Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering
Vol, 28, No. 4, pp.134－141, December 2005.

이중명령 자동창고의 대기행렬에 관한 연구

장진익* · 김원중**

* 충청대학 품질경영과, ** 아주대학교 산업정보시스템공학과

A study on the Waiting Line in the Automated Storage/ Retrieval System with Dual Command Policy

Jin-Ick Chang* · Won-Joong Kim**

* Dept. of Quality Management, Chung Cheong University.
** Dept. of Industrial Information & System Engineering, Ajou University

Due to the complexity and stochastic nature of automated warehousing system, items are usually queued up at I/O point. We introduce a storage/retrieval policy : dual-command. We present quick approximations to queueing phenomena under these policies.

It is assumed that the storage and retrieval arrival pattern follow the same poisson process. We also assumed that storage queue and retrieval queue being operated separately. The approximation attempts are performed under the proposed storage/retrieval policies after we derive S/R machine travel time distributions.

Keywords : Automated Warehousing System, Dual Command, Queueing System

1. 서 론

자동창고는 기존의 창고에 비하여 적은 투자비용, 인건비 절감, 재공품 감소 등의 이점으로 현재 많은 기업에서 채택되고 있는 실정이다. 자동창고의 하드웨어 구성에는 적재/하역기(S/R기계 ; Storage/ Retrieval 기계), 저장공간(storage rack), 조정 컴퓨터 등이 있다. 현재 자동창고 계획시 창고의 크기는 주어진 부지 위에 처리되는 물동량을 기준으로 그 규모를 정하고 있으며 대부분 경험에 의존하고 있는 것이 설치회사들의 사용방법이다. 따라서 자동창고의 과학적인 설계 필요성으로 인하여 많은 연구가 진행되고 있다. 기존 자동창고의 연구에는 크게 세 가지로 분류할 수 있다.

그 중 첫번째로 자동창고의 최적설계에 관한 연구로서 수리계획법과 시뮬레이션을 그 해법으로 삼고 있다 [1, 5].

두번째로는 입고와 출고방법에 대한 문제로서 S/R기계의 능력을 함께 고려하여 S/R기계의 주행시간을 최소화하는 창고내의 입고위치와 출고위치를 결정하는 문제이다[3, 9].

S/R기계의 능력에 따라서는 교대로 입·출고를 하나씩만 수행하는 단일 명령, 동시에 입·출고를 수행하는 이중 명령, 동시에 2개 이상의 입·출고를 수행하는 다중 명령으로 나눌 수 있다. S/R 기계의 능력이 주어졌을 때 입·출고 방법으로는 임의로 입·출고 위치를 결정하는 임의저장 방법과 I/O장에서 가장 가까운 곳에 입·출고를 해주는 dedicated storage 방법, 물품 종류별로 창고를 나누어 입·출고하는 class-based storage 방법이 있다[3, 9].

세번째는 하나는 자동창고에서 발생하는 대기현상에 관한 연구로서 여러 종류의 입·출고 방법에 대해서 입

고품과 출고주문이 서비스를 받기 위하여 기다리는 현상을 대기행렬 이론으로 분석하여 최적 설계모형에 반영하는데 있다.

자동창고 시스템의 대부분은 입고품의 대기행렬은 실제로 존재하나 출고주문은 통제컴퓨터의 메모리에 저장되어 있으므로 입고 대기행렬과 출고 대기행렬이 따로 존재한다고 볼 수 있다. 따라서 이에 대한 입·출고 대기행렬 현상을 분석할 필요가 있다.

본 연구의 목적은 입고 대기행렬과 출고 대기행렬이 따로 존재하는 자동창고시스템에서 이중 명령, 임의 저장으로 운영될 때 입고 및 출고 대기행렬을 분석하는데 있다.

2. 모형 정의와 대기행렬정책

본 연구는 다음과 같은 구조와 운영정책을 갖는 자동창고시스템에서 이중명령을 사용했을 때의 대기행렬 현상을 분석한다.

1. 창고의 저장정책은 임의저장 정책을 사용한다.
2. 입고물품과 출고주문은 포아송 과정에 의하여 일어나며 도착율은 λ로 동일하다.
3. 입고대기행렬과 출고 대기행렬의 길이에는 제한이 없다.
4. 창고는 W개의 저장공간으로 구성되어 있다.
5. 창고가 꽉 차 있어서 서비스를 받지 못하는 입고물품을 저장하기 위하여 버퍼가 있으며 그 크기에는 제한이 없다.
6. S/R기계가 서비스를 끝내면 통제컴퓨터는 입고대기행렬과 출고대기행렬 및 창고상태를 동시에 검사하며 이때 소요되는 시간은 상수값 C가 된다.

