

전단변형 및 감쇠효과를 고려한 비보존력을 받는 외팔기둥의 동적 안정성거동에 대한 매개변수연구

Parametric Study on Dynamic Stability Behaviors of Beck's Column considering Shear Deformation and Damping Effects

이 준 석* 김 남 일** 김 문 영***
Lee, Jun-Seok Kim, Nam-Il Kim, Moon-Young

국문요약

비보존력(non-conservative force)을 받는 외팔기둥의 동적 안정성 거동특성을 조사하기 위하여, 전단변형 및 감쇠효과가 고려된 Hamilton의 원리를 적용하고 무차원화 된 운동방정식 및 유한요소 정식화 과정을 제시한다. 유도된 행렬운동방정식을 이용하여 외팔보(Beck's column)의 고유치해석에 의한 정적좌굴(divergence) 및 동적좌굴하중(flutter load)을 산정하고 Newmark- β 법에 의해서 시간응답해석을 실시한다. 이러한 해석법을 이용한 매개변수연구를 통하여 전단변형 및 회전관성효과, 비보존력의 방향파라미터에 대한 임계하중의 영향, 그리고 내적 및 외적 감쇠하중의 영향이 비보존력계의 동적 안정성에 미치는 영향을 분석한다.

주요어 : 비보존력, 감쇠력, 전단변형, 정적좌굴, 동적좌굴

ABSTRACT

For a shear-deformable beam-column element subjected to non-conservative forces, equations of motion and a finite element formulation are presented applying extended Hamilton's principle. The influence of non-conservative force's direction parameter, internal and external damping forces, and shear deformation and rotary inertia effects on divergence and flutter loads of Beck's columns are intensively investigated based on element stiffness, damping and mass matrixes derived for the non-conservative system.

Key words : non-conservative force, damping force, shear deformation, divergence, flutter

1. 서 론

Beck⁽¹⁾이 비보존력(follower force)을 받는 외팔기둥의 안정성 문제에 대해 제기한 이후 수많은 논문들이 이러한 비보존력을 받는 구조물의 안정성 문제에 관해서 연구하였다. Bolotin⁽²⁾과 Leipholz⁽³⁾등은 이에 대해 정적 및 동적 안정성에 관한 많은 논문을 발표하였다. 이후 Barsoum⁽⁴⁾은 유한요소법을 이용하여 종동력을 받는 전단효과가 무시된 박벽보의 동적안정성 해석법을 제시한 바 있으며, 또한 Chen과 Ku⁽⁵⁾는 분점(partially tangential)하는 비보존력을 받는 Timoshenko 보의 안정성에 관해서 조사하였고, Irie 등⁽⁶⁾, Lee와 Yang^{(7),(8)} Takahashi와 Yoshioka⁽⁹⁾, Takahashi⁽¹⁰⁾은 전달행렬법(transfer matrix method)를 이용하여 전단변형이 고려된 보의 안정성해석을 수행하였다. 이러한 논문에서 언급하고 있는 내용은 종동력의 회전경향(sub-tangentiality)에 따른 정적 불안정 상태(divergence) 및 동적 불안정 상태(flutter) 효과에 대한 언급으로써 정적 및 동적 불안정거동을 조사하였다. 특히 김문영 등⁽¹¹⁾은 비보존력계의 정적좌굴 및

동적 불안정 상태에 대한 비보존력의 방향파라미터에 대한 임계하중의 영향, 내적 및 외적 감쇠하중, Winkler 및 Pasternak지반의 영향을 각각 조사하였지만 전단변형 및 회전관성효과는 고려하지 않았다.

본 연구에서는 김문영 등⁽¹¹⁾의 연구를 확장시켜서 비보존력계의 동적 불안정거동에 대한 전단변형 및 회전관성효과 그리고 감쇠하중효과를 조사하고자 한다. 이를 위해서 비보존력 및 감쇠력을 받는 보-기둥부재에 대한 지배방정식을 Hamilton의 원리를 이용하여 유도한다. 이때 비보존력의 방향파라미터에 대한 임계하중의 영향, 그리고 내적 및 외적 감쇠하중의 영향을 나타내는 파라미터들이 포함된다. 모든 변수 및 파라미터는 무차원화 시키고, 유한요소 정식화 과정을 거쳐 무차원화 된 운동방정식을 제시한다. 비대칭 시스템행렬에 대한 고유치해법을 적용하여 기존의 논문들의 결과와 비교하여 본 수치해법의 타당성을 입증하고 또한, 각각의 매개변수들이 비보존력계의 정적좌굴 및 동적좌굴 거동에 미치는 영향을 조사한다.

2. 전단변형 및 감쇠효과를 고려한 비보존력계의 운동방정식

일반적으로 집중 비보존력(circulatory concentrated force, P)과 재단력(f_2^p , m^p , f_2^q , m^q)을 받는 보-기둥요소의 운동에너지, 전단변형을 고려한 탄성변형에너지와 축방향력의 포텐셜을 포함하는 포텐셜에너지, 그리고 비보존력

* 성균관대학교 토목환경공학과 박사과정

** 메릴랜드대학교 박사후 연구원, 공학박사

*** 정희원·성균관대학교 토목환경공학과 정교수, 공학박사

(대표저자:kmye@skku.ac.kr)

본 논문에 대한 토의를 2006년 2월 28일까지 학회로 보내 주시면 그 결과를 게재하겠습니다.
(논문접수일 : 2005. 3. 11 / 심사종료일 : 2005. 11. 4)

이 행한 일들을 포함하는 비보존력계의 Hamilton 원리는 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ \delta(T - V) + \delta W_{NC} \} dt = 0 \quad (1)$$

여기서, T 와 V 는 각각 부재의 운동에너지, 포텐셜에너지 그리고 W_{NC} 는 비보존력이 행한일, δ 는 에너지의 변분을 나타낸다. P 가 축방향으로 $x = \eta$ 위치에 작용하는 경우에 그림 1(a)와 같이 처짐이 발생함에 따라 작용방향이 $\alpha v'(\eta)$ 만큼 회전하는 것으로 가정하면, P 의 수평 및 수직성분은 각각 P 와 $\alpha v'(\eta)P$ 로 표시된다. 여기서 α 는 작용점의 변위에 따라 작용 방향이 바뀌는 방향변화를 조절하는 파라미터이다. 결과적으로 이를 고려한 시스템의 에너지는 다음과 같이 표시된다.

$$2T = \int_0^L (\rho A \dot{v}^2 + \rho I \dot{\beta}^2) dx \quad (2a)$$

$$2V = \int_0^L [EI\beta'^2 + GA_s(v' - \beta)^2 + F(x)(v')^2] dx - 2W_{ext} \quad (2b)$$

$$\delta W_{ext} = F_2^p \delta v^p + M^p \delta \omega^p + F_2^q \delta v^q + M^q \delta \omega^q \quad (2c)$$

$$\delta W_{NC} = - \int_0^L \{ \gamma_1 \dot{v} + \gamma_2 \dot{v}'' + \alpha P v' \delta(x - \eta) \} \delta v dx \quad (2d)$$

여기서 $\rho, A, I, \gamma_1, \gamma_2, F(x), A_s, E, G$ 는 각각 요소의 밀도, 보의 단면적, 단면 2차모멘트, 외적감쇠계수, 내적감쇠계수, 요소 내 x 지점에서의 축력, 유효전단단면적, 그리고 탄성 및 전단탄성계수이다. $U_e^T = \langle v^p, \theta^p, v^q, \theta^q \rangle$ 는 절

점변위 벡터이고, $f_e^T = \langle f_2^p, m^p, f_2^q, m^q \rangle$ 는 절점력 벡터를 표시하며(그림 2 참조), $(\cdot)'$ 는 $\partial/\partial x$, $(\dot{\cdot})$ 는 $\partial/\partial t$ 를 각각 나타낸다. 또한 $F(x)$ 와 $\delta(x - \eta)$ 는 각각 축방향력과 Dirac-delta 함수를 나타낸다.

이제 식 (1)의 변분을 취하면 다음과 같이 운동방정식과 경계조건을 얻는다.

