

특성비 지정법에 의한 시스템 응답속도 및 Overshoot 제어

The Study of the System Response Time and Overshoot Control using Characteristic Ratio Assignments

김 한 실*, 김 대 관, 노 회 안
(Han-Sil Kim, Dae-Kwan Kim, and Hian Rho)

Abstract : This paper presents that a transient response can be characterized by certain parameters which are correlated to characteristic polynomial coefficients. These are characteristic ratios and characteristic pulsataces by P. Naslin [4]. We have developed an approach to control directly the transient response. Firstly, speed of the response can be controlled by reconstruction form via multipliable characteristic pulsataces. Secondly, overshoot is controlled by reconstruction form via multipliable characteristic ratios. These formulas can be independently characterized by the system overshoot and the response time to a step input.

Keywords : coefficient ration assignment, transient response, overshoot, speed of the response

I 서론

제어기 설계를 할 때 제어기 성능을 평가하는 중요지표는 설계된 제어기가 명령을 얼마나 잘 추종하는가, 그리고 설계된 제어기가 전체 시스템을 얼마나 안정 또는 강인하게 할 수 있는 것이다. 이와 같은 조건을 만족시키기 위해 제어기 설계에 대해 많은 연구가 진행되어 그 결과 다양한 제어 이론들이 나오게 되었다. 대표적으로 H_{∞} , H_2 , μ , QFT 등이 있다. 그러나 이러한 제어기는 과도상태(응답속도 및 overshoot)의 제어에 대해서는 설계시 과도상태 사양을 고려하여 설계할 수 없으며, 또한 비록 설계되더라도 설계된 제어기가 고차로 되어 제어기 자체의 불확실성에 문제가 있다는 연구 결과들[8]이 나왔다.

이에 반해 과도상태 제어에 관심을 가진 제어방식이 Manabe가 제안한 CDM(Coefficient Diagram Method: 계수도법)[1]을 통해서 그 연구 결과들이 많이 발표되었다. 특히 CDM을 이용하여 설계된 제어기는 저차 제어기 설계가 가능할 뿐만 아니라 강인성[6,7]도 보장한다. 또한 이의 변형된 방식인 CRA(Characteristic Ratio Assignment: 특성비)[2] 제어 방식이 나왔으며 CDM제어 방식이 시스템이 차수에 관계없이 고정된 안정도 지수(stability index)를 통해서 제어기를 설계하는데 반하여, CRA 제어방식은 maximally flat [10] 함수의 계수를 이용하여 과도상태에 중점을 둔 제어기를 설계한다.

이렇게 특성방정식의 계수의 특정비를 이용하여 제어하는 방식이 1960년대 P.Naslin[4]에 의해 처음 제기 되었다.

본 논문은 P. Naslin의 결과 및 CDM, CRA를 이용하여 변형된 특성방정식의 계수비의 조절을 통해 과도상태(응답속도 및 overshoot)제어를 위한 것이다. CDM제어방식은 시스템의 차수에 상관없이 고정된 안정도 지수를 사용하여 제어기를

설계하는데 이는 여전히 미약한 overshoot를 가지게 된다. CRA제어방식은 Butterworth 함수처럼 maximally flat[10] 함수의 계수를 이용하여 제어기를 사용한다. 그러나 본 논문에서는 고정된 안정도 지수나 maximally flat 함수의 계수에 국한되지 않고 보다 일반적인 계수로의 확장이 가능함을 보인다. 여기서 특성방정식의 계수 선정을 통한 시스템의 안정성에 대한 연구는 이미 1978년 Lipatov 및 Sokolov에 의한 안정 및 불안정 충분조건[3]에 근거하며 CDM 및 CRA에서도 동일 조건을 사용한다.

본 논문에서는 과도 응답속도 및 overshoot의 2가지 제어 목적을 위해 각각에 대한 해결방법을 제시한다.

첫째, 특성방정식의 특성 천이비(characteristic pulsataces) 값에 양의 실수배 하여 재설계된 시스템에서 응답속도의 제어가 됨을 확인한다.

둘째, 특성방정식의 특성비(characteristic ratios)의 값의 양의 실수배를 통해 재설계된 시스템은 overshoot가 제어됨을 확인한다.

이상의 결과로 과도상태의 제어가 가능하며, 이는 시간영역에서의 설계 조건을 잘 이용할 수 있음을 의미한다. 또한 극 배치방법에 따른 overshoot 없는 극의 위치를 확인할 수 있다.

II 응답속도 제어

시스템을 제어할 때 응답속도 조절은 중요한 과제이다. 같은 응답 속도 개형을 유지하면서 시간축 상에서 시간의 수축 및 팽창 효과를 기대함은 시간영역 설계에서 필수적인 사항이다. 시스템의 차수가 낮을 경우 시스템의 응답속도는 해석적으로 밝힐 수 있다. 그러나, 시스템의 차수가 고차가 될 때 그 해석은 어려워진다. 따라서 본 논문에서는 페투프 특성방정식의 특성 천이비를 조절함으로써 시스템의 차수가 고차가 되더라도 해석적으로 응답속도가 제어가 가능함을 고찰한다.

P. Naslin는 전달함수가 pole만을 가지고 있을 때 시스템의 damping을 조절할 수 있는 문제에 대해서만 고찰 하였으나,

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2004. 10. 5., 채택확정 : 2005. 8. 15.

김한실 : 울산대학교 전기전자정보시스템공학부(hskim@ulsan.ac.kr)

김대관 : HLDS (Hitachi-LG Data Storage)(hlds_dk@lge.com)

노회안 : (주) Techsign Light Panel(hrho@harmail.net)

※ 본 연구는 울산대학교 연구비의 지원에 의하여 연구됨.

CDM, CRA에서 Naslin의 연구결과를 토대로 일반화 시정수라는 시간조절 인자를 제시함으로써 결과를 도출했다.

본 논문에서는 다음과 같이 정의한 (1)-(3)을 통해서 시간조절의 또 다른 해법이 존재함을 확인할 수 있다.

시스템 전달함수의 특성방정식을 가정한다.

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \text{ for } a_i > 0, i = 0, \dots, n$$

특성비:

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2}, \alpha_2 = \frac{a_2^2}{a_1 a_3}, \dots, \alpha_{n-1} = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2} a_n} \quad (1)$$

특성 천이비:

$$\beta_0 = \frac{a_0}{a_1}, \beta_1 = \frac{a_1}{a_2}, \dots, \beta_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \quad (2)$$

특성 천이비와 특성비는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1}{\beta_0}, \alpha_2 = \frac{\beta_2}{\beta_1}, \dots, \alpha_{n-1} = \frac{\beta_{n-1}}{\beta_{n-2}} \quad (3)$$

정리 1 [12]: 전달함수 $G_g(s)$ 가 아래와 같이 pole만을 가진 시스템이며 특성방정식의 특성 천이비를 k 배하여 재설계된 전달함수 $G_a(s)$ 는

$$G_g(s) = \frac{a_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \text{ for } a_i > 0 \quad (4)$$

$$G_a(s) = \frac{a'_0}{a'_n s^n + a'_{n-1} s^{n-1} + \dots + a'_1 s + a'_0} \quad (5)$$

$$= \frac{k^n a_0}{a_n s^n + k a_{n-1} s^{n-1} + k^2 a_{n-2} s^{n-2} + \dots + k^{n-2} a_2 s^2 + k^{n-1} a_1 s + k^n a_0}, \text{ for } a'_i > 0$$

k 를 조절함으로써 단위계단 입력에 대한 응답속도가 조절된다. 여기서 k 는 임의의 양의 실수이다. 그러면 $y_g(\frac{t}{k}) = y_a(t)$ 이다.