자동창고시스템에서는 한번 들어온 입고품은 모두 출고되므로 입고품과 출고주문의 도착비율은 같아지게 된다. 따라서 이중 명령으로 운영되는 자동창고시스템을 대기행렬시스템으로 본다면 입고품과 출고주문의 도착비율은 같으며 입고 대기행렬과 출고 대기행렬이 따로 존재하는 시스템으로 볼 수 있다.

서버인 S/R기계가 입·출고 서비스 끝낸 후 통제컴퓨터는 동시에 입고 대기행렬과 출고 대기행렬 및 창고의 상태를 검사한다. 서비스 시간은 S/R기계가 입고품이나 출고주문을 처리하기 위하여 저장 공간 내를 주행하는 시간으로 볼 수 있다.

창고가 꽉 차 있어 입고품이 서비스를 받지 못하여 입고버퍼에 쌓아두는 경우에 S/R기계는 주행하지 않으므로 서비스 시간을 0으로 간주할 수 있다. 마찬가지로 출고주문이 서비스를 받으려 할 때 창고가 비어있어 출고주문을 입고버퍼로부터 받게 되거나 입고버퍼 역시 비어 있어 출고를 못 받고 시스템을 떠나게 되는 경우에도 S/R기계는 창고 내를 주행하지 않게 되므로 서비스 시간을 0으로 볼 수 있다.

대기행렬 정책 : 통제 컴퓨터가 동시에 입고, 출고 대기행렬을 검사하여 입고물품과 출고주문이 있으면 서비스 하며, 어느 한 대기행렬이 비어있지 않아도 서비스한다. 그러나 입고 대기행렬에는 입고품이 있지만 출고주문이 없으며 창고가 꽉 차 있으면, 입고품은 창고에 입고시키지 못하고 입고 버퍼에 옮겨 놓는다. 입고 버퍼에 쌓아 놓은 입고물품은 통제 컴퓨터가 입고 및 출고 대기행렬을 검사했을 때 입고물품은 없고 출고주문이 있으면 출고주문과 교환함으로써 서비스를 받는다.

통제 컴퓨터가 입고 및 출고 대기행렬을 검사했을 때 입고 대기행렬에는 입고물품이 없으나 출고 대기행렬에는 출고주문은 있고 창고가 비어 있으면 출고주문은 입고버퍼로부터 서비스를 받는다. 만일 입고버퍼도 비어 있으면 출고주문은 서비스를 못 받고 시스템을 떠난다.

본 연구에서는 다음과 같은 관점에서 대기행렬 현상을 분석하기로 한다.

이중명령으로 운영되는 자동창고 시스템을 입고물품 관점에서 본다면 다음과 같은 서비스 현상이 발생하게 된다.

1. 입고 대기행렬에 입고물품이 존재하는 한 입고물품은 계속하여 서비스 받는다. 다시 말하자면 출고 대기행렬에 출고주문이 존재하면 출고주문과 동시에 서비스를, 출고주문이 존재하지 않으면 입고물품만 서비스를 받는다.
2. 입고 대기행렬에 입고물품이 존재하지 않고 출고 대기행렬에 출고주문이 존재하면 출고주문만 서비스 받는다. 출고주문이 서비스 받는 동안 입고 대기행렬에 들어온 입고물품은 출고서비스가 끝날 때까지 서비스를 받지 못한다.

서비스 시간은 창고까지의 주행시간과 통제 컴퓨터로 입·출고 대기행렬을 검사하는 시간까지로 생각하고, 휴가시간을 입고 대기행렬에는 입고물품이 없으나 출고 대기행렬에는 출고주문이 존재하여 출고 서비스를 해준 후 통제 컴퓨터로 입·출고 대기행렬을 검사하는 시간까지 혹은 출고 대기행렬에도 출고주문이 없어서 단지 입·출고 대기행렬을 검사하는 시간으로 본다면 입고물품의 입장에서 대기행렬 모형은 exhaustive service 휴가모형과 유사하다. 그러나 입고서비스 시간과 휴가시간은 출고 대기행렬의 출고주문 존재 여부에 달라지므로 서로 독립인 확률변수가 되지 않는다.

3. M/G/1 서버 휴가 모형의 확률분할

3.1. 확률 분할기법의 결과

M/G/1 server 휴가모형이란 서버가 종종 대기행렬에 고객이 존재하더라도 임의시간 동안 서비스를 해주지 못하는 모형이다. Fuhrmann & Cooper[7]은 몇 가지 가정 하에서의 M/G/1 server 휴가 대기모형에서의 안정상태 확률의 확률모함수를 유도해 냈다. 휴가와 관련된 가정을 들면 다음과 같다.