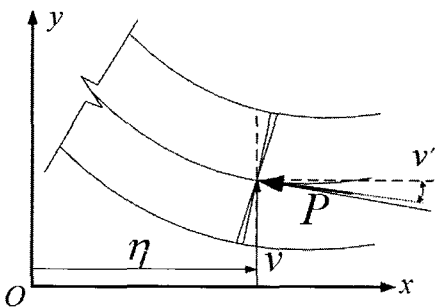
$$GA_s \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(F \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \alpha P \frac{\partial v}{\partial x} \delta(x - \eta) - \gamma_1 \frac{\partial v}{\partial t} - \gamma_2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (3a)$$

$$GA_s \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \beta \right) + EI \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - \rho I \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0 \quad (3b)$$

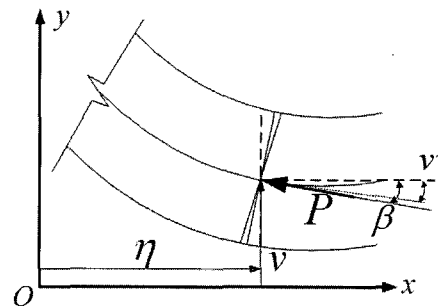
경계조건 : $\delta v^p = 0$ 또는 $-GA_s(v'(0) - \beta(0)) - F(0)v'(0) = -f_2^p$
 $\delta \omega^p = 0$ 또는 $-EI\beta'(0) = -m^p$
 $\delta v^q = 0$ 또는 $-GA_s(v'(l) - \beta(l)) - F(l)v'(l) = f_2^q$
 $\delta \beta^q = 0$ 또는 $-EI\beta'(l) = m^q$ (4)

비보존력계의 해석결과를 표시하는 수단으로 모든 변수 및 상수를 무차원화 시킨다. 이를 위해서 $v^* = v/l, \beta^* = \beta, x^* = x/l$ 로 두어 무차원화 시키고, 다시 식 3(a)와 3(b)를 EI/L 와 EI/L^2 로 각각 나누어주면 다음과 같다.

$$\frac{1}{S} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial \beta^*}{\partial x^*} \right) - \frac{\partial}{\partial x^*} \left(F^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) - \alpha P \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \delta(x^* - \eta^*) \left\} \quad (5a)$$



(a) 비보존력의 방향변화가 v' 에 의존적인 경우

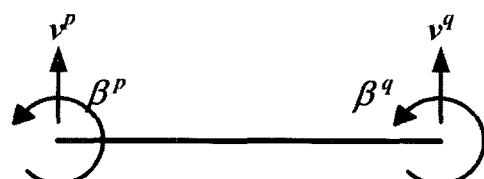


(b) 비보존력의 방향변화가 β 에 의존적인 경우

그림 1 집중 비보존력을 받는 보-기둥요소



(a) 절점력 벡터



(b) 절점변위 벡터

그림 2 보-기둥요소의 절점력 및 절점변위 벡터

$$\frac{1}{S} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \beta^* \right) + \frac{\partial^2 \beta^*}{\partial x^{*2}} - \lambda^2 \frac{\partial^2 \beta^*}{\partial t^2} = 0 \quad (5b)$$

여기서, 전단계수 파라미터 $S = \frac{EI}{GA_s l^2}$ 이며, 무차원상수의 정의는 다음과 같다.

$$F^* = \frac{F}{EI/l^2}; \quad g^* = \frac{g}{EI/l^3}; \quad \gamma_1^* = \frac{\gamma_1 l^2}{\sqrt{EI}m} \quad (6a-c)$$

$$\gamma_2^* = \frac{\gamma_2}{l^2 \sqrt{EI}m}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{I/A}}{l}; \quad t^* = \frac{\sqrt{EI/m}}{l^2} t \quad (6d-f)$$

$v^* = D(x^*) e^{At^*}$, $\beta^* = B(x^*) e^{At^*}$ 로 가정하면 식 (5)는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\frac{1}{S} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial B}{\partial x^*} \right) - \frac{\partial}{\partial x^*} \left(F^* \frac{\partial D}{\partial x^*} \right) - \alpha P^* \frac{\partial D}{\partial x^*} \delta(x^* - \eta^*) \quad (7a)$$

$$\frac{1}{S} \left(\frac{\partial D}{\partial x^*} - B \right) + \frac{\partial^2 B}{\partial x^{*2}} - \lambda^2 A^2 B = 0 \quad (7b)$$

여기서, A 는 무차원화 된 진동수이며 원진동수 ω 와 다음의 관계를 갖는다.

$$A^2 = \frac{m\omega^2}{EI/l^4} \quad (8)$$

또한, 식 (2)를 무차원화 된 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$2T^* = \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} \right)^2 + \lambda^2 \left(\frac{\partial \beta^*}{\partial t^*} \right)^2 \right\} dx^* \quad (9a)$$

$$2V^* = \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial \beta^*}{\partial x^*} \right)^2 + \frac{1}{S} \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} - \beta^* \right)^2 + F^*(x^*) \left(\frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right)^2 \right\} dx^* - 2W_{ext}^* \quad (9b)$$

$$\delta W_{NC}^* = - \int_0^1 \left\{ \gamma_1^* \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \gamma_2^* \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} \left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} \right) + \alpha P^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \delta(x^* - \eta^*) \right\} \delta v^* dx^* \quad (9c)$$

한편, 그림 1(b)에서 보는 것처럼 $x = \eta$ 위치에서 작용하는 집중 비보존력 P 가 처짐이 발생함에 따라 작용방향이 $\alpha \beta(\eta)$ 만큼 회전하는 것으로 가정할 수 있다. 이 경우 P 의 수평 및 수직성분은 각각 P 와 $\alpha \beta(\eta)P$ 로 표시된다. 따라서 이를 고려하면 무차원화된 운동방정식 (5b)와 비보존력이 행한 일에 대한 식 (9c)는 각각 다음과 같이 수정되어야 한다.

$$\frac{1}{S} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} - \frac{\partial \beta^*}{\partial x^*} \right) - \frac{\partial}{\partial x^*} \left(F^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} \right) - \alpha P \beta^* \delta(x^* - \eta^*) - \gamma_1^* \frac{\partial v^*}{\partial t^*} - \gamma_2^* \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} \left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} \right) - \frac{\partial^2 v^*}{\partial t^{*2}} = 0 \quad (10a)$$

$$\delta W_{NC}^* = - \int_0^1 \left\{ \gamma_1^* \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \gamma_2^* \frac{\partial^4}{\partial x^{*4}} \left(\frac{\partial v^*}{\partial t^*} \right) + \alpha P \beta^* \delta(x^* - \eta^*) \right\} \delta v^* dx \quad (10b)$$

3. 비보존력계의 동적 유한요소해석 정식화

이제 평면뼈대요소의 요소행렬들을 산정하기 무차원화된 요소길이를 ξ , 요소내 임의점의 위치를 $\hat{x} = x/l_e$ 라 두면 3차 Hermitian 다항식에 대한 요소 단면의 수직 및 회전 변위는 다음과 같다.

$$v^*(\hat{x}) = h_1 v^p + h_2 \beta^p + h_3 v^q + h_4 \beta^q \quad (11a-b)$$

$$\beta^*(\hat{x}) = n_1 v^p + n_2 \beta^p + n_3 v^q + n_4 \beta^q$$

여기서, $v^p = v^*(0)$, $\beta^p = \beta^*(0)$, $v^q = v^*(\xi)$, $\beta^q = \beta^*(\xi)$ 이고, 전단변형을 고려한 형상함수는 각각 다음과 같다.

$$h_1 = \frac{2\hat{x}^3 - 3\hat{x}^2 - 12S\hat{x} + T}{T}, \quad h_2 = \frac{\hat{x}^3 - 2(1+3S)\hat{x}^2 + (1+6S)\hat{x}}{T}$$

$$h_3 = \frac{-2\hat{x}^3 + 3\hat{x}^2 + 12S\hat{x}}{T}, \quad h_4 = \frac{\hat{x}^3 - (1-6S)\hat{x}^2 - 6S\hat{x}}{T}$$

$$n_1 = \frac{6\hat{x}^2 - 6\hat{x}}{T}, \quad n_2 = \frac{3\hat{x}^2 - 4(1+3S)\hat{x} + 1 + 12S}{T}$$

$$n_3 = \frac{-6\hat{x}^2 + 6\hat{x}}{T}, \quad n_4 = \frac{3\hat{x}^2 - 2(1-6S)\hat{x}}{T} \quad (12g-h)$$

여기서, $T = 1 + 12S$ 이다. 식 (11)을 식 (1)에 대입하여 적분을 행하고 Hamilton의 원리를 적용하여 좌표변환을 행하면 다음과 같이 전체좌표계에 대한 행렬식으로 표현되는 운동방정식을 얻는다.

$$M_e \ddot{U}_e + C_e \dot{U}_e + [K_e + F^* K_g - \alpha P^* K^{nc}] U_e = f_e \quad (13a)$$

여기서

$$M_e = M_t + M_r \quad (13b)$$

$$C_e = \gamma_1^* M_t + \gamma_2^* K_e \quad (13c)$$

이 때 M_e , C_e , K_e , K_g , K^{nc} 는 각각 보-기둥요소의 병진관성질량행렬 M_t 와 회전관성질량행렬 M_r 로 구성되는 질량행렬(식 13b), 감쇠행렬, 탄성강도, 기하적인 강도행렬, 그리고 비보존력의 방향변화로 인한 하중보정강성행렬 (Load Correction Stiffness Matrix, LCSM)을 나타내며, U_e , \dot{U}_e , \ddot{U}_e , F_e 는 각각 절점변위, 절점속도, 절점가속도, 절점하중벡터를 나타낸다. 특히 감쇠행렬 C_e 는 질량행렬과 탄성강도행렬의 일차결합으로 나타낼 수 있다.(식 13c 참조) 자세한 행렬의 유도결과는 부록에 수록하였다. 특히 비보존력의 방향변화로 인한 하중보정강성행렬은 작용점이 보-기둥요소의 q 단($\eta = l_e$)에 작용하는 경우에 결과 식을 제시한 것이며 비보존력의 수직성분이 $v'(l_e)P$ 인

경우는 K^{nc1} , $\beta(l_c)P$ 인 경우는 K^{nc2} 로 각각 표시하였다. 이제 직접강도법을 적용하면 다음과 같이 전체 시스템에 대한 운동방정식을 얻는다.

