

추계론적 이론을 이용한 교량내진거동분석

Seismic Behaviors of a Bridge System in the Stochastic Perspectives

마 호 성

Mha, Ho-Seong

국문요약

본 연구에서는 지진하중을 받는 교량의 거동을 확률밀도함수를 통하여 분석할 수 있는 기법을 개발하였다. 확률밀도함수의 전개는 추계론적 이론을 이용한 반해석적 방법을 통하여 구하였으며, 반해석적 방법은 교량운동방정식으로부터 상응하는 Fokker-Planck equation을 구한 후, path-integral solution을 유도하여 이를 수치적으로 해석함으로써 구할 수 있다. 교량거동의 확률밀도 함수전개로부터 교량거동의 확률적 특성을 파악하고 확률밀도함수의 범위로부터 교량응답거동의 포락선을 얻을 수 있으며 이를 이용하여 최대응답의 범위를 결정할 수 있다는 것을 밝혔다.

주요어 : 지진, 교량, 추계론적, Fokker-Planck 방정식, path-integral 해, 확률밀도함수

ABSTRACT

Semi-analytical methodology to examine the dynamic responses of a bridge is developed via the joint probability density function. The evolution of joint probability density function is evaluated by the semi-analytical procedure developed. The joint probability function of the bridge responses can be obtained by solving the path-integral solution of the Fokker-Planck equation corresponding to the stochastic differential equations of the system. The response characteristics are observed from the joint probability density function and the boundary of the envelope of the probability density function can provide the maxima of the bridge responses.

Key words : earthquake, seismic, bridge, stochastic, Fokker-Planck equation, path-integral solution, probability density function

1. 서 론

지진으로 인한 피해로부터 자유로워지기 위한 인간의 노력은 현대과학문명의 발달과 함께 급속히 진행되어왔다. 세계적으로 지진다발지역에서 지진에 대한 저항, 즉 내진에 대하여 더욱 발전해 왔음은 당연하며, 최근 들어 메스 미디어의 발전은 타 지역의 지진피해에 대하여 간접적이거나 너무도 생생한 경험을 할 수 있게 되었으며, 이로 인하여 강진을 경험하지 못한 국가나 지진다발지역이 아닌 국가에서도 내진에 대한 관심이 매우 높아지고 있다.

교량의 내진에 대한 보다 합리적이고 실질적인 설계 및 보수보강방안의 제시를 위해서는 지진하중에 대한 교량의 동적거동을 정확히 예측하는 것이 무엇보다 우선되어야 하며 적절한 해석방법이 개발되어야 한다. 지진하중은 지반운동의 불확실성(uncertainty)으로 인하여 본질적으로 확률과정(stochastic process)을 이루며 이러한 지진하중으로 인해 운동하는 교량의 응답거동 또한 확률과정이 된다. 확률과정으로 이루어진 교량의 내진거동을 실질적으로 분석하기 위해서는 하나의 응답이 아닌 교량거동의 전체(ensemble)에 대한 확률적 특성을 살펴야만 한다. 일반적인 교량의 내진해석에 쓰이는 기존의 방법인 응답스펙트럼법, 모드중첩법 등은 이러한 지진하중의 불확실성을 고려할 수 없으며 교량거동의 확률적 특성을 나타낼 수 없다.

또한 몇몇 연구에서 교량거동의 통계적 수치를 분석하고는 있으나 교량거동자체를 확률과정으로서 분석한 예는 매우 드물다고 할 수 있다. 추계론적 이론(stochastic theory)을 이용하여 지진하중을 받는 교량거동에 대한 운동방정식을 추계론적미분방정식 (stochastic differential equation)으로 해석하게 되면 교량의 확률적 거동에 대한 보다 적절한 정보를 얻을 수 있다.

