Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering
Vol, 28, No. 4, pp.116－123, December 2005.

기대손실을 이용한 다변량 공정능력지수

정 영 배

인천대학교 산업공학과

A Multivariate Process Capability Index using Expected Loss

Young-Bae Chung

Dept. of Industrial Engineering, University of Incheon

The traditional process capability indices Cp, Cpk, Cpm, Cpm$^+$ have been used to characterize process performance on the basis of univariate quality characteristics. Cp, Cpk consider the process variation, Cpm considers both the process variation and the process deviation from target and Cpm+ considers economic loss for the process deviation from target. In manufacturing industry, there is growing interest in quantitative measures of process variation under multivariate quality characteristics. The multivariate process capability index incorporates both the process variation and the process deviation from target or considers expected loss caused by the process deviation from target. This paper proposes multivariate capability index based on the expected loss derived from multivariate normal distribution.

Keywords : multivariate quality characteristics, multivariate process capability index, expected loss

1. 서 론

대부분의 생산현장에서는 품질에 대한 평가를 제품 각각에 대한 품질을 보증하기 보다는 공정에 대한 품질로서 보증하고 있다. 이러한 공정에 대한 품질을 평가하는 척도로서 공정능력지수(PCI : Process Capability Index)를 사용하고 있으며, 공정능력을 평가하는 기준도 품질특성치의 규격에 대한 적합성 여부만을 다루는 것을 넘어서 규격을 만족하는 제품 중에서도 가능한 한 목표치에 일치하는 정도가 어느 수준인가에 두고 있다. 따라서 공정의 품질을 향상시키기 위해서는 규격 내에서의 산포의 감소와 더불어 목표치에 가까운 균질의 제품이 되도록 지속적인 노력이 필요하다고 할 수 있다.

전통적인 공정능력지수 C_p와 C_{pk}는 단지 품질의 산포나 공정평균의 치우침만을 고려해서 공정능력을 평가하기 때문에 품질특성치가 목표치에 얼마나 접근하고 있는가를 알 수 없다. 이러한 단점을 보완하기 위해 목표치로부터 품질특성치의 변동을 고려한 공정능력지수로서 Chan, Cheng과 Spiring은 C_{pm}을, 목표치로부터 품질특성치의 변동으로 Taguchi의 이차손실함수를 적용한 기대손실을 이용하는 방법으로서 Bolyes는 C_{pm}^+를 제시하였다. 따라서 최근에는 공정의 산포에 의해서 공정능력을 평가하기보다는 목표치로부터 품질의 변동에 따른 경제적 손실까지도 고려하여 보다 유용한 정보를 많이 제공할 수 있는 공정평가척도들이 대두되고 있으며 그 응용분야를 확장시키고 있다.

이러한 전통적인 공정능력지수들은 1개의 특성치를 갖는 단변량에 대한 공정평가의 척도들이고, 2개 이상의 특성치를 가지는 다변량의 공정에 대해서는 적용할 수가 없는 단점을 가지고 있다. 그러나 최근의 생산현장의 공정들은 관리해야 할 품질특성치가 고객요구의 다양화에 따라 증가하게 되어, 단변량에서 2개 이상의 특성치를 가지는 다변량의 공정에 적용할 수 있는 공정능력지수가 필요하게 되었다. 특히 다변량 공정에서는 이들의

* 본 연구는 2003년도 인천대학교 교내 연구비 지원에 의하여 수행되었음.

특성치가 서로 독립적인 경우나 종속적인 경우가 있을 수 있기 때문에 이를 고려한 공정능력지수가 필요함에도 불구하고 지금까지 대개의 연구들이 특성치 사이의 상관관계를 무시하고 서로 독립이라는 가정 하에 적용되어 왔기 때문에 현장과의 차이가 발생하는 경우가 많았다.

따라서 본 연구에서는 다변량에 대해 특성치 간의 상관관계를 고려하면서 목표치로부터 품질특성치의 변동으로 인한 기대손실을 이용한 다변량 공정능력지수를 제시하고자 한다.