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + [K_E + F^*K_G - \alpha P^*K^{NC}]U = 0 \quad (14)$$

4. 비보존력을 받는 보-기둥 구조의 정적 및 동적 안정성 해석법

비보존력계의 안정성은 정적 불안정 상태와 동적 불안정 상태로 나눌 수 있다. 정적인 불안정 평형상태가 존재하는 경우에 절점 속도 및 가속도 벡터가 영이므로 관성력을 무시한 평형방정식의 고유치해석을 통하여 정적좌굴 상태의 임계하중을 결정할 수 있다. 또한 동적불안정 상태의 임계하중은 관성력 및 감쇠하중을 고려한 이중 고유치곡선을 분석하여 구할 수 있다. 이와같이 감쇠하중을 고려하지 않는 경우와 감쇠하중을 고려한 경우에 대한 이중고유치는 각각 식 (15)와 (16)으로 나타낼수 있다.(김문영 (11))

$$[K_E - F^*(K_G - K^{NC})]H = \Lambda^2 M H \quad (15)$$

$$\bar{\Lambda} A D = B D \quad (16)$$

여기서, $A = \begin{bmatrix} M O \\ O M \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} O & M \\ -K_E + F^*(K_G - K^{NC}) & -C \end{bmatrix}$
 $U = e^{\bar{\Lambda}t} Q$, $V = e^{\bar{\Lambda}t} \hat{Q}$, $D = \{Q, \hat{Q}\}$, $\Lambda = i\bar{\Lambda}$

이중고유치문제- Λ^2 과 F^* 에 관한 문제-를 분석함으로써 정적좌굴하중 및 동적좌굴하중을 구할 수 있으며 일반적으로 고유치 곡선은 특성에 따라 그림 3과 같이 통상 세 가지 유형으로 나눌 수 있다. 즉, 정적좌굴에 의해서만 좌굴이 발생하는 경우, 동적좌굴에 의해서만 불안정성(instability)이 발생하는 경우, 그리고 처음에는 정적좌굴 현상 그리고 나서 더 높은 하중에서 동적좌굴로 인하여 불안정성이 야기되는 경우를 말하며, 본 연구에서는 이 세가지 경우를 각각 divergence system(DS), flutter system(FS), 그리고 divergence-flutter system(DFS)으로 표시하기로 한다.

한편 Newmark 방법을 이용한 비보존력계의 시간이력 해석을 적용하여 동적 안정성 해석이 가능하다. 일반적으로 flutter load보다 큰 비보존력을 작용시켜서 동적응답을 구하면, $Ce^{\mu t} \cos(\eta + \phi)$ 형태로 진폭이 폭발적으로 증가하면서 진동하는 특성을 보인다. 이때 작용 비보존력의 크기에 대응하는 복소수 원진동수 ($\Lambda = \mu \pm \eta i$)를 산정하면, 동적응답에 의한 변위진폭에 해당하는 점근선은 원진동수의 양의 실수값에 지배되어 $Ce^{\mu t}$ 로 표시할 수 있다.

5. 수치계산결과

3장 및 4장에서 제시한 매트릭스 운동방정식 및 해법을 이용하여 보존력 및 비보존력을 받는 전단변형이 고려된 여러 가지 평면뿔대 구조물의 정적좌굴하중과 동적좌굴하중들을 산정한 결과들과 해석해 또는 문헌의 결과들이 서로 거의 일치하는 것을 확인할 수 있었다. 5.1절에서는 비보존력의 방향파라미터 α 의 대한 임계하중에 대한 영향, 5.2절에서는 내적 및 외적 감쇠계수의 영향에 의한 외팔기둥의 동적좌굴 임계하중에 대한 영향, 그리고 5.3절에서는 Newmark 수치적분법을 적용한 비보존력 하에서의 구조물의 시간에 따른 응답을 각각 조사하였다.

5.1 전단변형효과를 고려한 방향파라미터 α 의 임계하중에 대한 영향

그림 4는 회전관성 효과를 나타내는 λ 값이 매우 작아 무시할 수 있으며 외팔기둥의 자유단에 집중 비보존력이 작용하는 경우(Beck의 기둥)에 α 와 S 를 변화시키면서 비보존력의 크기에 따른 고유진동수의 변화를 보여주는 이중고유치($F^* - \Lambda^2$) 곡선을 나타낸 것이다. 여기서 α 가 0인 경우에는 작용하중의 방향변화가 없기 때문에 보존력에 해당하고 α 가 1이면 단면이 회전함에 따라 접선 방향으로 접선의 기울기 v' 에 해당하는 양만큼 방향이 회전하는 비보존력에 대응한다. 그림에서 보는 바와 같이 α 값의 변화에 따라 DS, FS, FS이 다양한 형태로 발생하며 이에 따른 첫 번째, 두 번째 정적좌굴하중 F_{d1}^* , F_{d2}^* 와 동적좌굴하중 F_{f1}^* , F_{f2}^* 등을 산정할 수 있다.

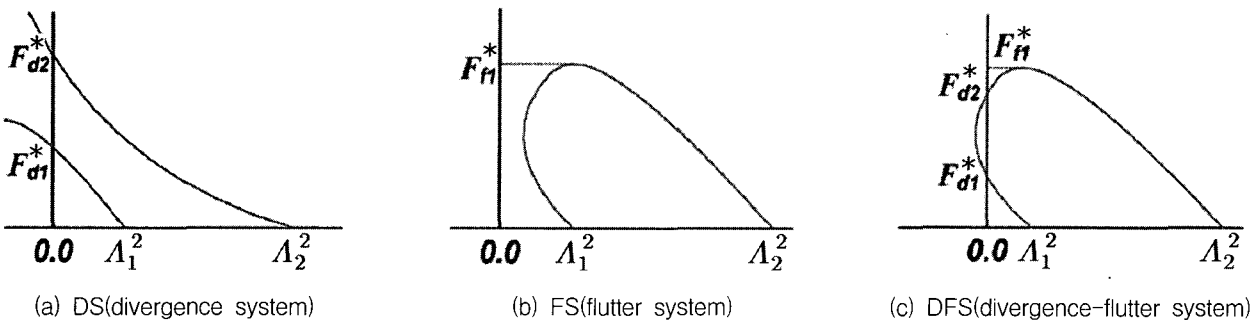


그림 3 이중고유치곡선의 유형에 따른 시스템의 분류

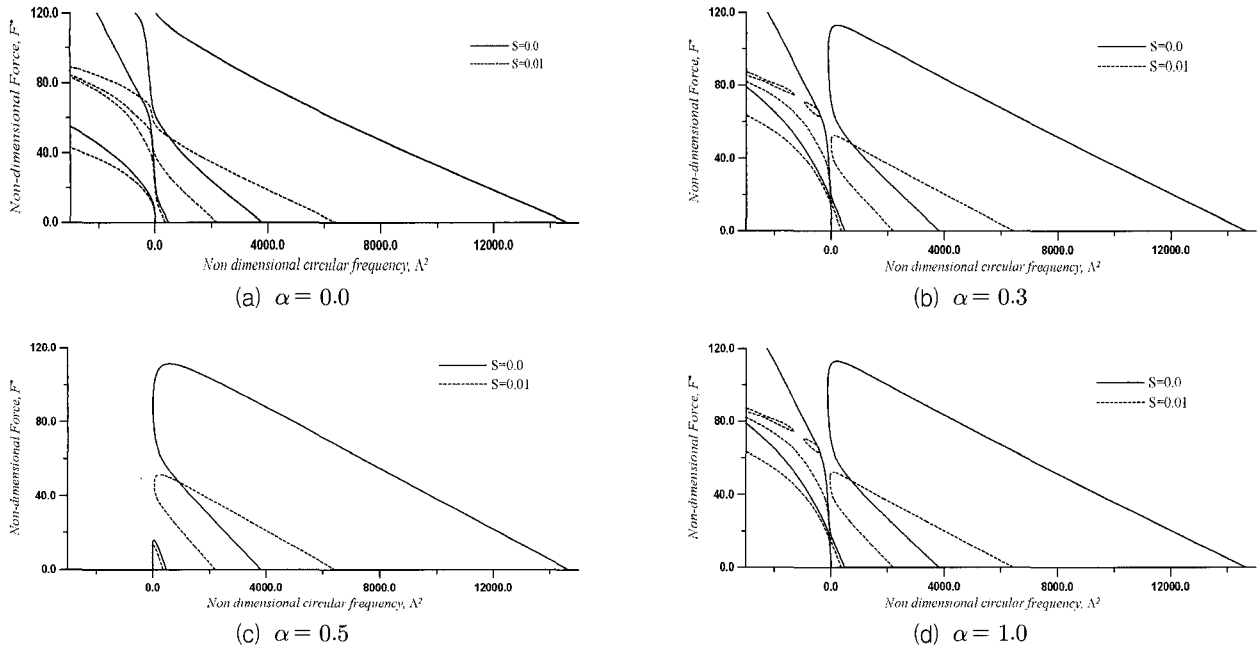
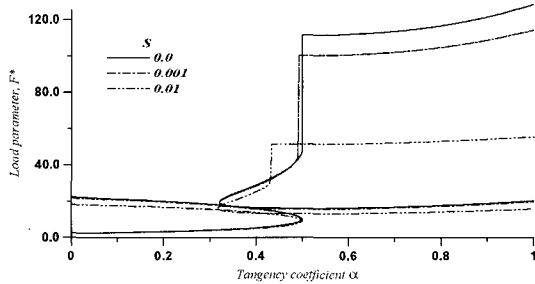
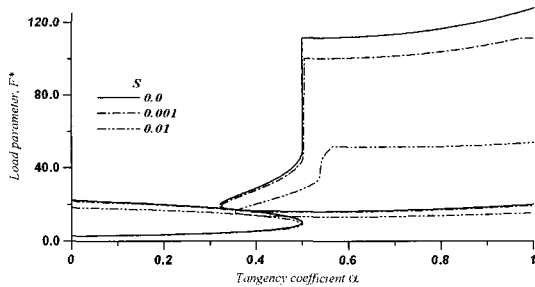