추계론적 시스템의 연구에서 시스템의 통계적 특성은 확률분포함수를 분석함으로써 얻을 수 있다. 외부 백색노이즈를 더한 조화하중을 받거나 narrow band 여기력을 받는 비선형 Langevin방정식에 대하여는 상응하는 Fokker-Planck방정식을 얻을 수 있다.^{(2),(6),(7)} 확률분포를 관찰함으로써 노이즈가 진동계의 일반거동 및 혼돈거동에 미치는 노이즈의 영향에 대한 연구가 있었으며, 결정론적 궤도가 혼돈거동을 보이는 경우 확률적 측정은 중요한 위상적 변화를 나타냄이 밝혀졌다.⁽⁵⁾

위에서 언급한 연구에서 볼 수 있듯이, 시스템의 동적 거동은 위상면(phase plane)에서 응답거동의 확률분포함수를 분석함으로써 특성을 파악할 수 있으며⁽³⁾, 이는 Fokker-Planck방정식을 path-integral해법을 이용하여 풀으로써 얻을 수 있다.

선형 및 비선형 가우스 확률과정(gaussian processes)에 대한 Fokker-Planck방정식을 해석하는 path-integral 해법은 여러 연구에서 개발되었다.^{(3),(4),(10),(11)} Haken⁽⁴⁾은 Master 방정식에 대한 path-integral 해법을 개발하였으며 일반화된 Onsager-Machlup함수를 구하였다. Wissel⁽¹¹⁾은

* 정회원·호서대학교 토목공학과 부교수, 공학박사
(대표저자:mhah@office.hoseo.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2006년 2월 28일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.
(논문접수일 : 2005. 10. 6 / 심사종료일 : 2005. 10. 12)

비선형 가우스 확률과정에 대한 path-integral해법을 개발하였다. Wehner와 Wolfer⁽¹⁰⁾은 path-integral해법에 기초하여 Fokker - Planck 방정식을 푸는 수치해석적 절차를 제공하였다.

지진하중을 받는 교량동적거동을 예측함에 있어서도 추계론적 이론을 이용하여 반해석적 방법으로 구한 확률밀도함수를 이용함으로써 확률과정인 교량거동에 대한 보다 적절한 확률적 특성을 면밀히 알 수 있다. 교량내진거동분석시 해석적 해(analytical solution)를 이용함으로써 많은 양의 결과가 필요하지 않으며 따라서 계산의 시간을 단축할 수 있다.

본 연구에서는 기존의 방법이 아닌 추계론적 이론을 이용한 새로운 방법을 개발하고 이를 통하여 교량내진거동을 분석하고자 한다. 추계론적 미분방정식으로부터 얻은 Fokker-Planck 방정식을 path-integral solution을 이용한 반해석적방법(semi-analytical procedure)을 제시하고 여기서 얻은 확률밀도함수(probability density function)의 전개로부터 교량의 거동에 대한 특성과 각 인자들의 영향을 분석하려 한다. 또한 구해진 확률밀도함수를 다양한 교량의 지진위험도 분석에 적용하여 개발된 방법론의 적용성을 시험해보고자 한다. 교량내진거동분석시 해석적 해(analytical solution)를 이용함으로써 많은 양의 결과가 필요하지 않으며 따라서 계산의 시간을 단축할 수 있다. 본 연구의 방법론의 개발은 교량뿐만 아니라 많은 구조물의 동적거동예측의 새로운 방향을 제시할 수 있다.

본 연구에서 대상으로 하는 교량은 단순PSC거터교로 그림 1에 대상교량의 제원을 나타내었다. 본 연구에서는 교량의 일차원적인 운동인 교량 교축방향의 거동만을 고려하고자 하며, 자유단에서는 마찰을 무시한다. 따라서 진동계는 고정단과 연결된 3개의 진동계가 형성되며 본 연구의 목적은 전체교량의 거동특성을 분석하는 것이 아니라 추계론적기법의 적용성 및 개발에 그 목적이 있으므로 여기서는 중앙진동계의 거동만을 분석하고자 한다.

입력 지진파는 널리 상용되고 있는 SIMQKE프로그램을 이용하여 국내시방서에서 규정하는 설계응답스펙트럼에 일치하도록 발생하였다(그림 2).