증명: 일반성을 잃지않고 $a_n = 1$ 이라 가정할 수 있다. (4)의 characteristic coefficient(특성 계수)들은 다음과 같다.

$$a_n = 1, a_{n-1} = \prod_{i=n-1}^{n-1} \beta_i, \dots, a_2 = \prod_{i=2}^{n-1} \beta_i, a_1 = \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i, a_0 = \prod_{i=0}^{n-1} \beta_i \quad (6)$$

위의 같은 방법으로 (2)에 적용시키면

$$a'_n = 1, a'_{n-1} = k \prod_{i=n-1}^{n-1} \beta_i, \dots, a'_2 = k^{n-2} \prod_{i=2}^{n-1} \beta_i, a'_1 = k^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i, a'_0 = k^n \prod_{i=0}^{n-1} \beta_i \quad (7)$$

(4),(5)의 제로 상태 응답은 다음과 같이 각각 나타낼 수 있다.

$$\prod_{i=0}^{n-1} \beta_i r(t) = y_g^{(n)}(t) + \prod_{i=n-1}^{n-1} \beta_i y_g^{(n-1)}(t) + \dots + \prod_{i=2}^{n-1} \beta_i y_g^{(2)}(t) + \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i y_g^{(1)}(t) + \prod_{i=0}^{n-1} \beta_i y_g(t) \quad (8)$$

$$k^n \prod_{i=0}^{n-1} \beta_i r(t) = y_a^{(n)}(t) + k \prod_{i=n-1}^{n-1} \beta_i y_a^{(n-1)}(t) + \dots + k^{n-2} \prod_{i=2}^{n-1} \beta_i y_a^{(2)}(t) + k^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i y_a^{(1)}(t) + k^n \prod_{i=0}^{n-1} \beta_i y_a(t) \quad (9)$$

여기서 $y_g(t)$ 가 다음의 time scaling factor를 사용하면

$$\tau = \frac{1}{k} \cdot t \quad (10)$$

$$y_g(\frac{1}{k} \cdot t) = y_g(\tau) \quad (11)$$

$$dt = k \cdot d\tau \quad (12)$$

$y_g(\tau)$ 의 미분항은 $y_g(t)$ 의 미분항으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{dy_g(\frac{1}{k}t)}{dt} = \frac{dy_g(\tau)}{k d\tau} = \frac{1}{k} \cdot \frac{dy_g(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{k} y_g^{(1)}(\tau)$$

$$\frac{d^2 y_g(\frac{1}{k}t)}{dt^2} = \frac{d^2 y_g(\frac{1}{k}t)}{k^2 d\tau^2} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{d^2 y_g(\tau)}{d\tau^2} = \frac{1}{k^2} \cdot y_g^{(2)}(\tau) \quad (13)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n y_g(\frac{1}{k}t)}{dt^n} = \frac{d^n y_g(\tau)}{k^n d\tau^n} = \frac{1}{k^n} \cdot \frac{d^n(\tau)}{d\tau^n} = \frac{1}{k^n} y_g^{(n)}(\tau)$$

(13)을 재정리하여 (8)에 대입하면 다음과 같다.

$$\prod_{i=0}^{n-1} \beta_i r(\tau) = \frac{1}{k^n} y_g^{(n)}(\tau) + \prod_{i=n-1}^{n-1} \beta_i \frac{1}{k^{n-1}} y_g^{(n-1)}(\tau) + \dots + \prod_{i=2}^{n-1} \beta_i \frac{1}{k^2} y_g^{(2)}(\tau) + \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i \frac{1}{k} y_g^{(1)}(\tau) + \prod_{i=0}^{n-1} \beta_i y_g(\tau) \quad (14)$$

(14) 양변에 k^n 을 곱하면 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$k^n \prod_{i=0}^{n-1} \beta_i r(\tau) = y_g^{(n)}(\tau) + k \prod_{i=n-1}^{n-1} \beta_i y_g^{(n-1)}(\tau) + \dots + k^{n-2} \prod_{i=2}^{n-1} \beta_i y_g^{(2)}(\tau) + k^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \beta_i y_g^{(1)}(\tau) + k^n \prod_{i=0}^{n-1} \beta_i y_g(\tau) \quad (15)$$

(15)의 해는 (9)의 해와 동일함을 알 수 있다.

따라서 $y_g(\frac{1}{k} \cdot t) = y_g(\tau) = y_a(t)$ 가 된다.

또한 $\alpha_k = \frac{a_0}{\beta_{k-1} \beta_{k-2} \dots \beta_1 \beta_0} = \frac{a_0}{\alpha_{k-1} \alpha_{k-2}^2 \dots \alpha_1^{k-1} \beta_0^k}, \tau = \frac{1}{\beta_0}$ 로 놓

으면 (τ 는 일반화 시정수[2]) 정리 1의 조건인 모든 특성 천이비를 k 배하는 것은 [2]의 정리 1에서 τ 를 $1/k$ 하는 것과 등가이다. ■

Note 1: 정리1 (5)에서 $k > 1$ 인 임의의 양의 실수를 통해 설계된 페루프 특성방정식의 전달함수는 응답속도가 빨라지며, $0 < k < 1$ 인 임의의 실수를 통해 설계된 페루프 특성방

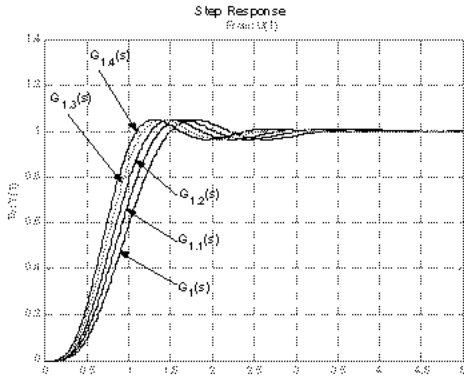


그림 1. 전달함수 $G_k(s)$ 의 계단응답 ($k=1,1.1,\dots,1.4$).
Fig. 1. Step response of the system $G_k(s)$.

정식의 전달함수는 응답속도가 느려진다.

예제 1: 4차 특성방정식으로 구성된 폐루프 전달함수는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{a_0}{p(s)} = \frac{1}{0.01154s^4 + 0.08877s^3 + 0.3593s^2 + 0.909s + 1}$$

정리 1에 의한 특성방정식의 특성 천이비를 k 배 하여 재 설계된 전달함수를 생각해 보자. 단, 특성방정식의 특성비는 변함이 없다.

$$G_k(s) = \frac{a_0}{p_k(s)} = \frac{k^4}{0.012s^4 + 0.089ks^3 + 0.36k^2s^2 + 0.91k^3s + k^4}$$

Note 1에 의하여 $k > 1$ 을 만족하는 양의 실수 k 를 증가시키면서 전달함수 $G_k(s)$ 의 시간응답을 살펴보면 다음과 같다.