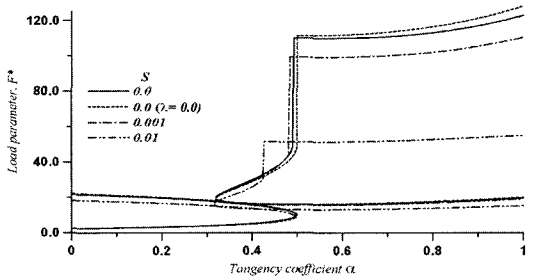
그림 4 Beck의 기둥의 이중 고유치 곡선($\lambda \approx 0.0$)



(a) 회전관성 λ 값이 영이고 비보존력의 방향변화가 처짐각 v' 에 의존하는 경우



(b) 회전관성 λ 값이 영이고 비보존력의 방향변화가 단면회전각 β 에 의존하는 경우



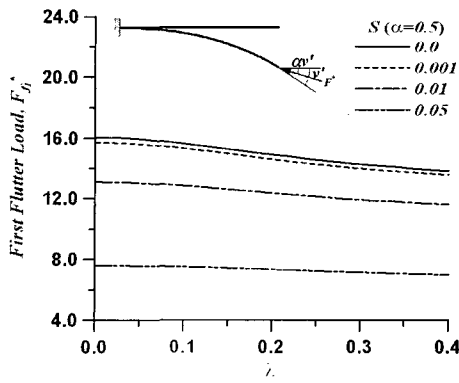
(c) 회전관성 λ 값이 0.05이고 비보존력의 방향변화가 처짐각 v' 에 의존하는 경우

그림 5 Beck의 기둥의 안정곡선

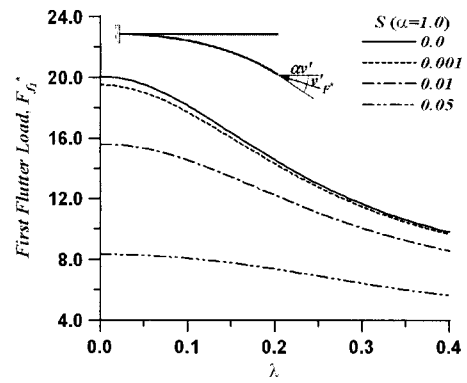
그림 4의 고유치곡선을 분석하여 F_{d1}^* , F_{d2}^* , F_{f1}^* , F_{f2}^* 값들을 산정할 수 있고, 이들에 대한 방향변화 파라미터 α 값의 변화를 나타낸 것을 비보존력계의 안정곡선(stability curve)으로 부르기로 한다.

한편 그림 5는 α 가 0에서 1.0까지 변함에 따라 전단변형 및 회전관성효과의 영향을 고려한 외팔기둥의 안정곡선을 나타낸 것이다. 이때 비보존력의 방향이 v' 또는 β 에 따라 변화하는 경우의 영향을 함께 조사하였다. 동적좌굴하중의 방향변화가 v' 에 의존하고 λ 가 영인 경우에 DS는 0.0~0.5 사이에서 발생하고 0.5 이후에는 FS이 된다. 또한, DFS는 S가 0.0의 경우 α 가 0.322에서 시작되며, S가 0.001의 경우 0.321, S가 0.01일 경우 0.318에서 발생하였다. 반면에 λ 가 영이고 β 에 의존하여 방향변화를 일으킬 경우는 S가 0.0일 경우 α 가 0.322로 동일하나, 0.001일 경우 0.325에서 시작하며, 0.01일 경우 0.355로 증가하였다.

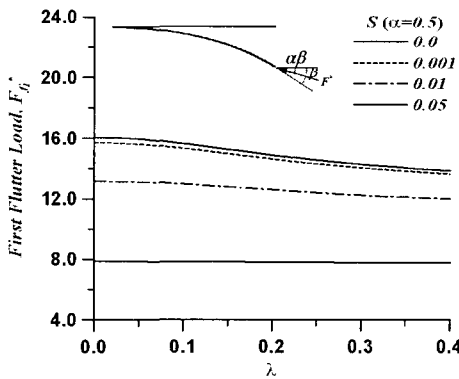
회전관성 효과로 인한 F_{f1}^* , F_{f2}^* 의 변화를 보다 자세히 조사하기 위하여, 그림 6에 α 가 0.5 및 1.0인 경우에 비보존력의 방향변화가 v' 또는 β 에 의존하는 외팔기둥의 $\lambda - F_{f1}^*$ 곡선을 나타내었다. 그림으로부터 알 수 있듯이 λ 가 커질수록 F_{f1}^* 가 일정한 값에 수렴하고 있는 것을 확인할 수 있다. 이때 F_{f1}^* 의 경우 v' 및 β 를 고려할 경우 거의 비슷한 값을 보이고 있으나, F_{f2}^* 의 경우 동일한 λ 에 대해 α 가 0.5, $S=0.01$ 일 때 방향변화가 β 에 의존적일 경우 동적좌굴하중의 점프현상이 발견되고, 같은 α 에 대해서 $S=0.05$ 일 때도 비슷한 점프현상이 발견된다. 이는 그림 4와 5에서 나타나는 2차 동적좌굴하중의 점프현상에 기인하는 것으로 판명된다.



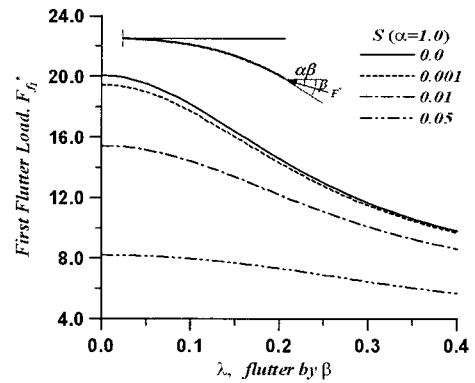
(a) $\alpha = 0.5$ 이고 비보존력의 방향변화가 v' 에 의존하는 외팔기둥의 $\lambda - F_{f1}^*$ 곡선



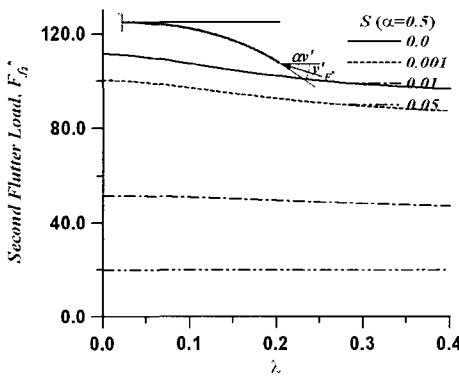
(b) $\alpha = 1.0$ 이고 비보존력의 방향변화가 v' 에 의존하는 외팔기둥의 $\lambda - F_{f1}^*$ 곡선



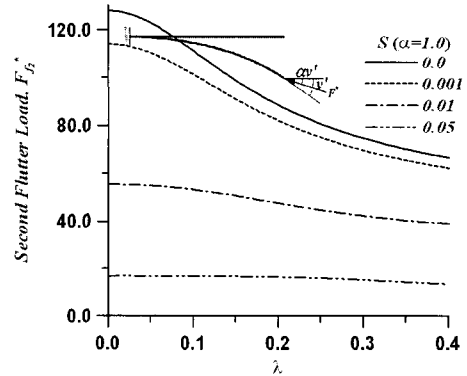
(c) $\alpha = 0.5$ 이고 비보존력의 방향변화가 β 에 의존하는 외팔기둥의 $\lambda - F_{f1}^*$ 곡선