2. 공정능력지수와 기대손실

2.1 공정능력지수

2.1.1 단변량 공정능력지수

단변량 공정의 공정능력지수로서 규격의 폭과 공정의 산포를 고려한 평가방법과 여기에 공정평균의 치우침을 고려한 평가방법으로서 Kane (1986)에 의해 제시된 C_p, C_{pk}가 있다.

$$C_p = \frac{USL-LSL}{6\sigma} = \frac{T}{6\sigma}$$

$$C_{pk} = \min\left(\frac{USL-\mu}{3\sigma}, \frac{\mu-LSL}{3\sigma}\right) = (1-K)C_p \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

단, $K = |M-\mu|/(T/2)$

$T = S_U - S_L$

$M = (S_U + S_L)/2$

목표치로부터 공정의 평균을 고려한 평가방법으로서 Chan, Cheng, Spiring(1988)에 의해 제시된 C_{pm}은 다음과 같다.

$$C_{pm} = \frac{USL-LSL}{6\sqrt{E[(Y-T)^2]}} = \frac{USL-LSL}{6\sqrt{[\sigma^2+(\mu-T)^2]}} = \frac{C_p}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu-T}{\sigma}\right)^2}} \quad \cdots\cdots (2)$$

Taguchi의 이차손실함수의 기대손실에 근거한 공정능력지수로서 Bolyes(1991)가 제시한 C_{pm}^{+}는 다음과 같다.

$$C_{pm}^{+} = \frac{USL-LSL}{6\sqrt{E(L)}} \quad \cdots\cdots (3)$$

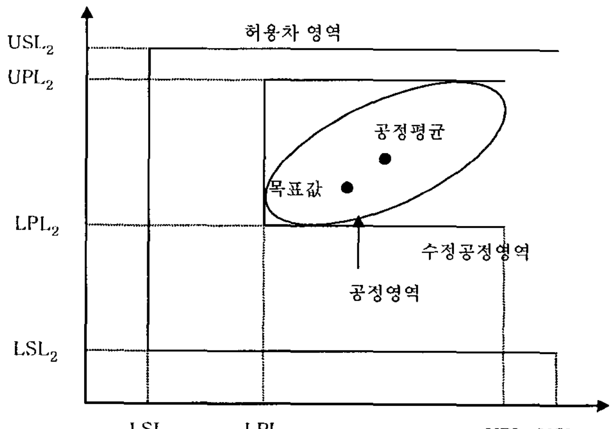
$E(L) = k[\sigma^2 + (\mu - T)^2]$, 망목특성의경우

$E(L) = k(\sigma^2 + \mu^2)$, 망소특성의경우

$E(L) = k\left[\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{3\sigma^2}{\mu^2}+1\right)\right]$, 망대특성의 경우

2.1.2 다변량 공정능력지수

다변량 공정능력지수와 단변량 공정능력지수와의 차이점은 정규분포의 모양이 단변량에서는 종모양인데 비해 다변량은 2차원의 타원형이나 3차원의 타원체와 같은 형태를 가지며, 확률적인 표현 방법도 간격이나 폭의 표현 방법에서 영역이나 부피를 나타내는 면적이나 부피를 표현하는 방법에 있다. 다변량 공정능력지수의 평가척도의 기준은 공정영역에 대한 규격영역의 비율을 사용하고 있으며, 수정영역으로서 공정영역을 수정한 다변량 공정능력벡터 C_{pM}과 허용차영역을 수정한 다변량 공정능력지수 MC_{pm}이 있다. 다변량 공정능력벡터 C_{pM}은 Shahriari, Hubele, Lawrence에 의해 제안된 공정능력지수로서 단변량일 때의 공정능력지수 C_p를 벡터(vector) 개념으로 확장한 것이라고 할 수 있다.



<그림 1> 규격영역과 수정 공정영역

<그림 1>에서 타원형은 이변량(bivariate)일 때 정규공정의 데이터들로 이루어진 분포의 공정영역을 의미하고, 가장 바깥쪽에 위치한 사각형은 규격의 상·하한 USL_1, LSL_1, USL_2, LSL_2을 나타내는 규격의 허용차영역을 의미한다. 공정영역인 타원형을 최소한으로 둘러싸고 있는 안쪽의 사각형은 공정능력의 평가의 대상이 되는 수정 공정영역 UPL_1, LPL_1, UPL_2, LPL_2을 의미한다.