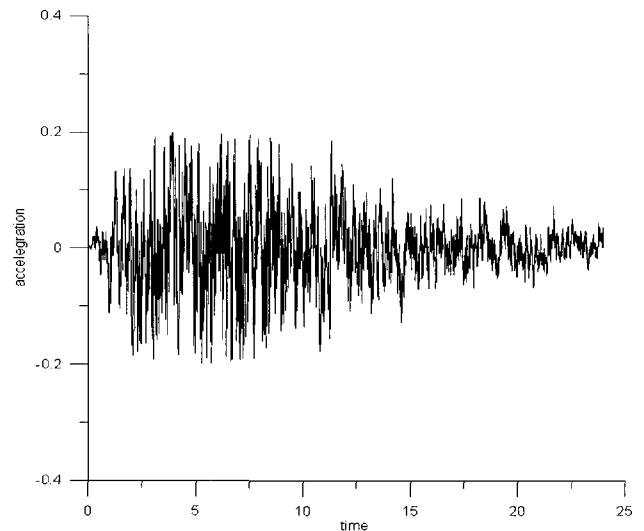


그림 2 입력 인공지진파 (PGA=0.2g)

2. 추계론적 교량의 운동방정식

대상교량에 대한 운동방정식은 계산의 편의상을 위해 교축방향의 변위를 x 로 나타내어 아래와 같이 표시할 수 있다.

$$m(\ddot{x} + \ddot{x}_g) + c\dot{x} + R(x) = 0 \tag{1}$$

여기서 m 은 교량 상판의 질량, c 는 감쇠상수, $R(x)$ 는 교각의 복원력이며, x 는 교량상부의 지반에 대한 상대변위이고, x_g 는 지반변위이다. 식(1)을 변형하여 상부질량에 대하여 정규화(normalization)하면, 정규화된 운동방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + R^*(x) = -\ddot{x}_g \tag{2}$$

여기서 ξ 는 감쇠비이고, ω 는 상용하는 선형시스템의 고유진동수이다.

식(2)의 우변에 위치한 지반가속도는 확률과정으로 표현되며 따라서 운동방정식은 추계론적미분방정식으로 볼 수 있다.

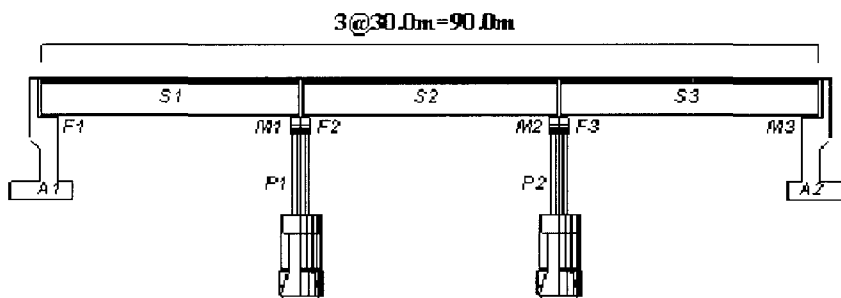


그림 1 대상교량

일반적으로 시스템이 물성치로부터 또는 기하학적인 형상으로부터 비선형을 내재하는 경우에 비선형시스템의 거동에 대한 정확해는 구할 수 없으며, 더군다나 추계론적 하중을 받는 시스템의 랜덤거동을 정확히 예측하기는 불가능하다. 그러나 대상교량시스템의 추계론적 미분방정식을 풀어서 응답거동의 확률밀도함수를 얻을 수 있으며 이로부터 시스템거동의 분포특성을 평가할 수 있다. 다음에 추계론적 교량시스템의 거동을 확률밀도함수를 이용하여 분석하는 반해석적 방법론(semi-analytical procedure)의 개발과정 및 기본이론에 대하여 간략히 설명한다.

2.1 Markov Process

다음의 조건을 만족하는 확률과정(stochastic process)을 Markov process라고 부른다.

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; \dots; x_1, t_1) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \quad (3)$$

조건확률밀도함수(joint probability density function: JPDF)는 바로 전 시간의 $x_{n-1}(t_{n-1})$ 의 값에만 종속하고 그 이전의 값들인 $x_{n-2}(t_{n-2}), x_{n-3}(t_{n-3}), \dots, x_1(t_1)$ 에는 종속하지 않는다⁽⁸⁾.

시스템거동의 확률밀도함수의 전개과정은 대응하는 Fokker-Planck방정식을 풀어서 얻을 수 있다.

