

근의 이동범위를 고려한 LQR 제어기 설계

Design of an LQR Controller Considering Pole's Moving-Range

박민호*, 홍석교, 이상혁

(Min-Ho Park, Suk-Kyo Hong, and Sang-Hyuk Lee)

Abstract : This paper proposes a new method for LQR controller design. It is unsystematic and difficult to design an LQR controller by trial and error. The proposed method is capable of systematically calculating weighting matrices for desired pole(s) by the pole's moving-range in S-plane and the relational equation between closed-loop pole(s) and weighting matrices. This will provide much-needed functionality to apply LQR controller. The example shows the feasibility of the proposed method.

Keywords : LQR, weighting matrix, hamiltonian system

I 서론

시스템을 안정하게 하면서, 시스템의 응답이 설계조건을 만족하도록 하는 제어기를 설계하는 것은 매우 중요한 일이다. 제어기를 설계하는 방법은 PID, 최적제어, 적응제어, 극배치 방법, 퍼지 등 다양하다. 특히 LQR 제어기는 시스템의 상태방정식을 제한조건으로 하고 성능지수(performance Index)를 최소화하는 최적제어 이론을 바탕으로 한다. 그리고 성능지수를 가중행렬이 곱해지는 상태변수와 제어입력의 2차 형태로 정의하는 경우, 제한조건을 충족시키면서 성능지수를 최소화하는 LQR 제어기 설계문제는 가중행렬을 설정하는 문제로 귀결된다. 설계된 LQR 제어기는 설정된 가중행렬에 관계없이 이득여유(gain margin)와 위상여유(phase margin)를 보장하는 장점이 있다. 이러한 이유로 인해 제어 가능하고 관측 가능한 선형 시불변 시스템에 대한 제어기로 많이 사용되고 있다[1].

이러한 장점에도 불구하고, LQR 제어기를 설계할 때 가중행렬과 폐루프 근(closed loop pole)과의 상관관계가 명확하지 않기 때문에 설계조건을 만족하는 응답을 얻기 위해 수많은 시행착오를 통해 가중행렬을 설정하는 어려움이 있다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 많은 연구가 이루어져 왔다. 특히 B. D. O. Anderson은 동일한 폐루프 근을 갖는 여러 개의 가중행렬이 존재한다는 것을 밝혔다[1]. 그리고 O. A. Solheim[2]과 M. Saif[3]는 Hamiltonian 행렬로부터 가중행렬과 시스템의 근과 폐루프 근과의 관계를 이끌어 냈다. 그리고 O. A. Solheim은 시스템의 실근(real pole)을 원하는 폐루프 실근으로 이동시키는 가중행렬을 구하는 방법을 제시하였지만 시스템의 복소근(complex poles)에 대해서는 명확한 방법을 제시하지 못했다. 최근에 T. Fujinaka가 특별한 형태의 가중행렬을 적용하여 이 문제의 해결 방법을 제시하였다[4,5]. 그러나 T. Fujinaka가 제시한 방법은 두 가지 문제점을 가지고 있다. 첫 번째는 입력이 여러 개인

경우에는 적용할 수 있지만 단일 입력인 경우에는 적용할 수 없다는 것이고, 두 번째는 T. Fujinaka가 제시한 방법으로 계산된 가중행렬에 의해 이동되는 복소근의 이동범위를 복소평면에 표현하기가 어렵기 때문에 설계조건을 만족하는 근을 쉽게 선택할 수 없다는 것이다.