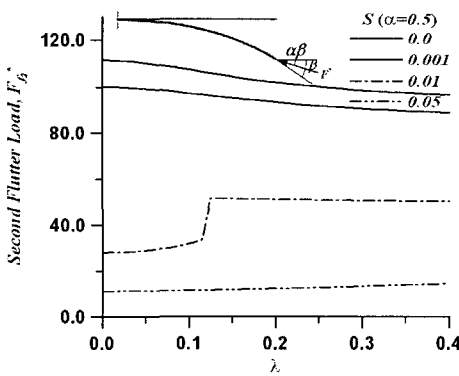
(d) $\alpha = 1.0$ 이고 비보존력의 방향변화가 β 에 의존하는 외팔기둥의 $\lambda - F_{f1}^*$ 곡선



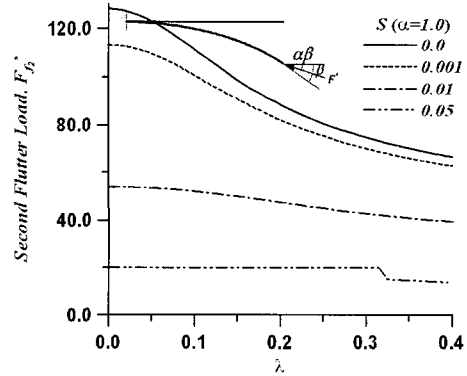
(e) $\alpha = 0.5$ 이고 비보존력의 방향변화가 v' 에 의존하는 외팔기둥의 $\lambda - F_{f2}^*$ 곡선



(f) $\alpha = 1.0$ 이고 비보존력의 방향변화가 v' 에 의존하는 외팔기둥의 $\lambda - F_{f2}^*$ 곡선



(g) $\alpha = 0.5$ 이고 비보존력의 방향변화가 β 에 의존하는 외팔기둥의 $\lambda - F_{f2}^*$ 곡선



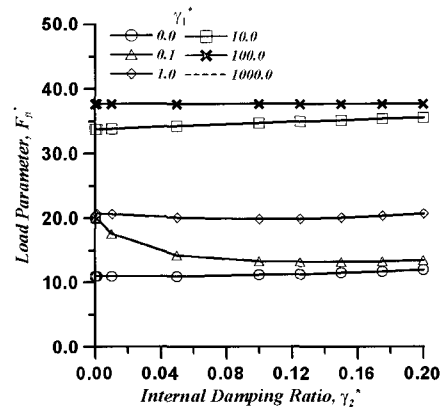
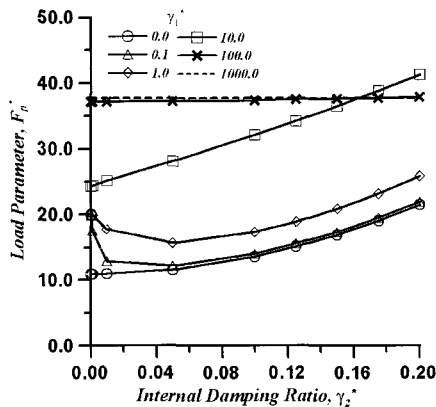
(h) $\alpha = 1.0$ 이고 비보존력의 방향변화가 β 에 의존하는 외팔기둥의 $\lambda - F_{f2}^*$ 곡선

그림 6 회전관성효과 λ 의 변화에 따른 외팔기둥의 첫 번째, 두 번째 동적좌굴하중

5.2 동적좌굴하중에 대한 감쇠계수의 영향

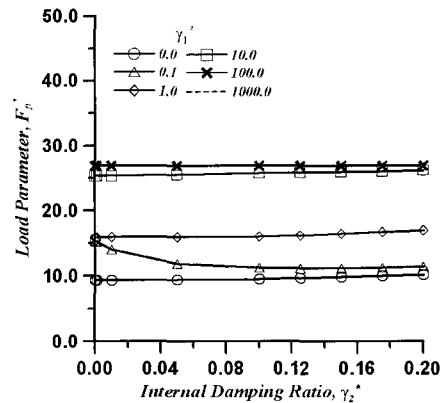
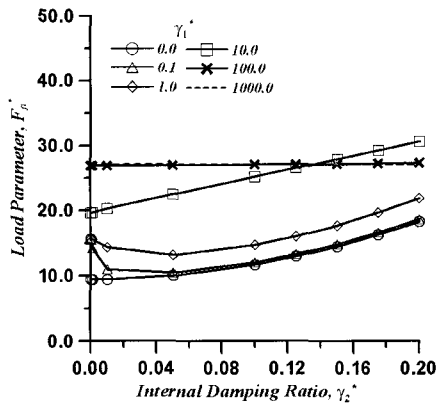
외팔기둥의 내적 및 외적 감쇠효과를 알아보기 위해서 접선계수 α 가 1.0인 경우에 대해서 동적좌굴하중을 산정한 결과를 그래프로 나타내었다(그림 7). 여기서 그림 7(a), (c), (d)는 각각 회전관성 효과를 나타내는 λ 가 영일 때의 동적좌굴하중을 계산한 것이며, 이때 그림 7(a)는 전단이 무시되었을 경우 비보존력에 대한 파라미터 α 의 방향변화를 v' 에 대해서 도시한 것이다. 그림 7(b)는 이때 전단변형효과를 $S=0.01$ 만큼 고려한 상태에서 나타낸 것이다. 미소한 내적감쇠효과에 의해서 동적좌굴하중이 급격히 감소하나, 다시 내적감쇠효과가 커질수록 동적좌굴하중의 값이 커진다는 것을 확인하였으며, 외적감쇠효과가 클

수록 동적좌굴하중이 커지나 외적감쇠효과가 무한히 커지면(여기서는 무차원화된 외적감쇠계수 1000) 동적좌굴하중이 일정한 값에 수렴함을 알 수 있다. 그림 7(b), 7(d), 7(f)는 $\lambda=0.05$ 에서 그림 7(a), 7(c), 7(e)와 동일한 조건 하에서 나타낸 것이다. 그림으로부터 알 수 있듯이 λ 가 작을수록 동적좌굴하중에 대한 내적감쇠계수의 영향이 줄어들어 알 수 있으며, 전단변형효과가 고려됨으로써 동적좌굴하중이 줄어들어 알 수 있다. 한편 비보존력 계수 α 의 영향이 전단변형효과를 고려할 경우의 순수휨 β 에 대한 방향변화와 v' 에 의한 방향변화를 고려하였을 때 두 경우 모두 비슷한 값을 보였으며, 전단변형효과를 고려하지 않을 경우에도 같은 양상을 나타냈다.



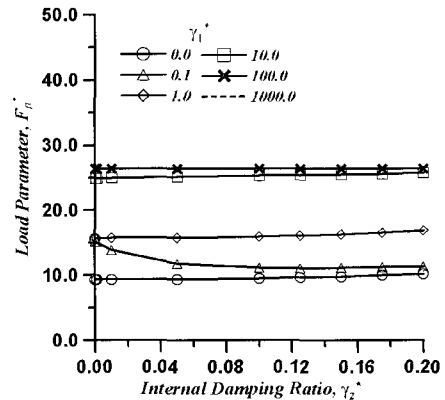
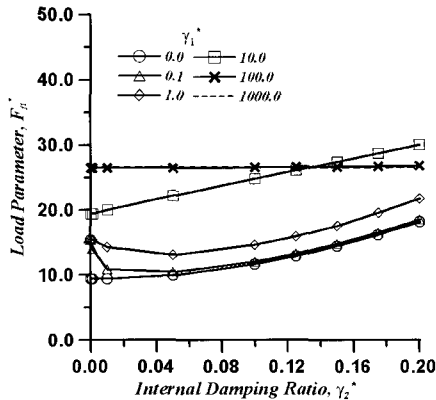
(a) $S=0.0$, $\lambda=0.0$ 의 경우 비보존력의 방향변화 v' 을 고려한 경우

(b) $S=0.0$, $\lambda=0.05$ 의 경우 비보존력의 방향변화 v' 을 고려한 경우



(c) $S=0.01$, $\lambda=0.0$ 의 경우 비보존력의 방향변화 v' 을 고려한 경우

(d) $S=0.01$, $\lambda=0.05$ 의 경우 비보존력의 방향변화 v' 을 고려한 경우



(e) $S=0.01$, $\lambda=0.0$ 의 경우 비보존력의 방향변화 β 를 고려한 경우

(f) $S=0.01$, $\lambda=0.05$ 의 경우 비보존력의 방향변화 β 를 고려한 경우

그림 7 외팔기둥의 내적 및 외적 감쇠계수의 영향($\alpha=1.0$)

5.3 시간응답분석

4.2절에서 언급했듯이 원진동수 Λ 를 분석하여 구조물의 선형동적응답을 예측할 수 있다. 그림 8은 $\lambda=0.0$ 이고 $S=0.0$ 일 경우의 F^* 의 증가에 따라 Λ 의 실수부 및 허수부를 FS구간의 α 값에 대하여 각각 도시한 것이다. $\alpha=0.5$ 일 경우 그림 8(a), (b)를 분석하면 종동력을 받는 외팔기둥이 정적좌굴에 의해 좌굴이 발생하기 전까지 진동수가 차츰 감소하여 좌굴발생시점에서 진동수가 영이 되어 좌굴이 발생하는 것을 알 수 있다. 이후 정적좌굴하중을 초과하는 하중이 구조물에 가해지게 되면 구조물의 진동수가 증가하게 되고 일정한 값에 도달($F^*=16.06$)하면 허수부의 값이 갑자기 발생하게 되어 동적좌굴현상이 나타나며 이때 구조물은 진동수 7.055를 가지게 된다. $\alpha=0.5$ 이후의 현상에서는 그림 8(a)를 보면 알 수 있듯이 정적좌굴현상이 발생하지 않으며 단지 동적좌굴현상만이 관측될 뿐이다. 이는 외팔기둥의 안정곡선을 분석할 때와 동일한 결과를 얻으며, 이중 그림 8(b)는 동적좌굴하중 이후의 값에 의해 λ 의 허수부에 대응되는 하중 증폭양상을 나타내고 있다.