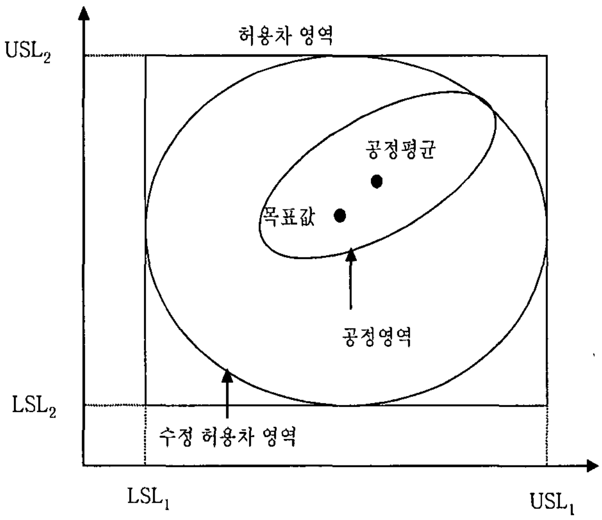
여기서 C_{pM}은 규격의 허용차영역과 수정공정영역의 면적 또는 부피의 비율로서 평가하는 다변량공정능력의

척도이고 식(4)와 같다.

$$C_{pM}=\left[\frac{\text{허용차영역의 면적 또는 부피}}{\text{수정 공정영역의 면적 또는 부피}}\right]^{\frac{1}{m}} \cdots\cdots\cdots (4)$$
$$=\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}(USL_i-LSL_i)}{\prod_{i=1}^{m}(UPL_i-LPL_i)}\right]^{\frac{1}{m}}$$

다변량 공정능력벡터 C_{pM}은 공정능력 평가에 있어서 공정능력, 목표치에 대한 공정평균의 위치, 규격한계에 대한 공정분포의 위치 등 3가지 구성요소에 대한 다양한 정보를 제공해주는 장점을 가지고 있으나 3가지 구성요소에 대한 벡터가 복잡하여 서로 혼동할 가능성이 있고, 목표치에 대해 민감하지 못하고 잠재 공정능력을 평가하는 단점을 가지고 있다.

MC_{pm}은 Taam, Subbaiah, Liddy에 의해 제안된 다변량 공정능력지수로서, 단변량의 C_{pm}을 벡터량으로 확장한 개념이며 목표치를 고려한 다변량 공정능력지수이다.



<그림 2> 공정영역과 수정 허용차영역

<그림 2>에서 타원형은 이변량(bivariate)일 때 정규공정의 데이터들로 이루어진 분포의 공정영역을 의미하고, 바깥쪽에 위치한 사각형은 규격의 상·하한 USL_1, LSL_1, USL_2, LSL_2을 나타내는 규격의 허용차영역을 의미한다. 여기서는 이전의 C_{pM}에서 공정영역을 수정하였던 것과는 달리 규격의 허용차 영역을 수정한다. 바깥쪽의 큰 타원형이 목표값을 중심으로 수정한 규격의 수정 허용차영역이다.

MC_{pm}은 규격의 수정 허용차영역과 공정영역의 면적 또는 부피의 비율로서 평가하는 다변량공정능력의 척도이고 식(5)와 같다.

$$MC_{pm}=\frac{\text{수정 허용차영역의 면적또는부피}}{\text{공정영역의 면적또는부피}}$$
$$=\frac{\text{수정 허용차영역의 면적 또는 부피}}{((X-\mu)'\Sigma_T^{-1}(X-\mu)\leq K(m))\text{의 면적또는부피}} \cdots\cdots (5)$$

여기서 m은 특성치의 수, X는 공정에서 측정된 데이터들의 벡터, μ는 평균벡터, Σ_T는 평균제곱오차 매트릭스이다. $K(m)$은 변수가 m개일 때의 χ^2분포의 99.73% 백분위수를 의미한다. 즉, $K(m)=\chi^2(m,0.9973)$의 값을 말한다.

다변량 공정능력지수 MC_{pm}은 목표치에 대한 공정능력지수가 민감하고, 분산성과 중심의 위치를 동시에 반영하고 있으며, 공정의 변화를 쉽게 파악할 수 있는 장점을 가지고 있으나 품질특성치가 많아지면 구하는 식이 복잡해지는 단점을 가지고 있다.

2.2 기대손실

2.2.1 단변량 기대손실

Taguchi의 손실함수 개념은 성능특성치가 목표치와 일치할 때는 손실이 발생하지 않으며 목표치로부터 멀어짐에 따라 손실이 크게 발생한다는 가정에서 이차식으로 근사화한 손실함수 $L(x)$로 나타내며 그 기대손실을 $E[L(x)]$이다.