가정 1. 휴가시간은 i.i.d 확률변수로 분포함수 V(·)를 갖는다.

가정 2. 서버가 서비스를 시작하고 휴가를 끝내는 규칙이 고객의 도착과정에 영향을 미치지 않는다.

가정 3. 휴가시간동안 도착한 고객의 수는 휴가가 시작될 때 대기행렬에 존재하는 고객 수에 영향을 받지 않는다.

이러한 가정을 만족할 때

ψ(·) ; M/G/1 서버 휴가 모형에서 고객이 서비스를 받고 떠나는 시점에서 본 시스템 내의 고객수의 확률모함수

π(·) ; 일반 M/G/1 모형에서 고객이 서비스를 받고 떠나는 시점에서 본 시스템 내의 고객수의 확률모함수

ζ(·) ; M/G/1 서버 휴가 모형에서 서버가 휴가를 시작하려 할 때 서버가 본 시스템 내의 고객수의 확률모함수

α(·) ; 서버 휴가시간 동안 시스템에 도착하는 고객수의 확률모함수

라 정의하면, Fuhrmann & Cooper[7]는 ψ(·)가 다음 식으로 표현될 수 있음을 증명하였다.

$$\psi(z) = \zeta(z) \cdot \frac{1-\alpha(z)}{\alpha'(1)(1-z)} \cdot \pi(z) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

한편 도착과정이 Poisson 과정을 따를 때 Wolf, R. W.[12]의 정리 "Poisson sees time average"에 의하여 Ψ(z)는 임의시간에 시스템에 존재하는 고객수의 확률모함수가 된다.

따라서 평균 대기행렬 길이는 Ψ(z) 를 미분하여

$$\psi'(1) = \zeta'(1) + \frac{\lambda E(V^2)}{2E(V)} + \pi'(1) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

로 유도된다.

3.2. 대칭순환서버 모형

한명의 서버가 여러 대기행렬을 정해진 순서대로 방문하면서 고객이 존재하면 서비스를 해주고 그렇지 않으면 다음 대기행렬로 이동하는 모형 중에서 도착률과 서비스시간이 각 대기행렬에 들어오는 고객의 종류에 무관하게 같은 경우를 대칭순환서버 모형이라 한다.

이 모형은 서버가 각 대기행렬을 방문했을 때 고객을 서비스 해주는 방식에 따라서 세 종류로 분류할 수 있다.

- exhaustive 서비스 모형 : 서버가 각 대기행렬 방문 시 각 대기행렬에 고객이 있는 동안은 계속 서비스를 해주고 고객이 없을 때 서버가 다른 대기행렬로 이동하는 모형
- gated 서비스 모형 : 서버가 각 대기행렬 도착 시 존재하는 고객들만 서비스를 해주고 이동하는 모형
- 1-Limited 서비스 모형 : 서버가 각 대기행렬 도착 시 고객이 존재하면 한명만 서비스를 해주고 이동하는 모형

대칭순환서버 대기행렬 모형은 M/G/1 서버 휴가모형의 일종으로 Fuhrmann[6]은 M/G/1 서버 휴가모형의 분석결과를 적용하여 이 모형을 해결하였다.

단일명령으로 운영되는 창고시스템은 특성상 1-Limited 서비스 모형으로 분석하는 것이 바람직하며, 이중명령으로 운영되는 창고시스템에서는 exhaustive 서비스 모형이 분석에 적합하다.

3.3. Exhaustive service 모형

Exhaustive service 대기행렬 모형은 고객이 대기행렬에 존재하는 동안은 서비스를 계속 해주고 서버가 서비스를 끝낸 후 대기행렬에 고객이 존재하지 않을 때 임의시간동안 휴가를 떠나는 모형으로 Fuhrmann & Cooper[7]는 M/G/1 서버 휴가모형의 결과를 통해 분석하였다. 이중명령으로 운영되는 자동창고시스템을 입고측면에서만 보면 입고 대기행렬에 입고물품이 존재하는 한 계속 입고물품을 처리하고 입고물품이 존재하지 않을 때 출고주문만 처리하는 경우를 입고측면에서의 서버 휴가로 보면 exhaustive service 모형과 유사하게 된다. 따라서 본 연구에서는 exhaustive service 대기모형을 이중명령으로 운영되는 자동창고의 대기행렬 현상의 분석에 적용하였다.