Note 1에서 특성방정식의 특성 천이비를 양의 실수 k 배 ($k > 1$) 하여 새로 설계된 시스템의 응답속도는 빨라지며 시간축 상에서 수축효과를 가져온다.

반대로 $0 < k < 1$ 을 만족하는 양의 실수에 대해서는 응답속도가 느려지게 된다.

여기서 응답의 개형 중 크기성분은 즉 전체적인 그래프 개형은 그대로 유지한다는 것이다. 이것은 응답속도제어와 overshoot 제어와의 관계가 독립적임을 말한다.

III. Overshoot 제어

과도상태 제어는 제어시스템 설계에 있어서 중요한 사항임에도 불구하고 그것을 다루는 제어이론이 많지 않은 것이 사실이다. 특히 overshoot 없이 제어의 목적을 달성하는 것은 매우 중요한 문제이다. 그 동안 과도상태에 대한 연구결과가 CDM[1], CRA[2]를 통해서 활발히 연구가 되어왔다. 특히 정밀제어가 요구되는 부분에서는 overshoot가 없는 응답을 얻어야 한다.

일반적으로 전체 시스템의 폐루프 전달함수가 고차가 되면 overshoot가 없는 근의 위치를 아는 것은 어려운 일이다. 이번 장을 통해서 폐루프 특성방정식의 특성비의 조절을 통해서 overshoot 제어가 됨을 고찰하며, overshoot가 없는 근의 위치를 살펴본다.



그림 2. Kessler의 다중루프 구조.
Fig. 2. Kessler's MLS (Multi-Loop Structure).

CDM[1]은 시스템의 차수에 상관없이 적용할 수 있는 안정도 지수를 통해서 overshoot가 거의 없는 응답을 얻을 수 있는 계수비를 알수있다.

CRA[2]에서는 버터워스 필터의 계수 조작을 통해서 overshoot 제어가 가능함을 보였다.

본 논문에서는 보다 일반적인 계수 항이더라도 overshoot가 제어됨을 고찰한다.

Kessler [5]의 다중 루프 구조 (Kessler's Multiloop Structure: MLS)가 가지는 전달함수의 특성에 대해 고찰해 본다. Kessler의 다중루프 구조는 시정수를 포함한 적분기만으로 된 구조이며 아래와 같이 구성된다.

n 개의 적분기로 구성된 다중루프 구조의 전체 전달함수는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{1}{(T_n \cdot T_{n-1} \cdots T_1) s^n + (T_n \cdot T_{n-1} \cdots T_2) s^{n-1} + \cdots + (T_n \cdot T_{n-1}) s^2 + (T_n) s + 1}$$

$, T_{i+1} > T_i > 0 \text{ for } i=1,2,\dots,n-1$

Kessler의 다중루프 구조는 적분기의 시정수 T_i 의 조절로 주파수 영역 설계에 있어서 주파수 응답의 break point설계 방법을 제시한다. 임의의 근 위치는 T_i 의 조절로 가능함을 알 수 있으며 CDM[1]은 Kessler의 다중루프 구조를 이론적 근거로 제시하고 있다. 본 논문에서도 Kessler의 다중루프 구조를 참조한다.

사실 1: 특성방정식의 특성비가 모두 k 인 pole만으로 구성된 전달함수 $G(s)$ 는 Kessler의 다중 루프 구조로 표현할 수 있다.

$$G(s) = \frac{a_0}{P(s)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n} s^n + \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1} s^{n-1} + \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3} s^{n-2} + \cdots + \left(\frac{1}{k}\right) s^2 + s + 1}$$

$$= \frac{1}{(T_n \cdot T_{n-1} \cdots T_1) s^n + (T_n \cdot T_{n-1} \cdots T_2) s^{n-1} + \cdots + (T_n \cdot T_{n-1}) s^2 + (T_n) s + 1}$$

T_i 는 다음과 같이 정의된다.

$$T_i = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-i}, \quad \frac{T_{i+1}}{T_i} = k, \quad i=1,\dots,n-1.$$

즉

$$T_1 = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1}, T_2 = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-2}, T_3 = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-3}, \dots, T_{n-2} = \left(\frac{1}{k}\right)^2, T_{n-1} = \left(\frac{1}{k}\right), T_n = 1$$

따라서 $k > 1$ 인 경우에 $1 > T_{i+1} > T_i > 0$ 이다.

여기서 특성비는

$$\alpha_1 = \frac{a_1^2}{a_0 a_2} = k, \quad \alpha_2 = \frac{a_2^2}{a_1 a_3} = k, \quad \dots, \quad \alpha_{n-1} = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2} a_n} = k \quad \text{이다.}$$

사실 2: 사실 1의 수식에서 $k(k > 2)$ 를 증가 시킬수록 전달함수 $G(s)$ 의 주파수 응답은 단조 감소(monotonically decreasing)에서 엄격한 감소(strictly decreasing)형태로 된다[2] 즉, $\omega_1 < \omega_2$ 이면 $|G(j\omega_1)| > |G(j\omega_2)|$ 이다. 여기서 $|G(j\omega)|$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{a_0^2}{|P(j\omega)P(-j\omega)|} = \frac{1}{Q(\omega)}, \quad a_0 = 1,$$

$$Q(\omega) = 1 + \frac{k-2}{k}\omega^2 + \frac{k^4-2k^3+2}{k^6}\omega^4 + \frac{k^9-2k^8+2k^5-2}{k^{15}}\omega^6 + \dots + \frac{k-2}{k^{n^2-3n+3}}\omega^{2(n-1)} + \frac{1}{k^{n^2-n}}\omega^{2n}$$

여기서 $Q(\omega)$ 는 다음의 관계식을 가진다.

$$Q(\omega_2) > Q(\omega_1), \text{ for } \omega_1 < \omega_2$$

따라서 $|G(j\omega_1)| > |G(j\omega_2)|$, for $\omega_1 < \omega_2$ 가 되어 전달함수 $G(s)$ 는 엄격한 감소(strictly decreasing)형태로 된다.

정리 2 [12]: 전달함수 $G_g(s)$ 가 아래와 같이 Pole만을 가진 시스템이며 특성방정식의 특성비를 k 배 하여 재설계된 전달함수 $G_a(s)$ 는

$$G_g(s) = \frac{a_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \text{ for } a_i > 0 \quad (16)$$

$$G_a(s) = \frac{a'_0}{a'_n s^n + a'_{n-1} s^{n-1} + \dots + a'_1 s + a'_0} \quad (17)$$

$$= \frac{\frac{1}{k^2} \frac{1-n}{2} a_0}{a_n s^n + k^{n-1} a_{n-1} s^{n-1} + k^{2n-3} a_{n-2} s^{n-2} + \dots + k^{\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n-1} a_2 s^2 + k^{\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n} a_1 s + k^{\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n} a_0}, \text{ for } a'_i > 0$$

아래의 세 조건을 만족할 경우 k 를 증가시킬수록 전달함수의 overshoot는 감소한다.

조건 1: 전달함수 $G_g(s)$ 의 특성 방정식의 계수는 Hurwitz

안정조건을 만족한다.

조건 2: $k > 2$ 인 양의 실수이다.

조건 3: 모든 특성비는 1보다 크다.

