발생하는 것으로 파악되고 있다. 한편 임계 Lewis 수 보다 큰 경우에는 Hopf Bifurcation에 의해서 Traveling Instability 가 먼저 발생하며 여러 단계의 중간과정을 거쳐서 Uniform Oscillatory Instability로 귀결됨을 밝혔다. 따라서 임계조건에서는 Saddle-Node Bifurcation에서 Hopf Bifurcation으로 교환이 발생하며, 이러한 교환은 Bogdanov-Takens Bifurcation으로 볼 수 있다.

화염의 불안정성에 대한 궁극적 귀결을 파악하기 위해서는 비선형해석이 수행되어야 한다. Lewis 수가 1보다 큰 화염에서는 진동 불안정성에 대한 Limit Cycle의 존재여부가 가장 큰 관심사로 인식되고 있다. 그러나 이러한 차이에 대한 궁극적인 원인은 아직 파악되지 못하고 있다. 본 연구를 통해서 추측컨대, Bogdanov-Taken Bifurcation에 의한 Manifold의 변화가 Limit Cycle 생성의 원인으로 작용할 가능성을 열어 놓

았다고 할 수 있을 것이다. 따라서 Limit Cycle 이 발생하는 동역학적 특성과 Bogdanov-Taken Bifurcation의 연관관계를 밝히는 비선형 안정성 해석이 향후 수행될 핵심적인 연구내용으로 충분할 것이다.

후 기

이 연구(논문)은 과학기술부의 지원으로 수행하는 21세기 프론티어연구개발사업(수소에너지사업단)의 일환으로 수행되었습니다.

참고문헌

- [1] P. Clavin, "Dynamic Behavior of Premixed Flame Fronts in Laminar and Turbulent Flows," *Prog. Energy Combust. Sci.* 11, 1985, pp.1-59.
- [2] G. Joulin and P. Clavin, "Linear Stability Analysis of Nonadiabatic Flames: Diffusional-Thermal Model," *Combust. Flame* 35, 1979, pp.139-153.
- [3] J. S. Kim, "Linear Analysis of Diffusional-Thermal Instability in Diffusion Flames with Lewis Numbers Close to Unity," *Combust. Theory Modelling* 1, 1997, pp.13-40.
- [4] G. I. Barenblatt, Y. B. Zel'dovich and A. G. Istratov, "On Diffusional-Thermal Stability of a Laminar Flame," *Prikl. Mekh. Tekhn.* 4, 1962, 21-26 (in Russian).
- [5] A. M. Turing, "The chemical basis of morphogenesis," *Phil. Trans. Roy. Soc. London* B237, 1952, pp.37-72.
- [6] C. H. Sohn, S. H. Chung and J. S. Kim, "Instability-Induced Extinction of Diffusion Flames Established in the Stagnant Mixing Layer," *Combust. Flame* 117, 1999, pp. 404-412.
- [7] C. H. Sohn, J. S. Kim, S. H. Chung and K. Maruta, "Nonlinear Diffusion Flame Oscillations Triggered by Radiative Heat Loss," *Combust. Flame* 123, 2000, pp. 95-106.
- [8] C. Miesse, R. I. Masel, M. Short and M. A. Shanon, "Experimental Observations of Methane-Oxygen Diffusion Flame Structure," *Combust. Theory Modelling* 9, 2005, pp.77-92.
- [9] J. D. Buckmaster, A. Nachman and S. Taliafero, "The Fast Time Instability of Diffusion Flames," *Physica* 9D, 1983, pp. 408-424.

- [10] A. Linan, "The Asymptotic structure of counterflow diffusion flame for large activation energies," *Acta Astronautica* 1, 1974, pp.1107-1039.
- [11] J. S. Kim and F. A. Williams, "Extinction of Diffusion Flames with Nonunity Lewis Numbers," *J. Engineering Math* 31, 1997, pp.101-118.
- [12] V. V. Gubernov, G. N. Mercer, H. Sidhu and R. O. Weber, "Evans Function Stability of Combustion Waves," *SIAM J. Appl. Math.* 63, 2003, pp.1259-1275.
- [13] J. S. Kim, F. A. Williams and P. D. Ronney, "Diffusional-Thermal Instability of Diffusion Flames," *J. Fluid Mech.* 327, 1996, pp.273-301.
- [14] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, "Pattern Formation Outside of Equilibrium," *Review of Modern Physics* 65, 1993, pp. 851-1112.