Fuhrmann & Cooper[7]는 exhaustive service 대기행렬 모형이 M/G/1 서버 휴가모형의 모든 가정을 만족시킬 때 시스템 내에 있는 고객수의 확률모함수는 식[1]을 만족함을 증명하였다. 그러므로 시스템에 존재하는 고객수의 확률모함수를 구하기 위해서는 $\zeta'(1)$를 먼저 알아야 한다.

exhaustive service 대기행렬 모형에서는 서버가 휴가를 떠나는 시점은 항상 대기행렬이 비어있을 때이므로 서버가 휴가를 떠날 때 서버가 본 시스템내의 평균 고객수인 $\zeta'(1)$ 는 0 이 된다. 그러므로 대기행렬에 존재하는 평균 고객수는 다음과 같이 주어진다.

$$\psi'(1) = \frac{\lambda E(V^2)}{2E(V)} + \pi'(1) \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

4. 대기행렬 현상 분석

4.1. 창고상태에 대한 확률과정 분석

서비스 시간의 분포를 구하려면 입·출고에 따른 창고 상태의 변화과정에 대한 분석이 필요하다. S/R 기계가 입·출고 서비스를 끝내면 통제컴퓨터가 각 대기행렬을 검사하게 되는데 검사직후의 창고상태를 분석하기 위하여 다음 변수를 정의하자.

변수의 정의

- w_n ; 통제컴퓨터가 n번째로 입고 대기행렬과 창고의 상태를 검사했을 때의 창고의 상태
- S ; 통제컴퓨터가 입·출고 대기행렬과 창고의 상태를 검사했을 때의 입고 대기행렬 상태
- R ; 통제컴퓨터가 입·출고 대기행렬과 창고의 상태를 검사했을 때의 출고 대기행렬의 상태
- W ; 창고의 총 저장공간

통제컴퓨터가 n번째로 입·출고 대기행렬과 창고상태의 검사를 마친 직후의 창고상태인 w_n은 다음과 같다.
$w_n = w_{n-1} + (w_{n-1}$과 w_n) 동안의 창고상태 변화량

w_{n-1}과 w_n 동안의 창고상태 변화량

$$= \begin{cases} 1 & \text{if } S > 0,\ R = 0,\ w_{n-1} < W \\ -1 & \text{if } S = 0,\ R > 0,\ w_{n-1} > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

위 식에서 $\Pr(S>0)$ 과 $\Pr(R>0)$을 알기만 하면 w_n은 w_{n-1}에 의해서만 결정되므로 마코프 체인을 이룬다.

통제컴퓨터가 n-1번째로 대기행렬과 창고상태를 검사한 직후부터 n번째로 검사를 마친 직후까지의 시간을 순환시간이라 정의 할 때 순환시간동안 입·출고 대기행렬에 입고물품이나 출고주문이 존재하면 서비스 받는다. 안정상태에서는 평균 순환기간 도착한 평균 입고물품과 출고주문 수는 평균 순환시간 동안 서비스 받은 평균 입고물품과 출고주문 수와 같으며, 이는 순환시간이 시작될 때 각 대기행렬에 1개 이상의 물품이 존재할 확률과 같다. 그러므로 평균 순환시간을 $E[CT]$라 하면 $\Pr[S>0] = \Pr[R>0] = \lambda E[CT]$이다 Kuehn[10].

$\Pr[S>0]$과 $\Pr[R>0]$을 알고 있으므로 w_n은 마코프 체인을 이룬다.

$$P(0,0) = \Pr[S=0,\ R=0],$$
$$P(0,1) = \Pr[S=0,\ R>0],$$
$$P(1,0) = \Pr[S>0,\ R=0],$$
$$P(1,1) = \Pr[S>0,\ R>0]$$

이라 정의하면 전이확률은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Pr[w_{n+1} = k \mid w_n = k] = P(0,0) + P(1,1)$$
$$\Pr[w_{n+1} = k+1 \mid w_n = k] = P(1,0)$$
$$\Pr[w_{n+1} = k-1 \mid w_n = k] = P(0,1)$$
$$where\ 1 \le k \le W-1$$
$$\Pr[w_{n+1} = 0 \mid w_n = 0] = P(0,0) + P(0,1) + P(1,1)$$
$$\Pr[w_{n+1} = 1 \mid w_n = 0] = P(1,0)$$
$$\Pr[w_{n+1} = W \mid w_n = W] = P(0,0) + P(1,0) + P(1,1)$$
$$\Pr[w_{n+1} = W-1 \mid w_n = W] = P(0,1)$$

이 전이확률은 이중 stochastic matrix를 이루므로 $\Pi \cdot P = \Pi$ 를 이용하여 안정상태 확률을 구할 수 있다.