이때 임의의 시간 t 에 대하여 k 가 $k_1 > k_2 > 1$ 이면 $\sup_{k-k_1} y_a(t)$

$$\sup_{k-k_1} y_a(t) < \sup_{k-k_2} y_a(t) < \sup_{k-1} y_a(t) = \sup y_g(t) \quad \text{이다.}$$

증명: $G_g(s)$ 와 $G_a(s)$ 의 특성 천이비, $\beta_0 = \beta'_0$ 라 가정한

다. 여기서 $\beta_0 = \frac{a_0}{a_1}, \beta'_0 = \frac{a'_0}{a'_1}$ 이다. (1), (2) 그리고 (3)을 이용하여 (16) 과 (17) 에서 나타나는 특성계수 a_i 를 다음과 같이 나타낼 수 있다[2].

$$a_1 = \frac{a_0}{\beta_0}$$

$$a_i = \frac{a_0}{\alpha_{i-1} \alpha_{i-2} \alpha_{i-3} \dots \alpha_2 \alpha_1 \beta_0^i}, \quad i = 2, \dots, n$$

여기서 특성비 α_i 와 특성 천이비 β_i 는 다음과 같다.

$$\alpha_i = \frac{a_i^2}{a_{i-1} a_{i+1}} = \frac{\beta_i}{\beta_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$\beta_i = \frac{a_i}{a_{i+1}}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

가정에 의해서 전달함수 $G_g(s)$ 의 특성비 α_i 와 재설계된 전달함수 $G_a(s)$ 의 특성비 α'_i 는 다음의 관계식을 가진다.

$$\alpha'_i = k \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

따라서 재설계된 전달함수 $G_a(s)$ 의 특성계수 a'_i 는 다음과 같다.

$$a'_1 = \frac{a'_0}{\beta'_0} = \frac{a'_0}{\beta_0} = \frac{a_1}{a_0} a'_0$$

$$a'_i = \frac{a'_0}{\alpha'_{i-1} \alpha'_{i-2} \alpha'_{i-3} \dots \alpha'^{n-2} \alpha'^{n-1} \beta_0^n}$$

$$= \frac{a'_0}{k \alpha_{i-1} \cdot k^2 \alpha_{i-2} \cdot k^3 \alpha_{i-3} \dots k^{i-2} \alpha_2 \cdot k^{i-1} \alpha_1 \cdot \beta_0^n}$$

$$= \frac{a'_0}{k^{1+2+3+\dots+(i-2)+(i-1)} \alpha_{i-1} \alpha_{i-2} \alpha_{i-3} \dots \alpha_2 \alpha_1 \cdot \beta_0^n}$$

$$= \frac{a'_0}{k^{\frac{i(i-1)}{2}} \alpha_{i-1} \alpha_{i-2} \alpha_{i-3} \dots \alpha_2 \alpha_1 \cdot \beta_0^n}$$

$$a'_i = \frac{a'_0 \beta_0^i}{k^2 a_0 \beta_0^n} a_i = \frac{a'_0}{k^2 a_0} a_i, \quad i = 2, \dots, n$$

재설계된 전달함수 $G_a(s)$ 를 다시 나타내면

$$G_a(s) = \frac{a'_0}{a'_n s^n + a'_{n-1} s^{n-1} + \dots + a'_1 s + a'_0}$$

$$= 1 / \left\{ \left(\frac{a'_n}{a'_0} \right) s^n + \left(\frac{a'_{n-1}}{a'_0} \right) s^{n-1} + \dots + \left(\frac{a'_1}{a'_0} \right) s + 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{\left\{ \left(\frac{1}{k} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{k} \right)^{n-2} \dots \left(\frac{1}{k} \right)^2 \frac{1}{k} \left(\frac{a_n}{a_0} \right) s^n + \left(\frac{1}{k} \right)^{n-2} \dots \left(\frac{1}{k} \right)^2 \frac{1}{k} \left(\frac{a_{n-1}}{a_0} \right) s^{n-1} + \dots + \left(\frac{a_1}{a_0} \right) s + 1 \right\}}$$

여기서 $\frac{a_i}{a_0} = \frac{1}{\alpha_{i-1} \alpha_{i-2} \alpha_{i-3} \dots \alpha_2 \alpha_1 \beta_0^i}, \quad i = 2, \dots, n$ 이라는 사

실을 이용하면 전달함수 $G_a(s)$ 는 다음과 같이 된다.

$$G_a(s) = \frac{1}{\left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{k}\right)^{n-2} \dots \left(\frac{1}{k}\right)^2 \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\alpha_{n-1}}\right) \left(\frac{1}{\alpha_{n-2}}\right)^2 \dots \left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{n-1} \frac{1}{\beta_0^n} s^n + \left(\frac{1}{k}\right)^{n-2} \dots \left(\frac{1}{k}\right)^2 \frac{1}{k} \left(\frac{1}{\alpha_{n-2}}\right) \left(\frac{1}{\alpha_{n-3}}\right)^2 \dots \left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^{n-3} \left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^{n-2} \frac{1}{\beta_0^{n-1}} s^{n-1} + \dots + \left(\frac{1}{k}\right) \left(\frac{1}{\alpha_1}\right) \frac{1}{\beta_0^2} s^2 + \frac{1}{\beta_0} s + 1}$$

$$= \frac{1}{(T_n T_{n-1} \dots T_1) s^n + (T_n T_{n-1} \dots T_2) s^{n-1} + \dots + (T_n T_{n-1}) s^2 + (T_n) s + 1}$$

$$T_i = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-i} \left(\frac{1}{\beta_0}\right) \prod_{k=1}^{n-i} \frac{1}{\alpha_k}, \quad i=1, \dots, n-1$$

$$T_n = \frac{1}{\beta_0}, \quad T_{n-1} = \left(\frac{1}{k}\right) \left(\frac{1}{\beta_0}\right) \left(\frac{1}{\alpha_1}\right), \quad T_{n-2} = \left(\frac{1}{k}\right)^2 \left(\frac{1}{\beta_0}\right) \left(\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}\right),$$

$$\dots,$$

$$T_3 = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-3} \left(\frac{1}{\beta_0}\right) \left(\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n-3}}\right),$$

$$T_2 = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{\beta_0}\right) \left(\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n-3} \alpha_{n-2}}\right),$$

$$T_1 = \left(\frac{1}{k}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{\beta_0}\right) \left(\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n-3} \alpha_{n-2} \alpha_{n-1}}\right)$$

여기서 사실 1과 사실 2로부터 재설계된 전달함수 $G_a(s)$ 가 k 를 증가할수록 오버슈트가 감소함을 보여주기 위해서 전달함수 $G_a(s)$ 가 Kessler의 다중루프구조임을 보여주면 된다.