본 논문에서는 이런 문제점을 해결하기 위한 새로운 방법을 제시한다. 특별한 형태의 가중행렬을 이용하여 SISO(Single Input Single Output) 및 MIMO(Multi Input Multi Output) 시스템을 모두 고려하는 Hamiltonian 시스템을 표현한다. 이 Hamiltonian 시스템의 특성방정식에서 복소근에 대응하는 특성방정식을 분리하고, 이 분리된 특성방정식의 근이 페루프 복소근이라는 조건에서 가중행렬과 페루프 근의 관계식을 유도한다. Riccati 방정식의 변수인 가중행렬이 갖는 성질을 이용해서 복소근의 이동범위를 수식으로 유도한다. 이 수식을 이용하여 근의 이동범위를 복소평면에 표현하면 설계조건을 만족하는 근을 보다 명확하고 쉽게 선택할 수 있다. 그리고 선택된 근을 가중행렬과 근의 관계식에 대입하면 원하는 상태가중행렬이 얻어진다. 이 가중행렬로부터 계산되는 상태피드백 이득은 설계조건을 만족하는 LQR 제어기가 된다.

예제에서 SISO 시스템의 근을 원하는 페루프 근으로 이동시키는 LQR 제어기를 설계하여 제시한 방법의 타당성을 확인한다.

2장에서는 LQR의 기본개념과 상태피드백 이득의 특성에 대해 알아본다. 3장에서는 가중행렬과 근의 관계식을 유도하고, 근의 이동범위는 4장에서 설명한다. 5장에는 제어기를 설계하는 알고리즘을 설명한다. 6장에서는 제시한 방법을 적용하여 예제를 풀어보고, 7장에 결론을 기술한다.

II LQR

제어 가능한 선형 시스템의 상태방정식은 (1)이다.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

여기서 A, B는 각각 $n \times n$, $n \times m$ 상수 행렬이고, 상태변수(state variable) x 는 $n \times 1$ 벡터이고, 제어입력(control input)

* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수 : 2005. 5. 17., 채택확정 : 2005. 8. 1.

박민호, 홍석교, 이상혁 : 아주대학교 전자공학과

(minhinf@gmail.com/skhong@ajou.ac.kr/sh74@ajou.ac.kr)

u 는 $m \times 1$ 벡터이다. 그리고 가중행렬을 이용한 2차 형태의 성능지수를 정의하면 (2)와 같다.

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (2)$$

여기서 상태가중행렬(state weighting matrix) Q 는 양의 반한정대칭행렬(positive semi-definite symmetric matrix)이고 제어 가중행렬(control weighting matrix) R 은 양의 한정대칭행렬(positive definite symmetric matrix)이다. 상태방정식을 제한 조건으로 하고 성능지수를 최소화하는 법칙은 제한조건 없이 Lagrange 곱수(multiplier)로 표현되는 성능지수를 최소화 하는 것과 같다. (3)의 Hamiltonian 시스템에서 유도되는 Lagrange 곱수는 Riccati 방정식(4)의 유일한 해인 변수 P 에 의해 (5)로 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -V \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} - F \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad V = BR^{-1}B^T \quad (3)$$

여기서 F 는 Hamiltonian 행렬이다.

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (4)$$

$$\lambda = -P x \quad (5)$$

Lagrange 곱수로 표현되는 (6)은 성능지수를 최소화하는 제어법칙이다.

$$u = -R^{-1}B^T \lambda = -R^{-1}B^T P x = -K x \quad (6)$$

LQR 설계방법을 순차적으로 n 번 적용하여 제어를 설계하는 경우에 최종적으로 얻어지는 상태가중행렬과 제어기의 상태피드백 이득은 (7)과 같이 각 단계에서 얻어지는 결과의 합으로 표현된다[2].

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i, \quad K = \sum_{i=1}^n K_i \quad (7)$$

상태피드백 이득은 (7)에서 얻은 상태가중행렬을 (4)의 Riccati 방정식에 대입하여 계산 할 수도 있다.

(4), (6)의 결과로부터 상태피드백 이득 K 는 가중행렬에 의해서 결정된다. 즉 LQR 제어를 설계하는 문제는 가중행렬을 설정하는 문제로 귀결된다. 설계된 제어기는 가중행렬의 값에 관계없이 이득여유와 위상여유를 보장하는 장점이 있다. 그렇지만 시스템의 응답이 설계조건을 만족하도록 하는 가중행렬은 일반적으로 시행착오라는 체계적이지 않은 방법에 의해 설정된다.