$$\pi_k = \frac{1}{W+1}, \qquad 0 \le k \le W$$

4.2 서비스시간의 분포

이중 명령으로 운영되는 자동창고 시스템에서 서비스시간이란 입고물품을 입고시키기 위한 S/R기계의 주행시간과 입고 서비스 후의 통제컴퓨터의 검사시간이다. 이 서비스시간은 입고를 시작하려할 때의 출고대기행렬

상태에 따라 변한다. 즉 출고 대기행렬에 출고주문이 존재하면 입고물품은 출고주문과 동시에 서비스를 받게 된다. 편의상 입고물품은 출고주문과 동시에 서비스 해주는 경우를 이중서비스라 하고 입고물품만 서비스 해주는 경우를 단일서비스라 할 때 입고서비스 분포를 구하기 위해 다음의 변수를 정의한다.

- ST : 입고서비스 시간
- ST_S : 단일 서비스하의 입고서비스시간
- ST_D : 이중 서비스하의 입고서비스시간
- t_{oi} : I/O point에서 i번째 저장 공간까지의 편도 주행시간 $(i = 1,2,\cdots, W)$
- t_{ij} : i번째 저장 공간에서 j번째 저장 공간까지의 편도 주행시간$(i,j = 1,2,\cdots, W)$

$$T_{ij} = t_{oi} + t_{ij} + t_{jo}$$

- K : W개의 편도 주행시간인 t_{oi} 중에서 값이 다른 개수
- t_i : K개의 서로 다른 편도 주행시간 값 중 올림차순으로 i번째 값$(i = 1,2,\cdots,K)$
- n_{ti} : 편도 주행시간 값이 t_i로 같은 저장공간수
- L : 이중 서비스시간 T_{ij}들 중에서 값이 다른 개수
- T_i : L개의 서로 다른 이중 서비스 시간들 중 올림차순으로 i번째 값$(i = 1,2,\cdots,L)$
- n_{T_i} : 이중 서비스시간들 중 서비스시간이 T_i로 같은 저장공간수

입고품의 서비스 시간은 다음과 같다.

$$\text{입고 서비스시간} = \begin{cases} \text{이중 서비스시간} + C, & \text{if 출고주문 존재} \\ \text{단일 서비스시간} + C, & \text{if 출고주문 존재 않음} \end{cases}$$

한편 통제컴퓨터의 입 · 출고 대기행렬 및 창고상태를 검사할 때 출고대기행렬에 출고주문이 존재하면 입고물품과 동시에 서비스를 받게 되므로, 평균 입고서비스동안 도착한 평균 출고 주문수는 평균 서비스 받은 출고주문수와 같게 된다. 따라서 평균 입고서비스 시간을 $E[ST]$라 하면, 출고 대기행렬에 출고주문이 존재할 확률은 $\lambda E[ST]$이다.

이중 서비스시간은 일반적으로 단일 서비스시간보다 길기 때문에 이중 서비스시간 후에 출고 대기행렬에 출고주문이 존재할 확률은 단일 서비스시간 후에 출고 대기행렬에 출고주문이 존재할 확률보다 크다. 그러므로 이중 서비스시간 후에 이중 서비스시간이 계속될 확률은 이중 서비스시간 후에 단일 서비스시간이 계속될 확률보다 커진다. 이러한 이유로 입고 서비스시간은 상호독립이며 동일한 분포를 갖는 확률변수가 되지 못한다.

그럼에도 불구하고 통제컴퓨터의 입 · 출고 대기행렬 및 창고상태를 검사할 때 출고대기행렬에 출고주문이 존재할 확률은 $\lambda E[ST]$이므로, 입고 서비스시간은

$$\Pr[ST = ST_D + C] = \lambda E[ST]$$
$$\Pr[ST = ST_S + C] = 1 - \lambda E[ST]$$

의 특성을 갖는 상호독립이며 동일한 분포를 갖는 확률변수라 해도 무방하다.