즉 $0 < T_i < T_{i+1} < 1$ 여기서 $\frac{T_{i+1}}{T_i}$ 는

$$\frac{T_{i+1}}{T_i} = \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^{n-i-1} \left(\frac{1}{\beta_0}\right) \prod_{k=1}^{n-i-1} \frac{1}{\alpha_k}}{\left(\frac{1}{k}\right)^{n-i} \left(\frac{1}{\beta_0}\right) \prod_{k=1}^{n-i} \frac{1}{\alpha_k}} = k \alpha_{n-i}$$

이며 특성비 α_i 가 다음 조건 $\alpha_i > 1, \quad i=1, \dots, n-1$ 을 만족하므로 다음의 관계 $0 < T_i < T_{i+1} < 1$ 가 성립됨을 알 수 있다. $G_a(s)$ 를 다시쓰면

$$G_a(s) = \frac{\alpha_0}{P(s)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n} \kappa_n s^n + \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1} \kappa_{n-1} s^{n-1} + \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3} \kappa_{n-2} s^{n-2} + \dots + \left(\frac{1}{k}\right) \kappa_2 s^2 + \kappa_1 s + 1}$$

여기서

$$\kappa_i = \prod_{j=n+1-i}^n \Gamma_j, \quad i=1, \dots, n$$

$$\Gamma_n = \frac{1}{\beta_0}, \quad \Gamma_j = \left(\frac{1}{\beta_0}\right) \prod_{k=1}^{n-j} \frac{1}{\alpha_k}, \quad i=1, \dots, n-1,$$

따라서 위의 전달함수 $G_a(s)$ 는 사실 2에서와 같은 방법으로 임계 감소함수가 됨을 알 수 있다. ■

예제 2: (CASE 1 : Butterworth polynomial)

다음과 같은 Butterworth polynomial을 가지는 6차 시스템을 생각해 보자.

$$G(s) = \frac{a_0}{p(s)} = \frac{1}{s^6 + 3.8637s^5 + 7.4641s^4 + 9.1416s^3 + 7.4641s^2 + 3.8637s + 1}$$

위의 시스템은 정리 2의 조건 1을 만족하는 안정한 시스템이다. 여기에서 정리 2를 통해서 특성방정식의 특성비를 k 배 하여 재설계된 전달함수를 생각해 보면 다음과 같다.

$$G_k(s) = \frac{a_0}{p_k(s)} = \frac{k^{15}}{s^6 + 3.8637k^3s^5 + 7.4641k^9s^4 + 9.1416k^{12}s^3 + 7.4641k^{14}s^2 + 3.8637k^{15}s + k^{15}}$$

정리 2의 조건 2에 의거 $k \geq 1$ 를 만족하는 실수에 대하여 k 를 증가 시키면서 시스템의 시간응답 과 근의 위치 그리고 주파수 응답을 살펴보면 그림 3, 4, 5와 같다.

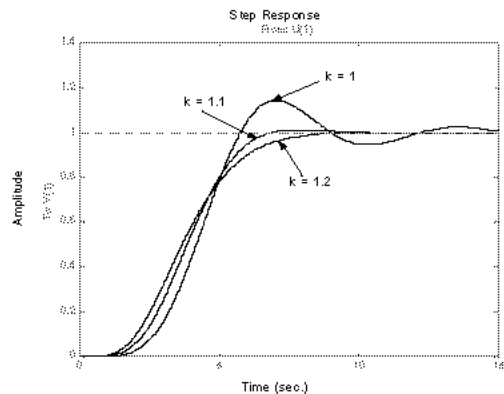


그림 3. 스텝 응답 (버터워스).

Fig. 3. Step response (Butterworth).

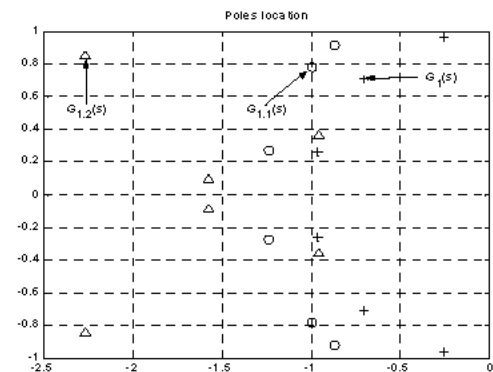


그림 4. 근 위치 (버터워스).

Fig. 4. Pole placement (Butterworth).

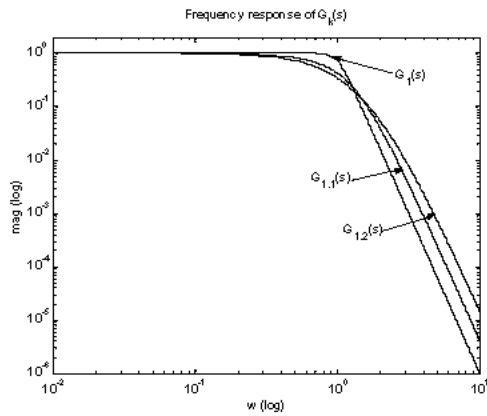


그림 5. 주파수 응답 (버터워스).
Fig. 5. Frequency response (Butterworth).

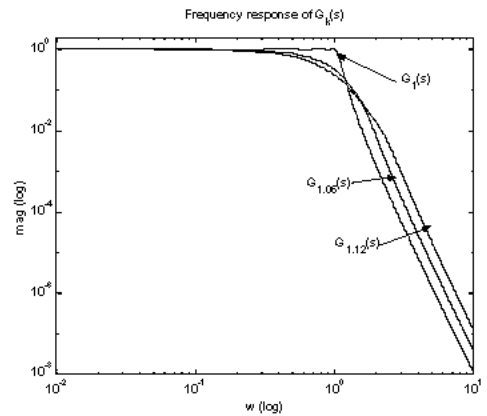


그림 8. 주파수 응답 (체비체프).
Fig. 8. Frequency response (Chebyshev).

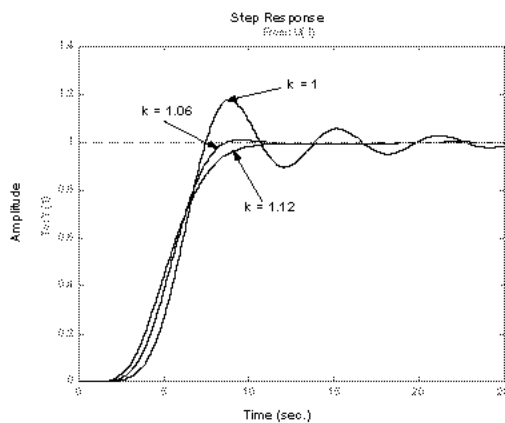


그림 6. 스텝 응답 (체비체프).
Fig. 6. Step response (Chebyshev).

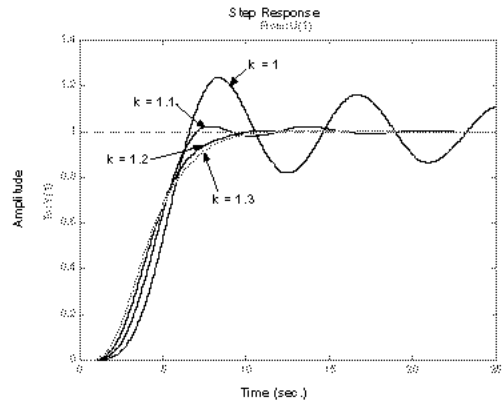


그림 9. 스텝 응답 (임의의).
Fig. 9. Step response (arbitrary).

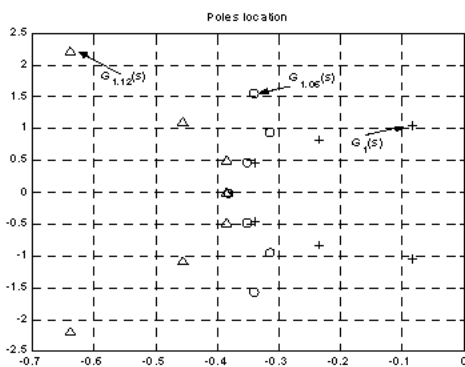


그림 7. 근 위치 (체비체프).
Fig. 7. Pole placement (Chebyshev).