즉, 특성치를 x, 목표치를 T라 놓고 x=T일 때 Taylor 전개에 의한 손실함수$L(x)$를 표현하면 다음과 같다.

$$L(x)=L(T)+L'(T)(x-T)+\frac{L''(T)}{2}(x-T)^2+\cdots \quad (6)$$

이때 망목특성치의 경우는 식(6)에서 2차항까지 포함시켜 근사화한 것이 손실함수이며 이 이차손실함수의 기대치를 구하여 기대손실을 구한다. 망소특성치의 경우에는 망목특성치의 목표치 T를 0(zero)으로 치환한 개념이며, 망대특성치는 특성치 x를 $x'=1/x$ 로 변환하여 x'를 망소특성치의 경우처럼 분석하여 손실함수와 기대손실을 구한다.

따라서 망목, 망소, 망대특성의 손실함수 $L(x)$와 이에 따른 기대손실 $E[L(x)]$는 다음 식(7)과 같다.

$$L(x)=k(x-T)^2$$

$$L(x)=kx^2$$

$$L(x)=k\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

이고

$$E[L(x)]=E[k(x-T)^2]=k[\sigma^2+(\mu-T)^2] \cdots\cdots (7)$$

$$E[L(x)]=E[kx^2]=k(\sigma^2+\mu^2)$$

$$E[L(x)]=E\left[\frac{k}{x^2}\right]=k\left[\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{3\sigma^2}{\mu^2}+1\right)\right]$$

이다.

2.2.2 다변량 기대손실

다변량 모형은 단변량의 손실함수를 확장하여 다변량의 손실함수를 유도한 것이다. 다변량일 경우에는 특성치의 수가 2개 이상이므로 특성치와 목표치 모두는 벡터(vector)량이 될 것이다. 특성치를 X, 목표치를 T라고 하면, X=T일 때 Taylor 전개에 의한 다변량 손실함수 $L(X,T)$는 다음 식(8)과 같다.

$$L(X,T)=L(T,T)+L'(T,T)(X-T) + \frac{1}{2}(X-T)^T L''(T,T)(X-T)+\cdots \cdots\cdots (8)$$

식(8)에서 2차 항까지의 손실함수를 근사화시키면

$$L(X,T)=\frac{1}{2}(X-T)^T H_L(T)(X-T) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i} k_{ij}(X_i-T_i)(X_j-T_j) \cdots\cdots (9)$$

이 된다.

이때 $H_L(T)$는 손실함수 L(X,T)를 위한 Hessian 행렬이고, k_i는 품질특성치 i와 관련된 손실계수를 ,k_{ij}는 품질특성치 i와 j에 관련된 손실계수를 의미한다.

손실함수 식(9)의 기대손실 $E[L(X,T)]$를 구하면 다음 식(10)과 같다.

$$E[L(X,T)] = E\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i} k_{ij}(X_i-T_i)(X_j-T_j)\right] = E\left[\sum_{i=1}^{m} k_i(X_i-T_i)^2\right]+E\left[\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{i-1} k_{ij}(X_i-T_i)(X_j-T_j)\right] \cdots\cdots (10)$$

이 된다.

3. 기대손실을 이용한 다변량 공정능력지수

본 연구에서는 품질특성은 망목특성이며 공정의 데이터는 다변량 정규분포를 따르는 경우를 가정하여 다변량 공정능력지수를 개발한다.

단변량 공정능력지수 C_{pm}을 벡터로 확장시킨 다변량 공정능력지수인 MC_{pm}에 공정의 산포 대신 기대손실을 이용한 다변량 공정능력지수 MC_{pm}^+를 개발하고자 한다. 단변량의 C_{pm}^+가 산포대신 기대손실을 이용한 것과 같은 방법으로 다변량 공정능력지수에서도 MC_{pm}에서 산포 대신 손실함수를 이용한 새로운 다변량 공정능력지수 MC_{pm}^+ 모형을 도출할 수 있을 것이다.