식 (3)으로부터, 지진하중을 나타내는 지반가속도 x_g 는 linear filtering을 통하여 나타낼 수 있으며 따라서 다음과 같은 추계론적 미분방정식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\xi\omega x_2 - \omega^2 x_1 - \ddot{x}_g \\ \dot{x}_{g1} &= x_{g2} \\ \dot{x}_{g2} &= -2\xi_n\omega_n x_{g2} - \omega_n^2 x_{g1} + \eta(t) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 $\eta(t)$ 는 delta-correlated된 가우스 백색노이즈로 가정한다. $\eta(t)$ 는 delta-correlated Langevin하중이므로, 식(4)으로 표현되는 교량시스템의 확률과정은 이제 Markov process가 된다.⁽⁸⁾ 식 (4)에서 표현된 지진가속도는 rice방법⁽⁹⁾에 의해 구한 방법처럼 여럿 harmonics의 합으로 구하는 결정론적인 형태로도 표현될 수 있다. 이러한 경우 식 (4)은 아래와 같이 다시 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2\xi\omega x_2 - \omega^2 x_1 - \ddot{x}_g + \eta(t) \end{aligned} \quad (5)$$

식(5)에서 $\ddot{x}_g(t)$ 는 지진하중이다.

2.2 Fokker-Planck 방정식

시스템거동의 확률밀도함수의 전개과정은 대응하는

Fokker-Planck방정식을 풀어서 얻을 수 있다. $\eta(t)$ 는 δ -correlated Langevin하중이므로, 식(5)으로 표현되는 교량시스템의 확률과정은 이제 Markov process가 되며 따라서 상응하는 Fokker-Planck 방정식을 구할 수 있다. 확률밀도함수를 지배하는 Fokker-Planck 방정식은 다음과 같은 일반적인 형태로 쓸 수 있다.

$$\frac{\delta f(X, t)}{\delta t} = L_{FP}(X, t)f(X, t) \quad (6)$$

식 (6)에서, $L_{FP}(X, t)$ 는 Fokker-Planck 연산자(operator)로 다음과 같이 정의된다.

$$L_{FP}(X, t) = -\frac{\delta}{\delta x_i} K_i(X, t) + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta x_i \delta x_j} Q_{ij}(X, t) \quad (7)$$

식 (7)에서, $K_i(X, t)$ 와 $Q_{ij}(X, t)$ 는 각각 drift 변수와 diffusion 매트릭스이다. 과도 확률밀도함수(transition PDF)인 $P(x, t | x', t')$ 은 특수한 초기조건인 $f(x, t') = \delta(x - x')$ 를 갖는 확률분포로써 식 (7)을 만족한다. 따라서 과도확률밀도함수에 대한 Fokker-Planck방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.⁽⁸⁾

$$\frac{\delta P(X, t | X', t')}{\delta t} = L_{FP}(X, t)P(X, t | X', t') \quad (8)$$

2.3 지진하중을 받는 교량시스템의 FPE와 short-time propagator

지진하중을 받는 교량시스템의 추계론적 미분방정식인 식 (5)에 대한 Fokker-Planck방정식은 drift와 diffusion 변수를 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} f(X, t) &= -\frac{\delta}{\delta x_1} (x_2 f(X, t)) \\ &\quad - \frac{\delta}{\delta x_1} [(-2\xi\omega x_2 - \omega^2 x_1 - \ddot{x}_g) f(X, t)] \\ &\quad + \frac{q}{2} \frac{\delta^2}{\delta x_2^2} f(X, t) \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 q 는 노이즈강도(noise intensity)이다. 식 (9)에 대응하는 short time propagator $P_\tau(X' | X)$ 은 다음과 같이 구할 수 있다⁽¹⁾.

$$\begin{aligned} P_\tau(x'_1, x'_2; t + \tau | x_1, x_2; t) &= (2\pi\tau)^{-1} \exp\left(-\frac{\tau}{2} q^{-1} \left[-2\xi\omega x_2 - \omega^2 x_1 - \ddot{x}_g - \frac{x'_2 - x_2}{\tau}\right]^2\right) \\ &\quad \delta\left(x_2 - \frac{x'_1 - x_1}{\tau}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)에서 $\{x_1', x_2'\}$ 와 $\{x_1, x_2\}$ 은 각각 시스템의 short time propagation의 후상태와 전상태를 나타낸다.