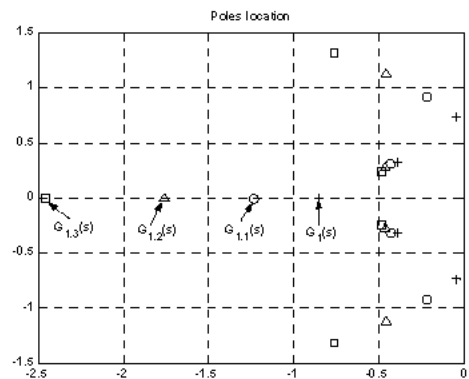


그림 10. 근 위치 (임의의).
Fig. 10. Pole placement (arbitrary).

(CASE2 : Chebyshev polynomial)
위의 정리 2를 통한 CASE 1의 설계과정과 동일하게 7차에 대한 Chebyshev polynomial로 이루어진 전달함수를 생각해 보자.

$$G(s) = \frac{a_0}{p(s)} = \frac{0.1024}{s^7 + 1.6932s^6 + 3.1835s^5 + 3.1692s^4 + 2.7051s^3 + 1.4829s^2 + 0.5618s + 0.1024}$$

정리 2에 의거 특성방정식의 특성비를 양의 실수 k 배 하여 재설계된 전달함수는 다음과 같으며 응답은 그림 6, 7, 8과 같다.

$$G_k(s) = \frac{a_0}{p_k(s)} = \frac{0.1024k^{21}}{s^7 + 1.6932k^6s^6 + 3.1835k^{21}s^5 + 3.1692k^{15}s^4 + 2.7051k^8s^3 + 1.4829k^{20}s^2 + 0.5618k^2s + 0.1024k^{21}}$$

(CASE 3 : 임의의 polynomial)

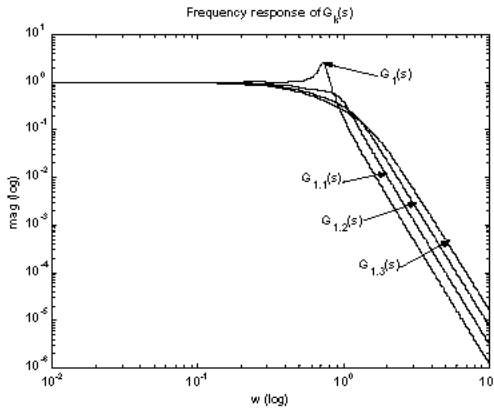


그림 11. 주파수 응답 (임의의).

Fig. 11. Frequency response (arbitrary).

아래는 임의의 polynomial 로 구성된 차수가 5차인 전달함수이다.

$$G(s) = \frac{a_0}{p(s)} = \frac{0.21}{1.71s^5 + 2.97s^4 + 2.78s^3 + 2.05s^2 + 0.90s + 0.21}$$

정리 2에 의거 특성방정식의 특성비를 양의 실수 k 배 하여 재설계된 전달함수는 다음과 같다.

$$G_k(s) = \frac{a_0}{p_k(s)} = \frac{0.21k^{10}}{1.71s^5 + 2.97k^4s^4 + 2.78k^7s^3 + 2.05k^9s^2 + 0.90k^{10}s + 0.21k^{10}}$$

그리고 그 응답들은 그림 9, 10, 11과 같다.

IV. 제어기 특성 비교

이 장에서는 극배치 제어기법에서 각각의 제어기를 통해 얻어진 극점의 성능을 비교한다. 본 논문에서 제안한 극배치 선정방법과 비교되는 제어기법인 우세극의 극배치, CDM, CRA를 통해 선정된 극점을 비교한다. 비교를 위해 사용되는 모델은 이미 잘 알려진 pendubot 시스템[13]을 이용하여 비교를 한다. pendubot은 2-link robot 시스템이며 그림 12에서와 같이 link_1의 축에는 액츄에이터가 있으며, link_2의 축에는 액츄에이터가 없이 각도만을 측정하는 구조이다. 이것은 역진자 제어문체와 유사한 SIMO(Single Input Multi Output)의 모델이나, 동역학구조로 인해서 역진자 제어문체 보다는 강한 비선형성을 내포하고 있다. 그림 12는 pendubot의 기구학적인 구조 및 그의 제원을 보여준다.

다음은 평형점에서의 구간 선형화를 통해 얻어진 각각의 상태방정식을 나타낸다.

TOP ($\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = 0$):

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 51.9265 & 0 & -13.9704 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -52.8402 & 0 & 68.4210 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 15.9549 \\ 0 \\ -29.3596 \end{bmatrix}$$

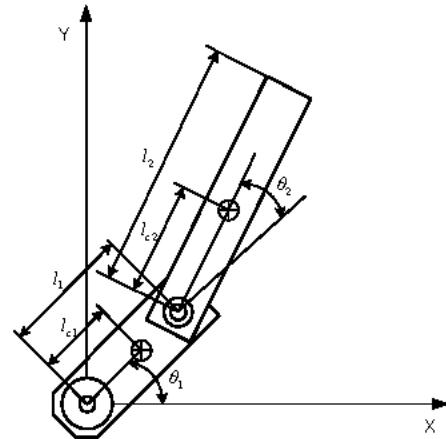


그림 12. Pendubot의 기하학적 형태.

Fig. 12. Shape of the pendubot.

MID ($\theta_1 = -\frac{\pi}{2}, \theta_2 = \pi$):

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -51.9265 & 0 & 13.9704 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 51.0128 & 0 & 40.4801 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 15.9549 \\ 0 \\ -2.5502 \end{bmatrix}$$

위의 상태 방정식들은 제어 가능하며, 따라서 상태 되먹임 제어를 통해서 불안정한 극점을 안정한 극점으로 이동시킬 수 있다. 이때 적절한 극점에 선정을 위해 4가지 설계방법을 비교한다.

- 1) 우세극을 통한 극배치
 - 2) CDM의 계수(Manabe 표준형)를 통한 극배치
 - 3) CRA의 계수를 통한 극배치
 - 4) 본 논문에서 제안한 방법을 통한 극배치
- 다음은 제어시스템의 기본 블록도를 나타낸다.

4가지 제어기 설계방법에 있어서 본 논문에서 강제적으로 적용되는 페루프 특성방정식은 다음과 같다.

- 1) 우세극을 통한 극배치방법:

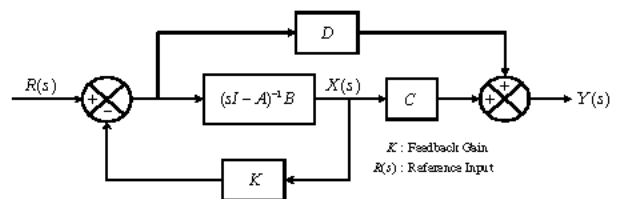
$$P(s) = s^4 + 21s^3 + 130s^2 + 218s + 180$$
- 2) CDM의 계수(Manabe 표준형)를 통한 극배치:

$$P(s) = s^4 + 2^2 \cdot 2.5s^3 + 2^3 \cdot 2.5^2s^2 + 2^3 \cdot 2.5^3s + 2^3 \cdot 2.5^3$$

여기서 안정도 지수, $\gamma_i = [2 \ 2 \ 2.5]$, 시정수 $\tau = 1$ 이다.
- 3) CRA의 계수를 통한 극배치:

$$P(s) = 0.0063s^4 + 0.0797s^3 + 0.4082s^2 + s + 1$$

여기서 $\alpha_k = \frac{\sin(\frac{k\pi}{n}) + \sin(\frac{\pi}{n})}{2 \sin(\frac{k\pi}{n})} \cdot \alpha, k = 2, \dots, n-1, \alpha = 2.45, \tau = 1$ 이다.