3.1 기 호

X	: 표본의 벡터
$\overline{X}$	: 표본의 평균벡터
T	: 목표치의 벡터
μ	: 공정의 평균벡터
m	: 품질특성치의 수
n	: 표본의 수
Σ	: 분산-공분산 매트릭스
Σ^{-1}	: 분산-공분산 매트릭스의 역행렬
Σ_T	: 평균제곱오차 매트릭스
D	: 목표치로부터 공정평균의 편차
$K(m)$	: $\chi^2(m, 0.9973)$의 값
$H_L(T)$	: Hessian 행렬
$\Gamma(\alpha)$	: 감마함수
ρ	: 상관계수
σ_i^2	: 특성치 i에 대한 분산
σ_{ij}	: 특성치 i와 j에 대한 공분산
k_i	: 특성치 i에 관련된 손실계수
k_{ij}	: 특성치 i와 j에 관련된 손실계수
$L(X,T)$	: X_i의 손실함수
$E[L(X,T)]$	: X_i의 기대손실
MC_{pm}	: 목표치를 고려한 다변량 공정능력지수
MC_{pm}^+	: 기대손실을 이용한 다변량 공정능력지수

3.2 기대손실 이용 다변량 공정능력지수 모형

목표치로부터 공정평균의 편차를 반영하고 있는 MC_{pm}의 모형은 C_{pm}의 모형을 다변량으로 확장한 것으로 목표치에 대한 공정능력의 변화의 민감도가 좋고, 분산성과 중심의 위치를 동시에 반영하고 있을 뿐 아니라 공정의 변화를 쉽게 파악할 수 있는 장점을 가지고 있는

척도이기 때문에 모형에서 사용한 산포 대신 손실함수를 적용하는 데 합당하다고 여겨진다. 먼저 단변량 C_{pm}과 가장 유사한 개념을 가진 다변량 공정능력지수 MC_{pm}을 분석해 본다. MC_{pm}은 C_{pm}과 동일하게 공정의 분산과 목표치로부터의 편차로 구성되어 있으며 단지 다른 점이 있다면 변수의 수에 따른 기하학적인 의미의 분포형태와 통계량의 구조가 벡터량이라는 것뿐이다. 다음의 식(11)와 식(12)에서 공정능력지수의 함수를 구성하고 있는 식의 구조를 비교해 보면 쉽게 이해할 수 있을 것이다. 단변량의 C_{pm}의 구조는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C_{pm} &= \frac{USL-LSL}{6\sqrt{[\sigma^2+(\mu-T)^2]}} \\ &= \frac{USL-LSL}{6\sigma\sqrt{1+\left(\frac{\mu-T}{\sigma}\right)^2}} \\ &= \frac{C_p}{\sqrt{1+\left(\frac{\mu-T}{\sigma}\right)^2}} \\ &= \frac{C_p}{D} \end{aligned} \quad \cdots\cdots (11)$$

다변량의 MC_{pm}의 구조는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &MC_{pm} \\ &= \frac{\text{수정 허용차영역의면적 또는 부피}}{\text{공정영역의 면적 또는 부피}} \\ &= \frac{\text{수정 허용차영역의면적 또는 부피}}{((X-\mu)'\Sigma_T^{-1}(X-\mu) \leq K(m))\text{의면적또는부피}} \\ &= \frac{\text{수정 허용차영역의면적 또는 부피}}{|\Sigma_T|^{\frac{1}{2}}(\pi K)^{\frac{m}{2}}[\Gamma(\frac{m}{2}+1)]^{-1}} \\ &= \frac{\text{수정 허용차영역의면적 또는 부피}}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}(\pi K)^{\frac{m}{2}}[\Gamma(\frac{m}{2}+1)]^{-1}[1+(\mu-T)'\Sigma^{-1}(\mu-T)]^{\frac{1}{2}}} \quad \cdots (12) \\ &= \frac{\text{수정 허용차영역}}{\text{공정데이터의 99.73\%가 포함되는 영역}} \\ &\quad \times \frac{1}{[1+(\mu-T)'\Sigma^{-1}(\mu-T)]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{C_p}{[1+(\mu-T)'\Sigma^{-1}(\mu-T)]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{C_p}{D} \end{aligned}$$

여기서 C_p는 수정 허용차 영역과 관련된 분산성(variability)을 나타내고 D는 목표치로부터 공정평균의 편차를 의미한다.

여기서 평균제곱오차매트릭스 Σ_T는

$$\begin{aligned} \Sigma_T &= E[(X-T)(X-T)'] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}(X_i-T_i)(X_j-T_j)\right] \end{aligned} \quad \cdots\cdots (13)$$

이다.