3. 결과분석

본 연구에서는 교량시스템의 거동을 추계론적 이론을 이용한 반해석적방법을 통하여 교량의 지진거동을 응답거동 자체보다는 확률밀도함수(PDF)의 전개(evolution)을 통하여 살펴보았다. 앞에서 언급한 바와 같이 지진하중은 지반운동에 포함되어있는 불확실성으로 인하여 추계론적 하중이 되며 이를 경험하여 일어나는 교량의 응답거동 또한 확률과정이 된다. 따라서 그림 5.2에 나타난 것과 같이 주어진 지진하중에 대한 응답거동의 결정론적 결과는 큰 의미를 가질 수 없으며, 대표값을 찾기 위해서는 무수히 많은 결과를 얻는 방법, 즉 Monte-Carlo simulation을 적용하는 경우가 있으나, Monte-Carlo simulation 은 최후의 방법으로 쓰이는 수단일 뿐이다(Ang and Tang, 1975). 다음은 path-integral solution을 이용한 반해석적 결과에 대하여 보여주고자 한다.

3.1 Marginal Probability Density Functions

본 절에서는 변위와 속도에 대한 각각의 Marginal probability density function(MPDF)를 살펴보려고 한다. MPDF는 본 연구에서 개발한 해석방법으로부터 구한 확률밀도함수(Probability density function: PDF)의 전개로부터 구할 수 있다.

그림 3은 전개되는 시간에 따라 응답변위의 확률밀도함수(PDF)를 나타낸 것이다. 시스템이 운동을 시작하면 대부분의 응답은 초기치의 근처에서 일어나는 것을 그림 3의 (a)로부터 알 수 있다. 그러나 어느 정도의 시간이 지난 후에는 지진하중의 확률과정이 갖는 분산의 정도의 영향으로 인해 응답거동 또한 그 범위가 커짐을 알 수 있으며, 또한 그 범위도 안정적으로 유지됨을 볼 수 있다. 다음은 PDF의 전개를 같은 그래프에서 비교하여 보았다. 그림 4에서 실선은 0.1초에서의 PDF이며 점선은 1초 후

의 PDF이다. 운동의 시작점이라고 볼 수 있는 첫 번째 PDF는 대부분의 응답이 한군데에 몰려있음을 볼 수 있다. 그러나 1초 후에는 이미 응답이 많이 퍼지는 것을 볼 수 있으며 시간이 흐름에 따라 응답에 대한 확률분포는 어느 정도 비슷한 모습을 나타냄을 알 수 있다. 이것은 처음의 transient 상태가 지난 후에 교량거동의 확률과정이 어느 정도의 stationary process의 성질을 띠는 것으로 볼 수도 있다. 그러나 입력지진파의 포락형상에 따라 이러한 stationary process의 성질은 유지될 수 없다.

이러한 응답의 퍼짐 현상은 contour맵에서 훨씬 쉽게 관찰할 수 있다. 그림 5는 운동의 시작점과 지진하중의 끝점의 joint PDF의 contour map 과 surface map을 통한 비교이다. 그림에서 볼 수 있듯이 처음에 국부에 있었던 거동은 넓게 퍼져있음을 알 수 있다. Joint PDF를 통해서 볼 때 응답이 넓게 퍼진 뿐만 아니라 어느 일정부분에 집중되지 않고 분포가 매우 랜덤한 것을 알 수 있다. 또한 이 결과로부터 교량거동의 정확한 예측은 불가능하지만 최대값과 최소값의 범위를 밝힐 수 있음을 알 수 있다.