여기서 ST_S와 ST_D를 구해야 하므로, 단일 서비스하에서 입고 서비스시간의 분포는 다음과 같이 유도된다.

$$\Pr[ST_S = 2t_i] = \begin{cases} n_{t_i}/W, & \text{if } 0 \le w \le W-1 \\ 0, & \text{if } w = W \end{cases}$$

단일 입고서비스 시간의 평균 및 2차 모멘트는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E[ST_S] &= \sum_{i=1}^{K} 2t_i \cdot n_{t_i}/W \cdot \Pr[0 \le w \le W-1] \\ &= \frac{2S_1}{W}\Pr[0 \le w \le W-1] \\ &= \frac{2S_1}{W}\cdot\frac{W}{W+1} \\ &= \frac{2S_1}{W+1} \end{aligned}$$

여기서 $S_1 = \sum_{i=1}^{K} t_i \cdot n_{t_i}$

$$\begin{aligned} E[ST^2] &= \sum_{i=1}^{K} (2t_i)^2 \cdot n_{t_i}/WS \cdot \Pr[0 \le w \le W-1] \\ &= \frac{4S_2}{W}\cdot\Pr[0 \le w \le W-1] \\ &= \frac{4S_2}{W+1} \end{aligned}$$

여기서 $S_2 = \sum_{i=1}^{K} t_i^2 \cdot n_{t_i}$

이중 서비스 하에서의 입고 서비스시간의 분포를 구하려면 이중 서비스를 실행할 때 입고시킬 위치로 i번째 저장공간이 출고시킬 위치로 j번째 저장공간이 선택될 확률을 구해야 한다.

$$\Pr(\text{입고위치} = i\text{번째 저장공간},\ \text{출고위치} = j\text{번째 저장공간} \mid w\text{개의 저장공간이 차 있을 경우}) = \frac{1}{W^2}, \quad 1 \le w \le W-1$$

Pr(입고위치 = i번째 저장공간 ,
출고위치 = i번째 저장공간
| 저장공간이 비어있을 경우)
$= \frac{1}{W}$,

Pr(입고위치 = i번째 저장공간 ,
출고위치 = i번째 저장공간
| 저장공간이 꽉차 있을 경우)
$= \frac{1}{W}$,

이중 서비스 하에서의 입고 서비스시간의 평균 및 2차 모멘트를 구하면 다음과 같다.

$$\Pr[ST_D = T_i] = n_{T_i}/W^2, \quad \text{if } 1 \le w \le W-1$$

$$\Pr[ST_D = 2t_i] = n_{T_i}/W, \quad \text{if } w = 0 \text{ or } W$$

$$\begin{aligned} E[ST_D] &= \sum_{i=1}^{m} T_i \cdot n_{T_i}/W^2 \cdot \Pr[1 \le w \le W-1] \\ &+ \sum_{i=1}^{k} 2t_i \cdot n_{T_i}/W \cdot \Pr[w = 0 \text{ or } W] \\ &= \frac{S_3}{W^2} \cdot \Pr[1 \le w \le W-1] \\ &+ \frac{2S_1}{W} \Pr[w = 0 \text{ or } W] \\ &= \frac{S_3}{W^2} \cdot \frac{W-1}{W+1} + \frac{2S_1}{W} \cdot \frac{2}{W+1} \end{aligned}$$

여기서 $S_3 = \sum_{i=1}^{m} T_i \cdot n_{T_i}$

$$\begin{aligned} E[ST_D^2] &= \sum_{i=1}^{m} T_i^2 \cdot n_{T_i}/W^2 \cdot \Pr[1 \le w_s \le W-1] \\ &+ \sum_{i=1}^{k} (2t_i)^2 \cdot n_{t_i}/W \cdot \Pr[w = 0 \text{ or } W] \\ &= \frac{S_4}{W^2} \Pr[1 \le w_s \le W-1] \\ &+ \frac{4S_2}{W} \Pr[w = 0 \text{ or } W] \\ &= \frac{S_4}{W^2} \cdot \frac{W-1}{W+1} + \frac{4S_2}{W} \cdot \frac{2}{W+1} \end{aligned}$$

여기서 $S_4 = \sum_{i=1}^{m} T_i^2 \cdot n_{T_i}$

입고서비스 시간의 평균 및 2차 모멘트는 다음과 같다.

$E[ST] = E[ST_D]$
· Pr[출고 대기행렬에 출고주문이 존재함]
+ $E[ST_S]$
· Pr[출고 대기행렬에 출고주문이 존재안함] + C

여기서

Pr[출고 대기행렬에 출고주문이 존재함]
$= \lambda \cdot E[ST]$
Pr[출고 대기행렬에 출고주문이 존재안함]
$= 1 - \lambda \cdot E[ST]$

이므로

$$E[ST] = \frac{E[ST_S] + C}{1 - \lambda \cdot E[ST_D] + \lambda \cdot E[ST_S]}$$

$E[ST^2] = E[ST_D^2]$
· Pr[출고 대기행렬에 출고주문이 존재함]
+ $E[ST_S^2]$
· Pr[출고 대기행렬에 출고주문이 존재안함]
+ C^2
$= E[ST_D^2] \cdot \lambda E[ST] + E[ST_S^2](1 - \lambda E[ST]) + C^2$

4.3 휴가시간의 분포

입고물품의 관점에서 휴가시간은 두 종류로 분류할 수 있다. 첫째 입고 대기행렬에는 입고물품이 없으나 출고 대기행렬에는 출고주문이 존재하여 출고서비스를 해준 후 통제 컴퓨터로 입·출고대기행렬과 창고를 검사하는 시간까지이다. 둘째는 출고 대기행렬에도 출고주문이 없어서 통제컴퓨터로 입·출고대기행렬과 창고를 검사하는 시간이다.