4) 본 논문에서 제안한 방법을 통한 극배치:

$$P(s) = s^4 + 9.66s^3 + 46.6578s^2 + 107.31294s + 107.31294$$

위의 식으로부터 재설계된 전달함수의 특성방정식은 다음과 같다.

$$P(s) = s^4 + 9.66k^3s^3 + 46.6578k^5s^2 + 107.31294k^6s + 107.31294k^6$$

여기서 $k=1.1$ 값을 사용하였다.

아래는 각 제어기법에 따른 극점의 위치와 되먹임 이득행렬을 나타낸 것이며 각각의 제어기법에 따른 제어입력을 비교한 내용이다.

표 1. 극점의 위치와 되먹임 이득행렬.

Table 1. Pole placement and feedback gain matrix.

구분	극 위치	되먹임 이득행렬
우세극	$-1 \pm 1i, -9, -10$	$K_t = [-10.20 \ -2.27 \ -14.07 \ -1.95]$ $K_m = [9.68 \ 1.63 \ 14.07 \ 1.94]$
CDM	$-2.5 \pm 3.44i$ $-2.5 \pm 0.81i$	$K_t = [-4.06 \ -1.15 \ -8.01 \ -0.96]$ $K_m = [3.70 \ 0.78 \ 8.01 \ 0.96]$
CRA	$-2.92 \pm 2.00i$ $-3.35 \pm 1.14i$	$K_t = [-5.24 \ -1.44 \ -9.13 \ -1.21]$ $K_m = [4.77 \ 0.98 \ 9.13 \ 1.21]$
제안된 방법	$-4.27 \pm 3.76i$ $-2.16 \pm 1.09i$	$K_t = [-6.15 \ -1.57 \ -10.00 \ -1.29]$ $K_m = [5.59 \ 1.01 \ 10.00 \ 1.29]$

Kt: TOP, Km: MID

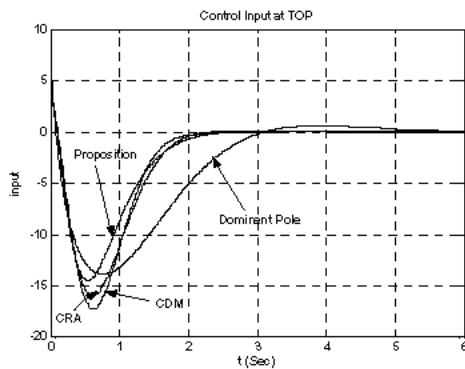


그림 13. TOP에서의 제어 입력.
Fig. 13. Control input at TOP.

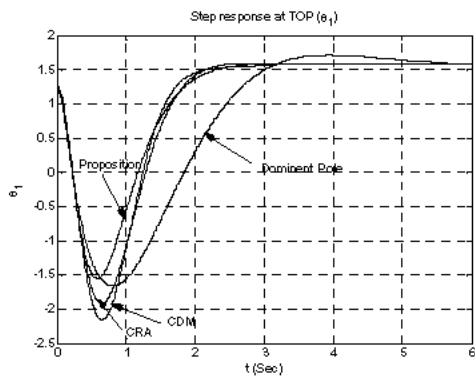


그림 14. TOP에서의 스텝 응답 (θ_1).
Fig. 14. Step response at TOP (θ_1).

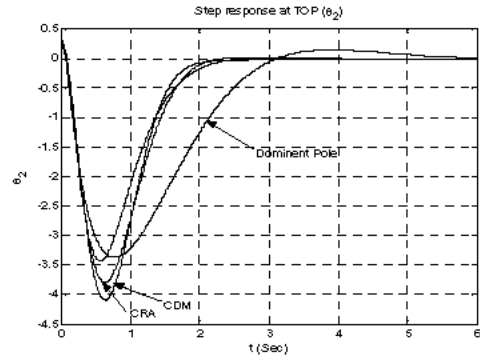


그림 15. TOP에서의 스텝 응답 (θ_2).
Fig. 15. Step response at TOP (θ_2).

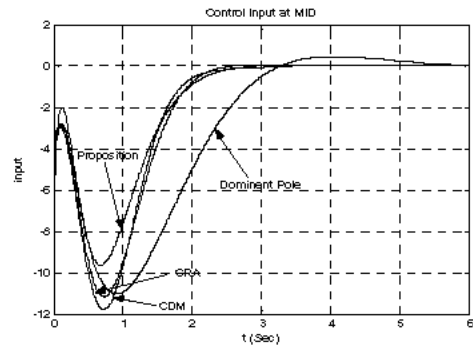


그림 16. MID에서의 제어 입력.
Fig. 16. Control input at MID.

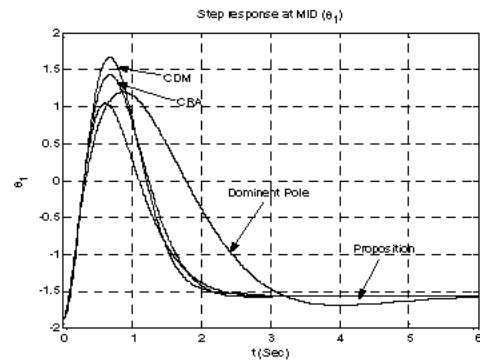


그림 17. MID에서의 스텝 응답 (θ_1).
Fig. 17. Step response at MID (θ_1).

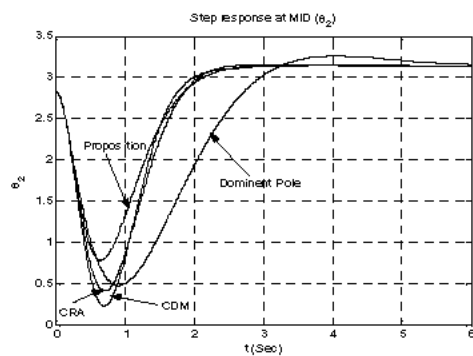


그림 18. MID에서의 스텝 응답 (θ_2).
Fig. 18. Step response at MID (θ_2).