III. 가중행렬과 근의 관계식

(8)로 표현되는 Hamiltonian 시스템의 특성방정식은 좌반면(left half plane)과 우반면(right half plane)에 각각 n 개씩 $2n$ 의 근을 가지며, 근들은 서로 허수축에 대칭인 관계를 가지고 있다. 그리고 좌반면에 위치하는 Hamiltonian 시스템의 근은 최적제어 시스템($\dot{x} = (A - BK)x$)의 근과 같다 [2].

$$|sI - F| = \begin{vmatrix} sI - A & V \\ Q & sI + A^T \end{vmatrix} = |sI - A| |sI + A^T - Q(sI - A)^{-1}V| \quad (8)$$

시스템이 (9)와 같이 서로 다른 근을 가지는 경우, (10)의 변환행렬 T 에 의해 시스템 행렬 A 는 대각행렬(diagonal matrix) Λ 로 변환된다.

$$|sI - A| = \lambda_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (9)$$

$$x = T z \quad (10)$$

$$A = T^{-1} \Lambda T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

그리고 변환행렬에 의해 Hamiltonian 시스템, 상태방정식, 성능지수도

$$\dot{z} = \Lambda z + T^{-1} B u \quad (12)$$

$$J = \int_0^{\infty} (z^T \bar{Q} z + u^T R u) dt \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda & -\bar{V} \\ -\bar{Q} & -\Lambda^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} - \bar{F} \begin{bmatrix} z \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\bar{V} = T^{-1} B R^{-1} B^T T^{-T} = \begin{bmatrix} \bar{v}_{11} & \bar{v}_{12} & \dots & \bar{v}_{1n} \\ \bar{v}_{12} & \bar{v}_{22} & \dots & \bar{v}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{v}_{1n} & \bar{v}_{2n} & \dots & \bar{v}_{nn} \end{bmatrix}$$

로 변환된다. 여기서 ($\bar{\cdot}$)은 대각행렬화된 시스템과 관계된 변수를 표현한다.

시스템 근은 서로 다른 실근과 복소근으로 나누어지고, 근의 종류에 따라 상태가중행렬과 근의 관계식은 다음과 같이 표현된다.

1. 실근을 다른 실근으로 이동[2]

시스템의 j 번째 근 λ_j 가 실근인 경우, λ_j 와 관계된 상태가중행렬 \bar{Q} 를 (15)로 정의하면, Hamiltonian 시스템의 특성방정식은 (16)이 된다.

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \bar{q}_{jj} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$|sI - \bar{F}| = [(s + \lambda_j)(s - \lambda_j) - \bar{q}_{jj} \bar{v}_{jj}] \times \prod_{i=1, i \neq j}^n (s + \lambda_i)(s - \lambda_i) = 0 \quad (16)$$

이 방정식을 풀면

$$s_i = +\lambda_i, \quad i \neq j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (17)$$

$$s_j = +\sqrt{\lambda_j^2 + \bar{q}_{jj} \bar{v}_{jj}} \quad (18)$$

가 되고, 원하는 좌반면의 폐루프 근이 $s_j = -\gamma$ 가 되도록 하는 \bar{Q} 는 (19)이다.

$$\bar{q}_{jj} = \frac{\gamma^2 - \lambda_j^2}{\bar{v}_{jj}} \quad (19)$$

2. 복소근을 다른 복소근으로 이동

시스템이 복소근을 가지는 경우, 대각행렬로 변환시키는 변환행렬과 Hamiltonian 행렬의 구성요소인 행렬 A, V의 일부 원소(element)가 복소수가 된다. 행렬에 복소수가 포함되면 계산이 실수인 경우보다 복잡해지고 까다로워진다. 따라서 또 다른 변환행렬을 사용하여 모든 행렬들의 원소를 실수가 되도록 한다.