이변량인 경우에 대해서 나타내 보면 $\Sigma_T = |\Sigma| \times [1+(\mu-T)'\Sigma^{-1}(\mu-T)]$일 때 이변량에서의 공분산매트릭스($\Sigma$)와 공분산의 역행렬($\Sigma^{-1}$)은 각각 다음 식(14)와 같다.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} & \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \\ \frac{-\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots (14)$$

식(11)와 (12)를 비교해 보면 MC_{pm}은 단변량의 공정능력지수 C_{pm}과 유사하게 두 가지의 요소로 구성된 함수로 표현되고 있음을 알 수 있다. 즉, 단변량의C_{pm}에서 1개의 변수에 대한 것을 2개 이상의 변수들에 대한 벡터량을 적용하여 다변량의 MC_{pm}으로 확장한 것으로 볼 수 있다.

따라서 단변량 C_{pm}을 다변량으로 확장한 개념이 MC_{pm}이라는 결론을 토대로 기대손실함수의 식을 이용하여 단변량의 C_{pm}^+모형을 이용하여 다변량 공정능력지수 MC_{pm}^+의 모형을 제시한다.

단변량과 다변량에서의 손실함수의 식은 각각 다음 식(15)와 같다.

$$\begin{aligned} L(x) &= k(x-T)^2 \\ L(X,T) &= \frac{1}{2}(X-T)^T H_L(T)(X-T) \end{aligned} \quad \cdots\cdots (15)$$

손실함수의 경우에도 Hessian행렬로 이루어진 손실계수 k의 구조와 제곱오차의 손실이 품질특성치 m개에 대하여 벡터량으로 확장되었을 뿐 그 구조식은 동일함을 보이고 있다. 다변량 손실함수에서 손실계수들은 $H_L(T)$의 Hessian 행렬의 구성원소가 되며 다변량일 때의 손실계수의 대칭행렬은 다음 식(16)과 같다.

$$H_L(T)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 L}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_m}\\ \frac{\partial^2 L}{\partial X_2 \partial X_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial X_2 \partial X_m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial X_m \partial X_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_m \partial X_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial X_m^2}\end{bmatrix} \cdots (16)$$

따라서 k_{ii}, k_{ij}는

$$k_{ii}=k_i=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial X_i^2}\right)\Bigg|_{X_i=T_i,\, i=1,\cdots,m} \quad \cdots\cdots\cdots(17)$$

$$k_{ij}=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial X_i \partial X_j}\right)\Bigg|_{X_i=T_i,\, X_j=T_j,\, i\neq j=1,\cdots,m}$$

이다. 여기서 k_i는 특성치 i의 손실을 화폐단위로 환산해 주는 상수이고, k_{ij}는 특성치 i, j에 관련된 손실을 화폐단위로 환산해 주는 상수이다. 따라서 k_{ij}의 값은 다변량 손실함수의 성질을 이용하여 그 값에 대한 범위를 주어질 수 있다. 다변량 손실함수 L(X,T)는 다음 3가지의 성질을 가지고 있다.

첫째, 목표치 T에서 최소가 된다.
둘째, 목표치 T의 주변에서 아래로 볼록함수이다.
셋째, 모든 x에 대하여 $L(X,T)\geq 0$이다.

이러한 손실계수의 Hessian행렬을 이변량일 때 행렬식으로 나타내면 다음과 같다.

$$H_L(T)=k=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 L}{\partial X_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_2}\\ \frac{\partial^2 L}{\partial X_1 \partial X_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial X_2^2}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}k_{11} & \frac{1}{2}k_{12}\\ \frac{1}{2}k_{21} & k_{22}\end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(18)$$

$$=\begin{vmatrix}k_1 & \frac{1}{2}k_{12}\\ \frac{1}{2}k_{12} & k_2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2k_1 & k_{12}\\ k_{12} & 2k_2\end{vmatrix}$$

여기서 $H_L(T)$에 대한 필요조건은 $k_1\geq 0$, $k_2\geq 0$이고, $-2\sqrt{k_1k_2}\leq k_{12}\leq 2\sqrt{k_1k_2}$ 를 만족하여야 한다. 품질손실계수(quality loss coefficient) k_1, k_2, k_{12}는 만일 사용자가 특성치들 간의 중요도를 함께 고려하여 이들 상수의 값을 정했다고 하면 상수 k_1, k_2, k_{12}는 특성치들 간의 단위를 동일한 화폐단위로 일원화하는 역할과 특성치들에 가중치를 부여하는 역할을 한다.