통제컴퓨터가 입고 대기행렬과 출고 대기행렬 및 창고상태를 검사했을 때 출고 대기행렬에 출고주문이 존재하면 서비스를 받게 되므로 평균 휴가시간 동안 도착한 평균 출고주문 수는 평균서비스 받은 출고주문수와 같게 된다. 그러므로 평균 휴가시간을 $E[V]$ 라 정의하면 통제컴퓨터가 검사했을 때 출고주문이 존재할 확률은 $\lambda E[V]$ 이다.

입고물품의 관점에서 휴가시간은 다음과 같은 이유로 상호독립이며 동일한분포를 갖는 확률변수가 되지 않는다. 일반적으로 출고서비스와 검사를 해준 후 출고대기행렬에 출고주문이 존재할 확률은 단지 검사만 한 후에 출고대기행렬에 출고주문이 존재할 확률보다 크다. 여기서 비록 휴가시간의 분포가 상호독립이며 동일한분포를 갖는 확률변수가 되지 않는다고 하더라도 통제컴퓨터가 입고 대기행렬과 출고 대기행렬 및 창고상태를 검사했을 때 출고주문이 존재할 확률은 $\lambda E[V]$ 이므로 휴가시간의 분포가 다음과 같은 특성을 갖는 상호독립이며 동일한분포를 갖는 확률변수라 가정한다.

$\Pr[V = ST_s + C] = \lambda E[V]$
$\Pr[V = C] = 1 - \lambda E[V]$

$$E[V] = \lambda E[V](E[ST_s] + C) + (1 - \lambda E[V])C = \frac{C}{1 - \lambda \cdot E[ST_s]}$$

$$E[V^2] = \lambda E[V]\, E[ST_s^2] + C^2$$

4.4 성능평가 척도

서비스시간 및 휴가시간이 상호독립이며 동일한 분포를 갖는 확률변수가 아니므로 본 연구에서 exhaustive service 모형을 사용하는 것은 개산식이 된다.

L_{sys}=입고 대기행렬에서 기다리는 평균 입고물품수 (서비스 물품 포함)

W_{sys}=입고물품이 입고 대기행렬에서 기다리는 평균 대기시간(서비스시간 포함)라 정의하면

$$L_{sys} = \psi'(1) = \frac{\lambda E[V^2]}{2E(V)} + \pi'(1)$$

$$\pi'(1) = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 VAR[ST]}{2(1-\rho)} = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2(E[ST^2] - E^2[ST])}{2(1-\rho)}$$

$$\rho = \lambda E[ST]$$

한편 평균 대기시간은 입 · 출고 대기행렬과 창고 검사시간 C를 포함하므로 실제 평균대기시간은 다음과 같다.

$$W_{sys} = \frac{L_{sys}}{\lambda} - C$$

5. 수치계산 결과

상대오차를 다음과 같이 정의했을 때 입고품과 출고주문의 도착율(λ) 변화에 따른 평균 대기시간은 <표 1> 및 <표 2>와 같다.

$$\text{상대오차} = \frac{\text{시뮬레이션결과} - \text{개산치결과}}{\text{시뮬레이션결과}} \times 100$$

<표 1> 평균 대기시간

ρ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
개 산 치	4.06	4.68	5.43	6.18	7.37	8.82	11.19	15.85	29.14
시뮬레이션	4.10	4.75	5.51	6.30	7.44	9.01	11.43	15.98	34.0
상대오차 %	0.97	1.47	1.45	1.90	0.94	2.15	2.09	0.81	5.47

$W = 30$, $E[ST] = 3.74\,Min$, $C = 0.1\,Min$ 단위 : Min

$\rho = \lambda E[ST]$

<표 2> 평균 대기시간

ρ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
개 산 치	4.48	5.22	5.94	6.84	8.05	9.61	11.98	17.13	34.74
시뮬레이션	4.57	5.28	6.02	6.91	8.11	9.73	12.05	17.85	36.17
상대오차 %	1.96	1.13	1.32	1.01	0.74	1.23	0.58	4.03	3.95

$W = 50$, $E[ST] = 1.24\,Min$, $C = 0.1\,Min$ 단위 : Min

$\rho = \lambda E[ST]$

위의 표에서 알 수 있듯이 창고크기(W)가 고정되어 있을 때 입고품과 출고주문의 도착율이 증가함에 따라서 평균대기시간은 증가함을 알 수 있다.