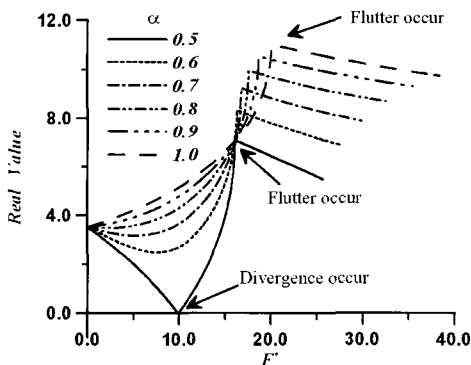
한편 그림 8(c), (d)는 $S=0.01$ 일 때 α 의 변화에 대응하여 복소수 원진동수와 하중과의 관계를 분석한 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 동적좌굴 발생 시점이 전단변형이 무시된 경우에 비해 줄어들었으며, 구조물의 진동수도 줄어든 것을 확인 할 수 있다.

지금까지 복소수 원진동수 Λ 의 실수부와 허수부에 대한 분석을 진행하였으며, 이는 비보존력을 받는 구조물의 안정성을 파악하는데 매우 중요한 역할을 함을 알 수 있다. 앞서 구한 복소수 원진동수가 실제 외팔기둥의 시간에 대한 응답에 미치는 영향을 시간응답을 통해 분석하기로 한다. 이를 위해서 표 1은 $\Lambda-F_{fl}^*$ 와 α 의 관계를 $S=0.0$ 인 경우와 $S=0.0001$ 인 경우에 대해 비교한 것이다.

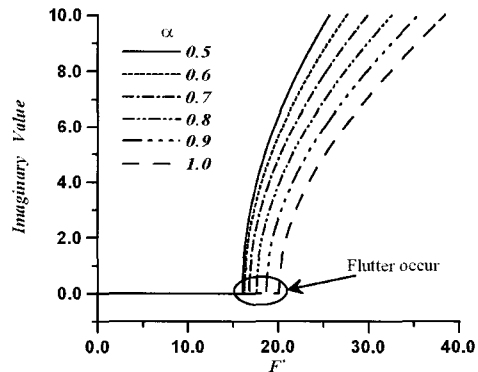
표 1. Tangency 계수의 영향에 의한 구조물의 임계하중 및 진동수의 관계($K^{NC} = K^{NC1}$)

α	$S=0.0$		$S=0.0001$	
	F_{fl}^*	Λ	F_{fl}^*	Λ
0.5	16.054	7.055±0.0951i	16.017	7.045±0.0472i
0.6	16.260	8.335±0.0525i	16.222	8.321±0.0392i
0.7	16.789	9.238±0.0740i	16.748	9.2233±0.0458i
0.8	17.591	9.947±0.0758i	17.546	9.930±0.0538i
0.9	18.670	10.530±0.0534i	18.620	10.511±0.0695i
1.0	20.053	11.016±0.0560i	19.994	10.995±0.0467i

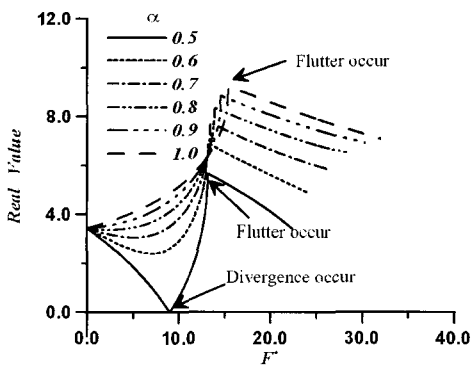
시간응답분석을 위해서 본 절에서 취급하는 모든 예제들의 초기조건은 정지 상태이며, 횡방향의 미소한 초기하중은 축방향력의 1/1000의 크기로 자유단에 0.001동안 작용시켰으며, 수치적분 시간간격은 0.001을 적용하였다. 그림 9는 α 와 미소한 전단변형효과인 $S=0.0001$ 에 대한



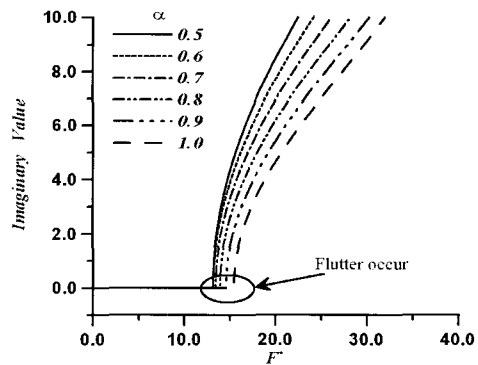
(a) Λ 의 실수부의 변화 ($S=0.0$)



(b) Λ 의 허수부의 변화 ($S=0.0$)



(c) Λ 의 실수부의 변화 ($S=0.01$)



(d) Λ 의 허수부의 변화 ($S=0.01$)

그림 8 α 의 변화에 따른 구조물의 복소수 원진동수 Λ 와 하중과의 관계($K^{NC} = K^{NC1}$)

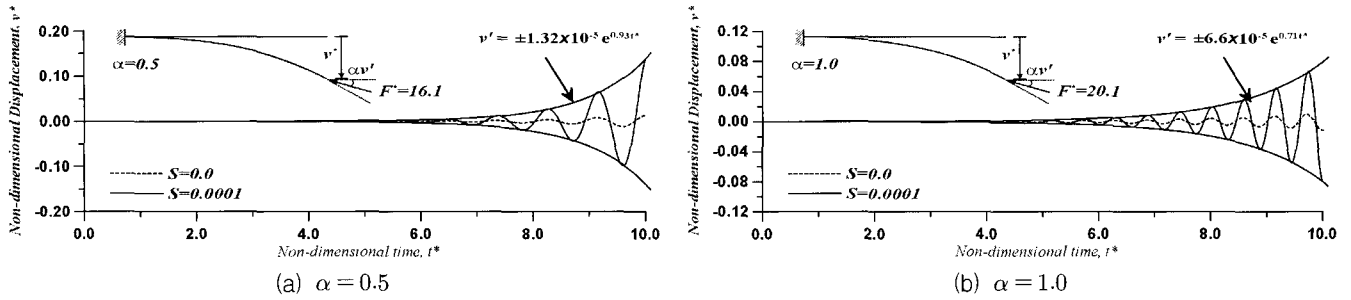


그림 9 α의 영향에 의한 외팔기둥의 동적응답($K^{NC} = K^{NC1}$)