단변량과 다변량에서의 기대손실을 비교해 보면 각각 다음 식(19), (20)와 같다.

$$E[L(x)]=E[k(x-T)^2] \quad \cdots\cdots\cdots(19)$$
$$=k[\sigma^2+(\mu-T)^2]$$

$$E[L(X,T)]$$
$$=E\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}k_{ij}(X_i-T_i)(X_j-T_j)\right]$$
$$=E\left[\sum_{i=1}^{m}k_i(X_i-T_i)^2\right]+E\left[\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{i-1}k_{ij}(X_i-T_i)(X_j-T_j)\right] \quad \cdots\cdots\cdots(20)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}k_i[(\mu_i-T_i)^2+\sigma_i^2]+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{i-1}k_{ij}[\sigma_{ij}+(\mu_i-T)(\mu_j-T_j)]$$

손실함수의 기대치로써 단변량에서의 기대손실과 다변량에서의 기대손실의 식을 비교해 보면, 분산과 목표치로부터 품질특성치의 편차의 제곱으로 이루어진 구조가 유사하며 단지 차이점은 $i\neq j$일 때의 품질특성치 간의 상관관계와 관련된 공분산 σ_{ij}에 영향을 받는다는 것이다.

변수들 간의 상관관계가 있느냐 없느냐에 따라 기대손실의 값에 차이가 있다. 다시 말해서 서로 독립이라면 공분산 σ_{ij}가 0(zero)이며, 서로 상관관계가 성립되면 공분산은 유효할 것이기 때문이다. 만약 X_i와 X_j가 서로 독립이면 식(20)에서 공분산 σ_{ij}의 값이 0(zero)가 되므로 모든 $i\neq j$에 대한 기대손실은 식(21)과 같다.

$$E[L(X,T)] \quad (21)$$
$$=\sum_{i=1}^{m}k_i[(\mu_i-T_i)^2+\sigma_i^2]+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{i-1}k_{ij}(\mu_i-T_i)(\mu_j-T_j)$$

또한 모든 i에 대하여 $\mu_i = T_i$인 경우의 기대손실은 식(22)와 같다.

$$E[L(X,T)] = \sum_{i=1}^{m} k_i \sigma_i^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (22)$$

이러한 개념들을 도입하여 다변량 손실함수의 기대손실을 이용한 새로운 공정능력지수를 MC_{pm}^{+}라 정의하고 그 모형을 다음의 식(23)과 같이 제안한다. 새로운 다변량 공정능력지수 MC_{pm}^{+}는 목표치로부터 공정의 평균제곱오차 Σ_T대신 다변량의 기대손실 E[L(X,T)]를 대입함으로써 공정의 산포에 의한 공정평가척도가 아닌 품질변동에 따른 손실에 의한 공정평가척도임에 그 의의가 있다.

$$MC_{pm}^{+} = \frac{\text{수정 허용차영역의 면적 또는 부피}}{E[L(X,T)]^{\frac{1}{2}} (\pi K)^{\frac{m}{2}} [\Gamma(\frac{m}{2}+1)]^{-1}} \cdots\cdots \quad (23)$$

기대손실을 이용한 다변량 공정능력지수 MC_{pm}^{+} 에 관한 산출과정은 다음과 같다.

(1) 수정 허용차 영역의 면적 또는 부피를 구한다.
(2) 품질특성치가 상호 독립일 때와 종속일 때를 구분한 후 기대손실 E[L(X,T)]를 구한다.
(3) 상수 π와 K(m)값을 구한 후 $(\pi K)^{\frac{m}{2}}$을 구한다. K(m)은 품질특성치가 m개 있을 때 χ^2분포의 99.73% 분위수 값을 의미한다.
(4) 감마함수 $\Gamma(\frac{m}{2}+1)^{-1}$을 구한다.
(5) 다변량 공정능력지수 MC_{pm}^{+} 를 구한다.