한편 창고크기를 변화시켰을 때의 평균대기시간을 살펴보면 <표 3>과 같다.

<표 3> 창고의 크기에 따른 평균 대기시간

W	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200
개 산 치	0.998	1.034	1.065	1.091	1.136	1.174	1.243	1.315	1.411	1.545
시뮬레이션	1.027	1.061	1.089	1.114	1.155	1.192	1.260	1.331	1.425	1.558
상대오차 %	2.28	2.54	2.20	2.06	1.64	1.51	1.35	1.20	0.98	0.83

$C = 0.1\,Min$ $\lambda = 1.0$개$/Min$

<표 3>에서 알 수 있는 사실은 창고의 크기가 증가함에 따라 평균 대기시간이 증가함을 알 수 있는데, 이는 창고의 크기가 증가함에 따라 평균 서비스시간이 증가해서 결국 평균 순환시간이 증가하기 때문이다.

그러나 대기시간에 있어서는 단일명령보다 이중명령으로 운영되는 경우가 적음을 쉽게 예측할 수 있는데 이는 동시에 더 많은 서비스를 행할 수 있기 때문이다.

6. 결 론

본 연구는 자동창고 앞에 입 · 출고 대기행렬이 존재하는 시스템에서 임의저장 정책과 이중명령으로 운영되는 경우에 대해서 입고품과 출고주문의 적체현상을 대기행렬모형을 적용하여 개산적으로 분석하였다.

입고품과 출고주문의 평균 대기시간과 평균 대기행렬의 길이에 대한 개산치를 얻을 수 있었으며 시뮬레이션 결과와 5%이내의 오차를 보였다. 또한 입고품과 출고주문의 서비스 시간을 구하기 위하여 임의 시스템에 도착하는 입고품과 출고주문에 따른 창고의 상태 변화과정을 분석한 결과 마코프체인을 이루고 있음을 알 수 있었다.

임의 저장정책과 이중명령으로 운영되는 자동창고의 입 · 출고 적체현상을 개산적으로 분석하기 위하여 M/G/1 server 휴가모형의 일종인 exhaustive service 모형을 사용하였다.

참고문헌

[1] Ashayeri, J. Gelder, L. F.,"Warehouse design optimization", Euro. J. Oper. Res., Vol.21, pp. 285-294, 1985.

[2] Ashayeri, J., Gelder, L. F., Wassenhove, L. V.,"A micro computer-based optimization model for the design of automated warehouse", Int. J. Prod. Res., Vol.23, No.4, pp. 825-839, 1985.

[3] Bozer, Y. A., and White, J. A. "Travel-time models for automated Storage/Retrieval systems", IIE Transactions, Vol.16, No.4, pp. 329-338, 1984

[4] Doshi, B. T., "Queueing systems with vacations-A survey", Queueing Systems, Vol.1, No.1, pp 29-66, 1986.

[5] Emerson, C. R., and Schmatz, D. S., "Results of modeling automated warehouse system", J. of Industrial Engineering, pp.28-90, 1981.

[6] Fuhrmann, S. W., "Systematic queues served in the cyclic order", Oper. Res. Letters, Vol.4, No.3, pp. 139-144, 1985.

[7] Fuhrmann, S. W. and Cooper, R. B., "Stochastic decompositions in the M/G/1 queue with generalized vacations", Oper. Res., Vol.33, No.5, pp. 139-144, 1985.

[8] Graves, S. C., Hausman, W. H., Schwarz, L. B., "Storage-retrieval interleaving automatic warehousing systems", Management Science, Vol.23, No.9, pp.935-945, 1977.

[9] Hausman, W H., Schwarz, L. B., Graves, S. T., "Optimal storage assignment in automatic warehousing systems", Management. Science., Vol.22, No.6, pp. 629-638, 1976.

[10] Kuehn, P. J., "Multiqueue systems with nonexhaustive cyclic service", Bell System Tech. J., Vol.58, No.3, pp. 671-698, 1979.

[11] Rosenblatt, M. J., and Roll, Y., "Warehouse design with storage policy considerations", Int. J. of Prod. Res., Vol.22, No.5, pp. 809-821, 1984.

[12] Wolf, R. W., "Poisson arrivals see time average", Operations Research., Vol.30, pp. 223-231, 1982.