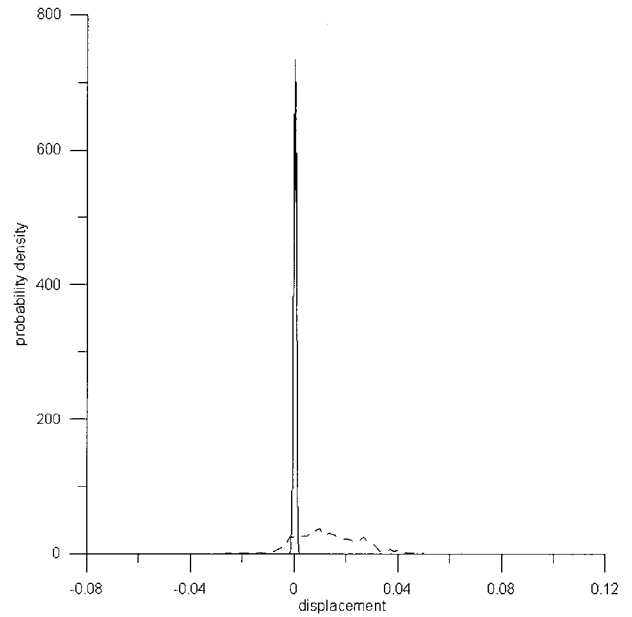


그림 4 시간별 marginal PDF의 전개 비교

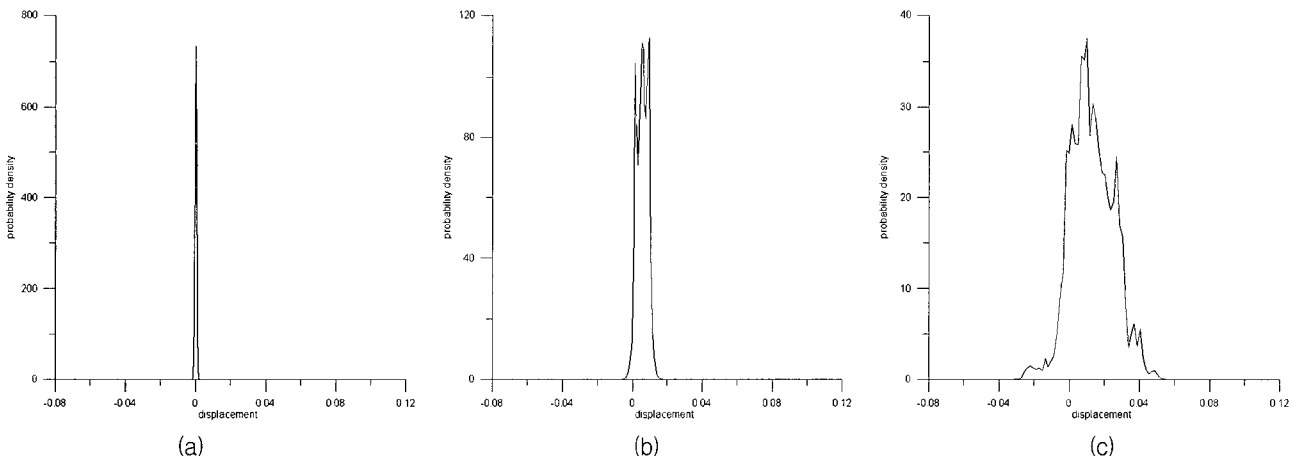


그림 3 marginal probability density functions of displacement at different sampling times: (a) t=0.1sec. (b) t=0.5sec. (c) t=1sec

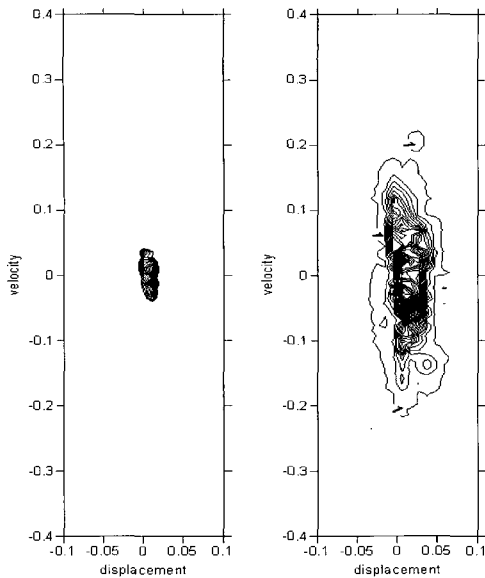


그림 5 contour map of evolution of PDF

3.2 교량운동의 범위

앞 절에서 밝힌 것처럼 본 연구에서 개발한 반해석적 방법으로부터 구한 PDF의 전개로부터 지진하중으로 인한 교량운동의 관심사인 최대값과 최소값에 대한 범위를 얻을 수 있음을 알았다. 그림 6은 PDF함수의 시간에 대한 전개로부터 매 순간마다 얻어지는 PDF의 경계로부터 얻은 결과를 나타낸 것이다. 즉 그림 6은 교량의 지진거동에 대한 PDF함수의 포락함수(envelope function)인 것이다.