4. 수치 예

2개의 품질특성치 X_1, X_2가 이변량 정규분포를 따르고 각각의 규격은 USL_1=15, LSL_1=5 , USL_2=25, LSL_2=15 이다. 단, 손실계수는 $k_1 = 30$, $k_2 = 25$, $k_{12} = 10$으로 가정했을 때 공정의 분포는 $X_1 \sim N(10,1.0)$, $X_2 \sim N(20,1.5)$로 치우침이 없는 경우와 $X_1 \sim N(8,1.0)$, $X_2 \sim N(18,1.5)$로 치우침이 있는 경우의 상관계수 ρ=0.0, 0.6, 1.0에 대한 Cpm+, MCpm+를 구한 결과는 각각 다음 <표 1, 2>와 같다.

<표 1> 치우침이 없는 경우 Cpm+, MCpm+의 비교

	C_{pm}^{+}		MC_{pm}^{+}	
	X_1	X_2		
치우침이 없는 경우	0.3043	0.2722	ρ=0.0	0.2572
			ρ=0.6	0.2443
			ρ=1.0	0.2367

<표 2> 치우침이 있는 경우 Cpm+, MCpm+의 비교

	C_{pm}^{+}		MC_{pm}^{+}	
	X_1	X_2		
치우침이 있는 경우	0.1361	0.1421	ρ=0.0	0.1168
			ρ=0.6	0.1155
			ρ=1.0	0.1147

5. 결 론

최근에 기업들은 다양한 고객의 요구들을 만족시키기 위해 생산현장에서의 관리대상이 되는 품질특성치는 증가하고 있고 이러한 품질특성치 역시 동시에 관리해야 하는 현실에 직면해 있다. 대부분의 생산현장에서는 이러한 품질특성에 대한 평가를 공정에 대한 품질로서 보증하고 있으며, 이러한 많은 품질특성치를 갖는 공정에 대한 품질을 평가하는 척도로서 다변량 공정능력지수의 도입이 필요한 시점에 있다. 본 연구에서 제시한 기대손실을 이용한 다변량 공정능력지수는 변량들이 독립일 때뿐만 아니라 종속관계까지 고려하여 상관계수의 변화에 따라서도 공정을 평가할 수 있다는 특징을 가지고 있다. 따라서 본 연구에서 제안한 기대손실을 이용한 MCpm+은 목표치로부터 공정의 평균의 치우침을 반영하고 있을 뿐만 아니라 상관계수의 변화에 따라서도 평가할 수 있는 척도라는 장점을 가지고 있다는 것이다. 또한 공정의 산포에 의해서만 공정능력을 평가하는 방법들에 비해 손실함수를 이용하여 목표치로부터 품질의 변동에 따른 경제적 손실까지도 고려함으로써 보다 유용한 정보를 제공할 수 있는 공정평가의 척도라고 할 수 있다.

참고문헌

[1] 구본철, 고수철, 김종수, "손실함수에 의한 기대상대손실과 C_{pm}의 관련성", 공업경영학회지, Vol.20, No.41,

1997

[2] 김평구, 조중재, "혼합정규공정하에서 손실함수를 이용한 공정능력지수", 품질경영학회지, Vol.26, No.4, 1998

[3] 백재욱, 조진남, "공정능력지수에 대한 비평과 올바른 공정능력분석 절차", 품질경영학회지, Vol.27, No.2, 1999

[4] 정영배, "이차손실함수를 이용한 유동적인 공정수행척도", 공업경영학회지 제18권, 제36호, 1995

[5] Boyles, R.A., "The Taguchi Capability index", Journal of Quality Technology, Vol.23, No.1, pp.17-26, 1991

[6] Braker, T.B., "Quality Engineering by Design : Taguchi's Philosophy", Quality Assurance, Vol.13, No.3, pp.72-80, 1987

[7] Chan, L.K., Chung, S.W, Spiring, F.A., "A New Measure of Process Capability : Cpm", Journal of Quality Technology, Vol.20, No.3, pp.162-175, 1988

[8] Kapur, K.C. and Cho, B.R., "Economic Design of the Specification region for Multiple Quality Characteristics", IIE Transactions, Vol.28, No.3, pp.237-248, 1996

[9] Taam, W., Subbaiah, P. and Liddy, J.W., "A Note on Multivariate Capability Indices", Journal of Applied Statistics 20, pp.339-351, 1993

[10] Wang, F.K., Hubele, N.F., Lawrence, F.P., Miskulin, J.D. and Shahriari, H., "Comparison of Three Mutivariate Process Capability Indices", Journal of Quality Technology, Vol.32, No.3, pp.263-275, 2000