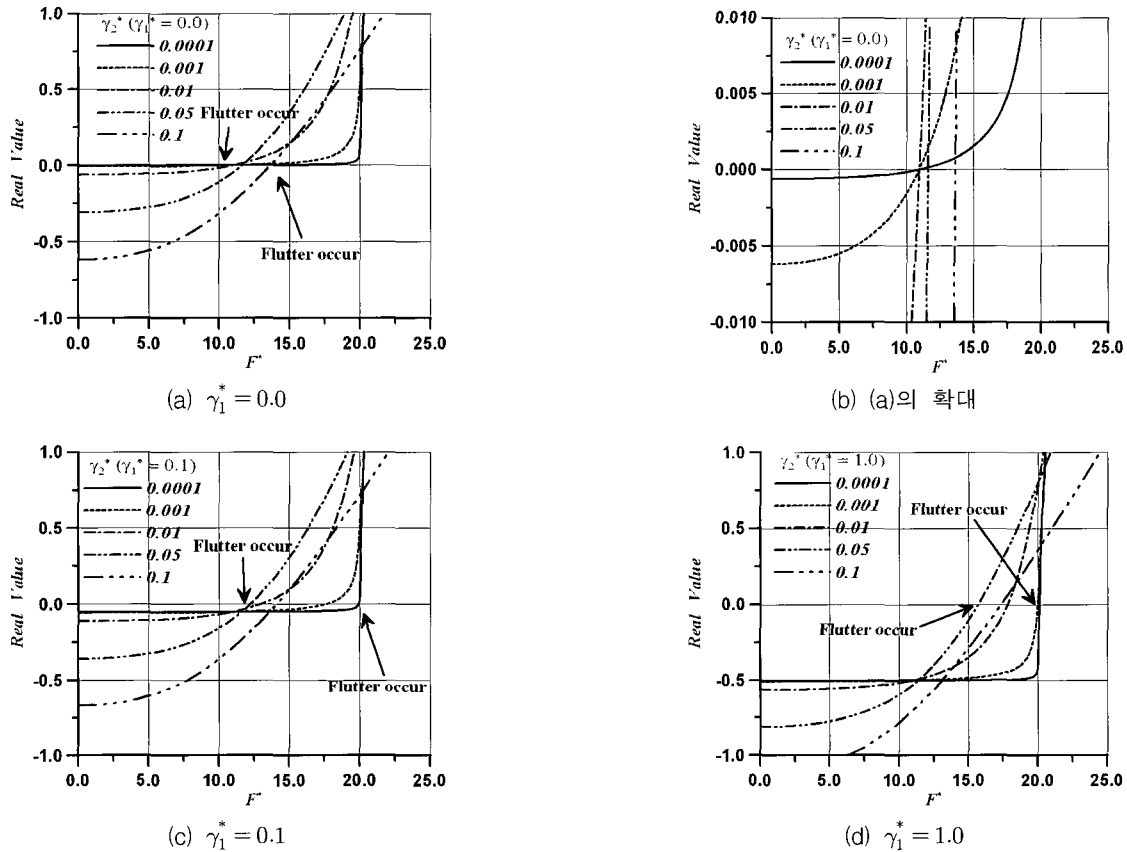


그림 10 내적 및 외적 감쇠계수에 의한 λ의 실수부의 변화($\alpha = 1.0, \lambda = 0.0, K^{NC} = K^{NC1}$)

외팔기둥의 시간에 따른 외팔보 끝단의 수직변위를 분석하기 위해 $\lambda = 0.0$ 일 때의 시간응답 결과이다. 그림으로부터 알 수 있듯이 표 1에서 보여주는 임계하중 F_{cr}^* 을 초과하는 미소한 하중에서 구조물의 진폭이 상당한 값으로 변한다는 것을 확인 할 수 있으며, 그림 8(a)에서 확인하였던 것과 같이 $\alpha = 0.5$ 보다 $\alpha = 1.0$ 에서의 구조물의 응답주기가 더 짧다는 것을 알 수 있다.

감쇠효과를 포함한 구조물의 하중증폭양상은 Ce^{At} 이다. 그림 9는 λ 가 0.0이며 α 가 1.0일 때 복소수 원진동수의 실수부를 하중을 증가시키면서 내적감쇠계수와 외적감쇠계수에 대해 나타낸 것이다. 복소수 원진동수인 λ 의 실수부가 영점을 통과할 때 동적좌굴이 발생한다. 이때 미소한 내적감쇠계수에 의해 λ 에 변화가 발생하여 그림 10(a)를 확대한 그림 10(b)에서 살펴보면 F_{cr}^* 가 내적감쇠효과가 없을 경우 20.053에서 10.94로 급격히 떨어짐을 알 수 있

으며, 내적감쇠계수가 커질수록 a 의 변화가 더욱 크게 발생하며 F_{cr}^* 의 위치도 이에 따라 변하는 것을 알 수 있다. 즉, 내적감쇠효과가 작을 경우 구조물은 weakly unstable 상태에 있다고 말할 수 있으며, 이는 앞에서 설명한 바와 같다. 또한 외적감쇠계수가 구조물에 포함될 경우 그림 10(c), (d)와 같이 전체적으로 곡선이 y축 밑으로 내려감을 알 수 있다. 즉, 외적감쇠계수도 내적감쇠계수와 마찬가지로 구조물의 동적 안정성에 영향을 미치는 인자임이 확인된다.

이러한 결과를 Newmark 수치해석을 수행한 결과가 그림 11, 12(내적감쇠효과) 및 그림 13(외적감쇠효과)이다. 전단변형효과를 고려하지 않은 그림 11(a)에서 구조물은 초기하중으로 인해 진폭의 증가현상이 발생하고, 이는 다시 내적감쇠계수의 영향으로 줄어들게 되나 시간이 지남에 따라 동적좌굴 현상이 미소하게나마 조금씩 증가한다.

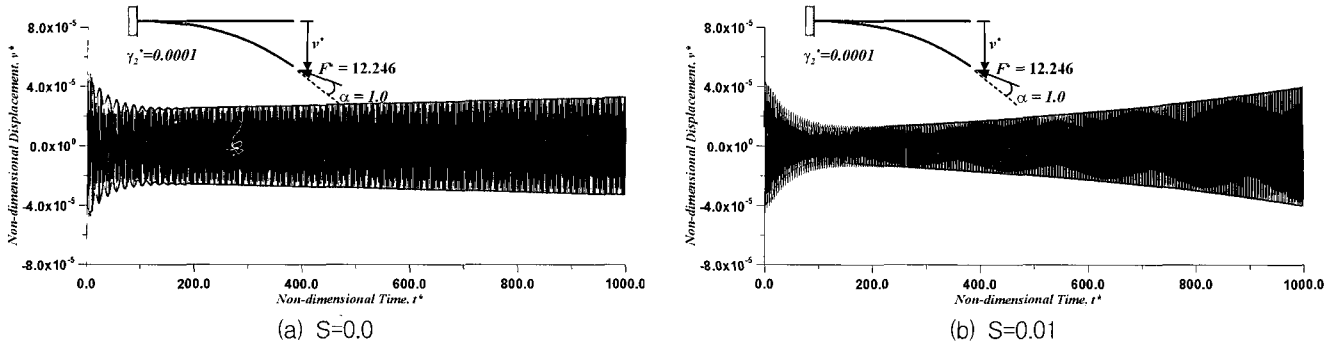


그림 11 미소한 내적감쇠계수에서의 외팔기둥의 동적응답($\alpha = 1.0, \gamma_1^* = 0.0, K^{NC} = K^{NC1}$)

전단변형효과($S=0.01$)가 고려되었을 경우 시간이 지남에 따라 조금 더 큰 진폭변화 양상을 보인다.

한편 그림 10으로부터 알 수 있듯이 미소한 내적감쇠효과에서도 충분한 크기의 하중은 외팔보 끝단의 폭발적인 변위증폭을 일으킨다. 이에 $F^* = 20.1$ 에서 전단변형효과와 내적감쇠계수에 의한 시간응답을 분석하여 그림 12에 나타냈다. 그림으로부터 알 수 있듯이 내적감쇠효과가 작은 구조물에서는 구조물의 진폭에 전단변형효과가 미치는 영향이 크지만, 내적감쇠효과가 증가할수록 전단변형효과의 영향이 줄어든다는 것을 확인하였다.

그림 13은 외적감쇠하중의 영향에 대한 Beck 기둥의 시간에 대한 끝단의 변위를 도시한 것이다. 그림 13(a)는 $\gamma_1 = 0.1$, 그림 13(b)는 $\gamma_1^* = 1.0$ 인 경우로써 각각 $t^* = 10.0$ 일 때 외팔보 끝단의 변위 v^* 가 2.0×10^5 와 3.0×10^3 을 나타내며, 이는 외적감쇠계수의 값이 커짐에 따라 진폭이 작아지고 구조물의 안정성을 증가시키는 것을 보여준다. 또한, 내적감쇠효과가 클수록 전단변형효과에 의해 구조물의 진폭이 작아지는데 반해 그림 13(a-b)는 외적감쇠계수가 전단변형효과에 영향을 상대적으로 적게 미치고 있음을 보여주고 있다.

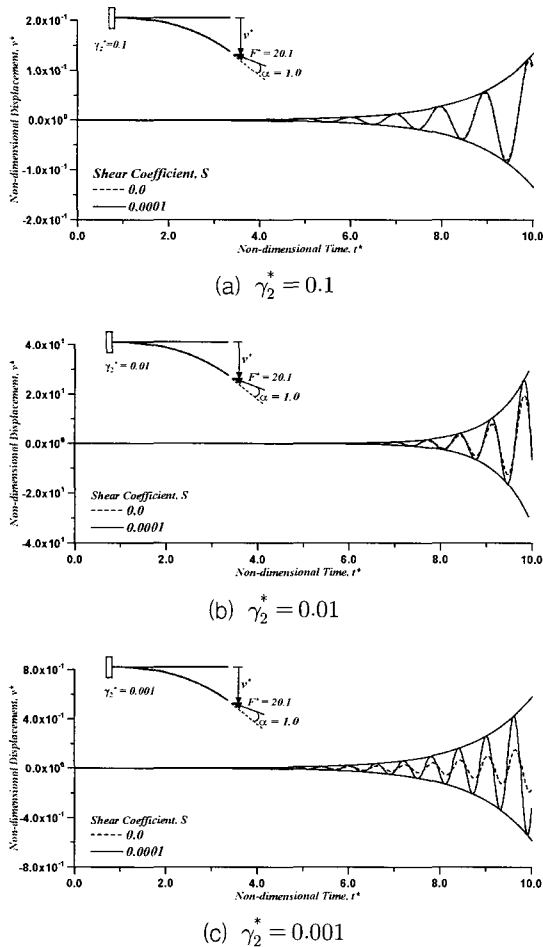


그림 12 내적감쇠계수의 변화에 외팔기둥의($\alpha = 1.0, \gamma_1^* = 0.0, K^{NC} = K^{NC1}$)