그림 6에서 중앙의 실선은 하나의 지진파에 대한 응답 변위에 대한 시간이력이다. 시간이력은 매 시간에 단 하나의 값을 나타내나 PDF함수의 포락함수는 매 시간 나타날 수 있는 모든 값의 경계값을 보여 줄 수 있으며 또한 경계값은 바로 매시간 교량이 겪을 수 있는 정과 부의 최대 또는 최소값이 된다. 결과에서 볼 수 있듯이 본 연구에서 개발한 반해석적 방법은 PDF의 전개과정으로부터

교량응답거동의 최대 및 최소값에 대한 범위를 나타내는 포락함수를 구할 수 있으며 이를 바탕으로 교량에 피해를 줄 수 있는 거동에 대한 예측과 분석을 할 수 있다.

4. 결 론

본 연구에서는 지진하중으로 인한 교량의 거동분석을 추계론적이론을 근거로 한 반해석적방법을 통하여 응답거동자체가 아닌 응답거동에 대한 확률밀도함수의 전개를 구함으로써 교량거동의 확률적 특성을 파악하고자 하였다. 지진하중의 랜덤성은 추계론적 운동방정식을 구함으로써 이에 상응하는 Fokker-Planck 방정식으로부터 path-integral solution을 얻을 수 있다. 이를 이용하여 교량응답 거동에 대한 PDF의 전개를 구할 수 있었다. 본 연구로부터 얻은 결과는 다음과 같다.

1. 본 연구에서 개발한 추계론적 이론을 근거로 하여 path-integral solution을 이용한 반해석적방법은 일반적인 시간이력으로부터는 얻을 수 없는 확률밀도함수의 시간에 대한 전개를 제공한다.
2. 확률밀도함수의 시간에 대한 전개는 교량이 지진하중을 받는 동안 나타낼 수 있는 응답거동의 확률적 특성을 잘 나타낼 수 있다.
3. Monte-Carlo Simulation은 결정론적인 방법에 근거를 두고 있으며 또한 무수히 많은 양의 계산을 필요로 하나 본 연구에서 개발한 방법은 해석적 방법에 기초를 두고 있으며 이는 무한한 수의 샘플로부터 얻은 확률과정과 같은 결과를 줄 수 있다.
4. PDF의 경계를 나타내는 PDF의 포락함수는 지진으로 인한 교량거동의 최대 및 최소값의 변화를 쉽게 파악할 수 있게 한다.