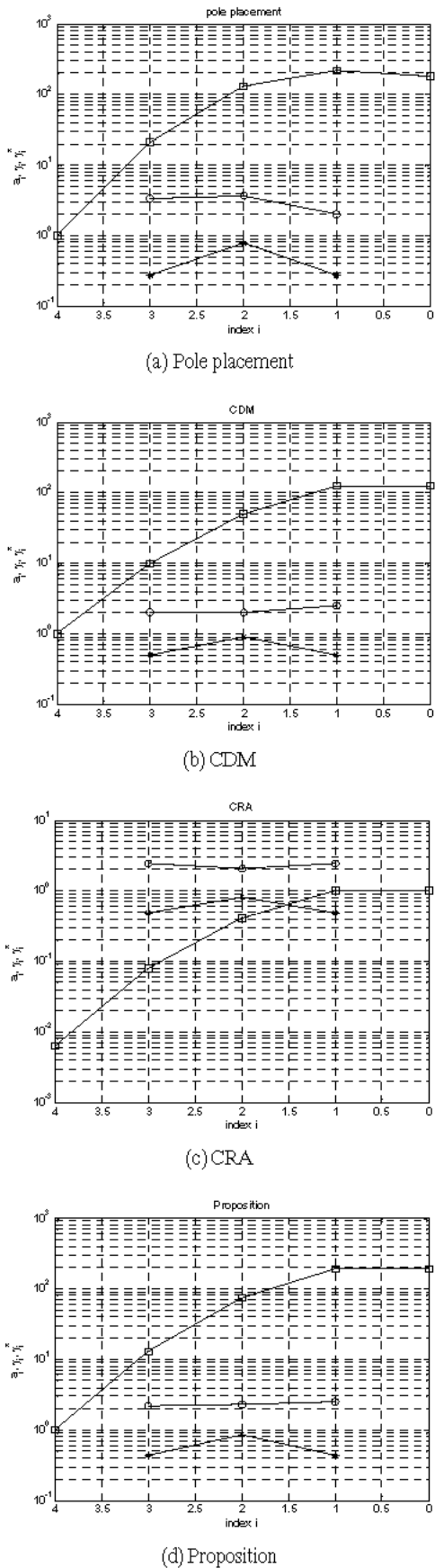


그림 19. 각 제어기법에 따른 계수도.
Fig. 19. Coefficient diagram for each control method.

S. Manabe가 제안한 계수도상에서 안정성과 강인성에 대한 해석을 그림 19을 통해서 할 수 있다. 그림에서 보듯이 각 제어 기법들은 모두 아래의 조건을 만족하므로 안정된 시스템이다. $\gamma_i > \gamma_i^*$, for $i = 1, 2, 3$ 이상의 결과로 CRA 계수와 본 논문에서 제안한 설계방법에 따른 극점은 안정성뿐만 아니라 overshoot가 없는 응답을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

VI. 결론

과도상태(응답속도 및 overshoot)제어의 중요성에도 불구하고 이에 대한 연구가 아직도 미흡하다. 비록 저차수 시스템에 있어서는 해석적인 접근(우세극을 통한 해석)이 가능하지만 시스템의 차수가 고차가 될수록 특성방정식의 근의 위치와 시간응답과의 연관성을 알아내는 것은 거의 불가능한 것처럼 생각되어 왔다. 그러나, P. Naslin이 제시한 특성방정식의 계수비 관계식을 통해서 과도상태 제어가 가능함을 알았다.

본 논문에서는 제시된 시스템은 all pole system에 적용하였지만 영점이 있는 플랜트에서는 본 논문이 제시한 방법에서 제어 입력 부분에 feedforward를 인가하여 영점을 제거하는 방법으로 해결할 수 있다. 그러나 non-minimum phase인 경우에는 feedforward 부분의 분모항이 양의 극을 가지므로 정확히 영점이 제거되지 않으면 시스템이 발산하게 된다. 이와 같은 경우에는 overshoot 제어는 한계가 있다고 본다. 특성방정식의 특성 천이비(특성 천이비)의 조절을 통해서 응답속도가 제어됨을 보이고, 특성비의 조절을 통해서 overshoot 제어의 해결방법을 제시하였다.

특히 Kessler의 다중루프 구조를 채택함으로써 더 이상 특정한 polynomial을 통해서 설계하지 않더라도 일반적인 계수항으로 확장이 가능함을 보였다. 이것은 임의의 overshoot 없는 근의 위치를 찾을 수 있음을 말한다. 여기에서 주목할 내용은 정리 1을 통해 알 수 있듯이 응답속도제어와 overshoot 제어는 서로 독립적인 관계라는 것이다.

이로써 극 배치 방법을 통한 제어방식에 적절한 근의 위치를 찾아주는 방법론을 제안하였다.

참고문헌

- [1] S. Manabe, "Coefficient diagram method," *Proceedings of the 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, pp. 199-210, Seoul, Korea, 1998.
- [2] Y. C. Kim, L. H. Keel, S. P. Bhattacharyya, "Transient response control via characteristic ratio assignment," *Proc. American Control Conference*, vol. 2, pp. 1639-1646, USA, 2002.
- [3] A. V. Lipatov, and N. I. Sokolov, "Some sufficient conditions for stability and instability of continuous linear stationary systems," Translated from *Automatika i Telemekhanika*, no. 9, PP. 30-37, 1978; in *Automat. Remote Contr.*, vol. 39, pp. 1285-1291, 1979.
- [4] P. Naslin, "Essentials of optimal control," pp. 30-51, London Boston Technical Publishers, Inc. Cambridge, MA, 1969.
- [5] C. Kessler, "Ein Beitrag zur Theorie mehrschleifiger Regelungen," *Regelungstechnik*, 8, 8, pp. 261-166, 1960.
- [6] S. Manabe, "The application of coefficient diagram method to the ACC benchmark problem," *2nd Asian Control Conference*, pp. II-135-138, Seoul, Korea, 1997.
- [7] S. E. Hamamci, M. Koksal and S. Manabe, "Robust position

control of a antenna with the coefficient diagram Method," *4th Asian Control Conference*, pp. 1785-1790, Singapore, 2002.

[8] L. H. Keel, S. P. Bhattacharyya, "Robust, fragile or optimal?," *IEEE Trans. on Auto. Control*, vol. 2, pp. 1307-1313, 1997.

[9] P. M. Makila, L. H. Keel, S. P. Bhattacharyya, Comments on "Robust, fragile, or optimal?," *IEEE Trans. on Auto. Control*, vol. 43, pp.1265-1268, 1998.

[10] W.K. Chen, "Passive and active filters, theory and implementations," John Wiley & Sons, Inc, Singapore, 1986.

[11] C. T. Chen, "Linear system theory and design," Oxford University press, Inc, New York, 1999.

[12] D. K. Kim, H. S. Kim and W. H. Choi, "A new design method for transient response control," *Proceedings of the 42st SI CE Annual Conference*, pp. 375-380, 2003.

[13] M. W. Spong and D. J. Block, "The pendubot: a mechatronic system for control research and education," *34th IEEE Conf. Decision and Control*, pp. 555-557, New Orleans, 1995.



김 한 실

1957년 9월 28일생. 1981년 서울대학교 전기공학과(공학사). 1983년 서울대학교 전기공학과(공학석사). 1991년 West Virginia Univ. Electrical & Computer Eng.(공학박사). 1993년~현재 울산대학교 전기전자 정보시스템공학부 교수. 관심분야는 선

형 및 비선형 제어, 확률제어, GPS 응용.



김 대 관

1976년 2월 19일생. 2003년 울산대학교 전기전자정보시스템공학부(공학석사). 관심분야는 선형 및 비선형 제어, 광 스토리지 서보 제어. 현재 HLDS (Hitachi-LG Data Storage, Inc) 근무.



노 회 안

2001년 Washington State Univ. Electrical Eng.(공학박사). 2002년~현재 (주) Techsign Light Panel 대표이사. 관심분야는 Fault Detection, Deconvolution 필터, 선형제어, H-infinity 필터 이론 및 응용.