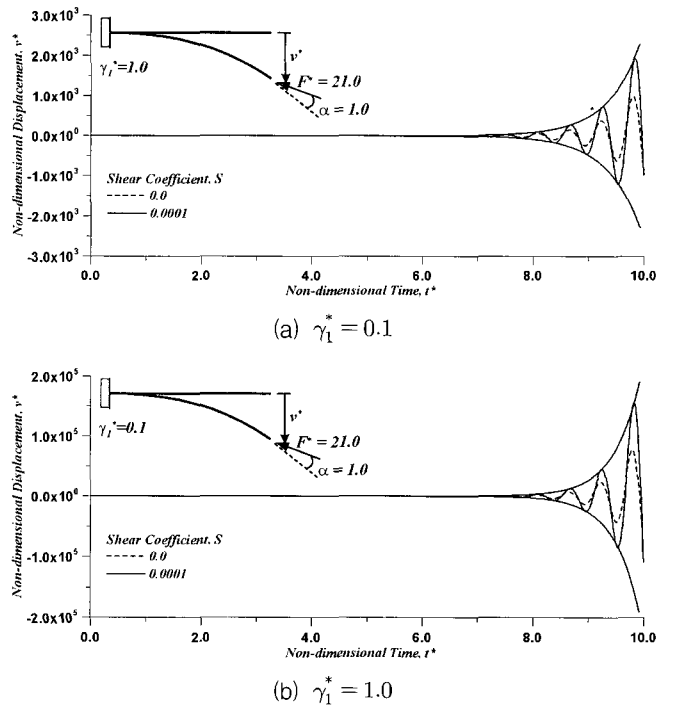


그림 13 동적좌굴하중에 대한 외적 감쇠하중의 영향 ($\alpha = 1.0, \gamma_2^* = 0.0, K^{NC} = K^{NC1}$)

6. 결 론

전단변형 및 회전관성 효과를 고려하는 비보존력을 받는 외팔기둥의 대표적인 예인 Beck의 기둥에 대한 동적 안정성을 분석하기 위해서 전단이 고려된 Hermitian 다

항식을 형상함수로 선택하여 Hamilton의 원리로부터 행렬 운동방정식을 유도하고 유한요소정식화 과정을 제시하였다. 전단변형이 고려된 경우의 무차원화 된 파라미터를 지배방정식으로부터 유도하고, 유한요소정식화 과정을 포함하는 유한요소프로그램을 개발하여 연구결과에 도입함으로써 매개변수 연구에 유용하도록 하였다. 또한 Newmark 방법을 이용하여 시간에 따른 Beck의 기둥 끝단의 증폭변화를 파악하였으며, 그 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

- 1) 회전관성을 고려할 경우 구조물의 동적좌굴하중은 회전관성 매개변수 λ 에 지배된다. 특히 $\alpha=1.0$ 일 경우 동적좌굴하중은 초기 20.053에서, λ 가 일정하게 증가함에 따라 동적좌굴하중도 일정하게 감소하는 경향이 있음을 알 수 있다. 또한 α 가 0.5일 경우 정적좌굴상태와 동적좌굴상태의 전이점으로서 특히 그림 6을 분석할 경우 제2 동적좌굴하중의 변화가 상이하게 변화된다.
- 2) 전단변형을 고려할 경우 비보존력의 방향 변화를 단면 회전각 β 및 처짐각 v' 두 가지로 생각 할 수 있으나, 이의 차이는 제1 좌굴하중값이 구조물의 지배적인 파라미터로 생각될 때 미소한 것으로 판명되며, 시간응답 해석결과 S값이 클수록 동일한 하중 하에서 구조물의 동적좌굴 이후의 진동 경향은 더욱 커지는 것을 알 수 있다.
- 3) 미소한 내적감쇠효과에 의해 구조물의 동적좌굴하중은 감소하며 내적감쇠효과가 커질수록 동적좌굴하중은 다시 커지나 외적감쇠하중에 의해서 그림 10과 같이 A

의 실수부가 전체적으로 이동하여 동적좌굴의 경계값을 변화시킨다. 또한 전단변형효과가 고려되었을 경우 제 1 동적좌굴 하중값에는 변화가 크게 관찰되지 않으나 시간응답에 의한 구조물의 진동양상에는 $S=0.0001$ 의 미소한 값에도 눈에 띄는 차이가 있음을 확인할 수 있다.

감사의 글

본 연구는 교량설계핵심기술연구단을 통하여 지원된 건설교통부 건설핵심기술연구개발사업 및 한국과학재단의 특정기초연구(R01-2002-000-00265-0)사업에 의하여 수행되었으며 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고 문헌

1. Beck, M., "die Knicklast des eiseting eingespannten, tangential gedruckten Stabes," ZAMP, Vol. 4, 1952, pp. 225-228.
2. Bolotin, V. V., *Nonconservative problems of the theory of elastic stability*, Moscow, 1961 English translation published by Pergamon Press, New York, 1963.
3. Leipholz, H. H. E., *Stability of elastic systems*, Universities press, Belfast, 1980, pp. 312-388.
4. Barsoum, R. S., "Finite element method applied to the problem of stability of a non-conservative system," *International Journal for Numerical Me-*

부 록

$$M_t = \frac{\xi}{420 T^2} \begin{bmatrix} 12(13+294S+1680S^2) & 2(11+231S+1260S^2) & 18(3+84S+560S^2) & -(13+378S+2520S^2)\xi \\ & 4(1+21S+126S^2)\xi^2 & (13+378S+2520S^2)\xi & -3(1+28S+168S^2)\xi^2 \\ \text{symm.} & & 12(13+294S+1680S^2) & -2(11+231S+1260S^2)\xi \\ & & & 4(1+21S+126S^2)\xi^2 \end{bmatrix}$$

$$M_r = \frac{\lambda^2}{30 T^2 \xi} \begin{bmatrix} 36 & 3(1-60S)\xi & -36 & 3(1-60S)\xi \\ 4(1+15S+360S^2)\xi^2 & 3(-1+60S)\xi - (1+60S-720S^2)\xi^2 & & \\ \text{symm.} & & 36 & -3(1-60S)\xi \\ & & & 4(1+15S+360S^2)\xi^2 \end{bmatrix}$$

$$K_c = \frac{EI}{T \xi^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\xi & -12 & 6\xi \\ 4(1+3S)\xi^2 & -6\xi & 2(1-6S)\xi^2 & \\ \text{symm.} & 12 & -6\xi & \\ & & -2(1-6S)\xi^2 & \end{bmatrix}$$

$$K_g = \frac{1}{30 T^2 \xi} \begin{bmatrix} 36(1+20S+120S^2) & 3\xi & -36(1+20S+120S^2) & 3\xi \\ \text{symm.} & 4(1+15S+90S^2)\xi^2 & -3\xi & -(1+60S+360S^2)\xi^2 \\ & & 36(1+20S+120S^2) & -3\xi \\ & & & 4(1+15S+90S^2)\xi^2 \end{bmatrix}$$

$$K^{nc1} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{12S}{T\xi} & -\frac{6S}{T} & \frac{12S}{T\xi} & \frac{1+6S}{T} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad K^{nc2} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

- thods in Engineering* 3, 1971, pp. 63-87.
5. Chen, L.W. and Ku, D.M., "Stability analysis of a Timoshenko beam subjected to distributed follower forces using finite elements," *Computers and Structures* 41, 1991, pp. 813-819.
 6. Irie, T., Yamada, G. and Takahashi, I., "Vibration and stability of a non-uniform Timoshenko beam subjected to a follower force," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 70, 1980, pp. 503-512.
 7. Lee, S. Y. and Yang, C. C., "Non-conservative instability of a Timoshenko beam resting on Winkler elastic foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 162, 1993, pp. 177-184.
 8. Lee, S. Y. and Yang, C. C., "Non-conservative instability of non-uniform beams resting on an elastic foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, 1994, pp. 433-444.
 9. Takahashi, I. and Yoshioka, T., "Vibration and stability of a non-uniform double-beam subjected to follower forces," *Computers and Structures*, Vol. 59, 1996, pp. 1033-1038.
 10. Takahashi, I., "Vibration and stability of a non-uniform cracked Timoshenko beam subjected to follower force," *Computers and Structures*, Vol. 71, 1999, pp. 1585-591.
 11. 김문영, 이준석, 민병철, "유한요소기법을 이용한 비보존력이 작용하는 보-기둥 구조의 다양한 제변수 변화에 따른 동적 안정성 해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제 17권, 제 4호, 2004, pp. 351-363.