본 연구에서는 많은 가정과 제한사항에서 개발한 방법을 적용하였으며, 향후 실질적인 적용을 위해서는 우선 보

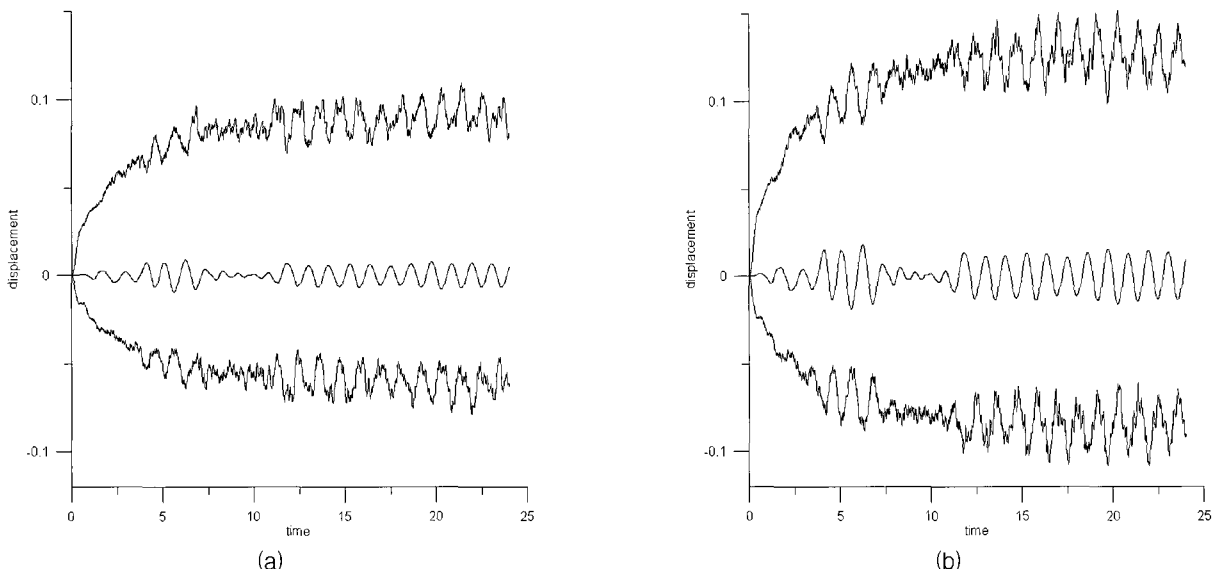


그림 6 evolution of the boundaries of the PDF for displacement: (a) PGA=0.2g, (b) PGA=0.4g

다 정확한 교량해석모형에 대한 개발이 필요하다. 방법론의 적용의 복잡성 등으로 인하여 본 연구에서는 선형 단자유도계를 이용하였으나, 향후에는 비선형성과 다자유도계에 대한 적용을 하려고 하며 또한 지진하중에 대한 spectral density로부터 직접적으로 지진하중을 표현하여 보다 더 해석적인 접근의 개발을 하고자 한다.

이 논문은 2001년도 한국학술진흥재단의 지원에 의하여 연구되었음 (KRF-2001-003-E00401)

참 고 문 헌

1. 마호성. "Fokker-Planck 방정식의 Path-Integral solution을 이용한 구분적선형시스템의 비선형동적거동 분석," 전산구조공학회, 1999, pp. 251-264.
2. Davies, H. G. and Liu, Q. "The Response Envelope Probability Density Function of a Duffing Oscillator with Random Narrow-Band Excitation," *Journal of Sound and Vibration*, 139, 1990, pp. 1-8.
3. Graham, R. "Path Integral Formulation of General Diffusion Processes," *Zeitschrift fur Physik B*, 26, 1977, pp. 281-290.
4. Haken, H. "Generalized Onsager-Machlup Function and Classes of Path Integral Solutions of the Fokker-Planck Equation and the Master Equation," *Zeitschrift fur Physik B*, 24, 1976, pp. 321-326.
5. Jung, P. and Hanggi, P. "Invariant Measure of a Driven Nonlinear Oscillator with External Noise," *Physical Review Letters*, 65(27), 1990, pp.3365-3368.
6. Mha, H.S. and Yim, S. C-S. "Stochastic Dynamics of a Piecewise-Linear Ocean System," *Proceedings of the 7th International Conference of Computing in Civil and Building Engineering (ICCCBE-VII)*, Vol. 3, 1997, pp. 1643-1648.
7. Ochi, M. K. *Applied Probability & Stochastic Processes in Engineering and Physical Sciences*, John Wiley & Sons, New York. 1990.
8. Risken, H. *The Fokker-Planck Equation*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1984.
9. Shinozuka, M. "Simulation of Multivariate and Multidimensional Random Processes," *Journal of the Acoustical Society of America*, 49, 1977, pp. 357-367.
10. Wehner, M. F. and Wolfer, W. G. "Numerical evaluation of path-integral solution to Fokker-Planck Equations," *Physical Review A*, 27(5), 1983, pp. 2663-2670.
11. Wissel, C. "Manifolds of Equivalent Path Integral Solutions of the Fokker-Planck Equation," *Zeitschrift fur Physik B*, 35, 1979, pp. 185-191.