시스템 행렬 A가 한 쌍의 복소근 $\lambda_{1,2} = \alpha + j\beta$ 를 가지는 경우, 변환행렬 T에 의해 시스템의 대각행렬은 (20)으로 표현된다.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha + j\beta & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, (\alpha \neq 0, \beta \neq 0) \quad (20)$$

시스템의 근이 복소수이기 때문에 변환행렬 T와 대각행렬 A의 일부 원소(Element)가 복소수가 된다. 복소수 원소들을 실수로 변환하기 위해 (21)의 변환행렬 L을 적용하여 새로운 변환행렬 T를 정의하면 (22)가 된다[6].

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{j}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$T = T' L \quad (22)$$

새로이 정의된 변환행렬 T는 시스템 행렬 A를 (23)과 같은 형태의 대각행렬 A*로 변환시킨다.

$$A^* = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (23)$$

A*를 기준으로 하여 한 쌍의 복소근과 관계되는 상태가중행렬 Q를 (24)과 같이 정의하면 Hamiltonian 시스템의 특성방정식은 (25)가 된다.

$$Q = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{q}_{12} & \tilde{q}_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$|sI - \tilde{F}| = \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & [s^4 - (2(\alpha^2 - \beta^2) + \tilde{q}_{11}\tilde{v}_{11} + 2\tilde{q}_{12}\tilde{v}_{12} + \tilde{q}_{22}\tilde{v}_{22})s^2 \\ & + (\alpha^2 + \beta^2)^2 + (\tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22} - \tilde{q}_{12}^2)(\tilde{v}_{11}\tilde{v}_{12} - \tilde{v}_{12}^2) \\ & + \tilde{q}_{11}(\alpha^2\tilde{v}_{11} - 2\alpha\beta\tilde{v}_{12} + \beta^2\tilde{v}_{22}) \\ & + 2\tilde{q}_{12}(\alpha^2\tilde{v}_{12} - \alpha\beta(\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{11}) - \beta^2\tilde{v}_{12}) \\ & + \tilde{q}_{22}(\alpha^2\tilde{v}_{22} + 2\alpha\beta\tilde{v}_{12} + \beta^2\tilde{v}_{11})] \\ & \times \prod_{i=3}^n (s + \lambda_i)(s - \lambda_i) = 0 \end{aligned}$$

그리고 $\tilde{q}_{11} = \rho \cos^2 \theta, \tilde{q}_{12} = \rho \cos \theta \sin \theta, \tilde{q}_{22} = \rho \sin^2 \theta$ 로 가정하면, 특성방정식의 근이 $\pm \gamma \pm j\delta (\gamma \neq 0, \delta \neq 0)$ 이 되도록 하는 Q는 (26)의 θ 와 (27)의 ρ 로 계산된다.

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-e_2 \pm \sqrt{e_2^2 - 4e_1e_3}}{2e_3} \right), 0 \leq \theta < \pi \quad (26)$$

$$\rho = \frac{e_{14}}{\cos^2 \theta e_{11} + \cos \theta \sin \theta e_{12} + \sin^2 \theta e_{13}} \quad (27)$$

여기서 $e_1 = e_{14}e_{21} - e_{24}e_{11}, e_2 = e_{14}e_{22} - e_{24}e_{12},$
 $e_3 = e_{14}e_{23} - e_{24}e_{13}$
 $e_{11} = \tilde{v}_{11}, e_{12} = 2\tilde{v}_{12}, e_{13} = \tilde{v}_{22}$
 $e_{14} = 2(\gamma^2 - \delta^2 - \alpha^2 + \beta^2),$
 $e_{21} = \alpha^2\tilde{v}_{11} - 2\alpha\beta\tilde{v}_{12} + \beta^2\tilde{v}_{22}$
 $e_{22} = 2(\alpha^2\tilde{v}_{12} - \alpha\beta(\tilde{v}_{22} - \tilde{v}_{11}) - \beta^2\tilde{v}_{12})$
 $e_{23} = \alpha^2\tilde{v}_{22} + 2\alpha\beta\tilde{v}_{12} + \beta^2\tilde{v}_{11},$
 $e_{24} = (\gamma^2 + \delta^2)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)^2$

이다. 계산된 Q는 시스템의 복소근 $\alpha + j\beta$ 를 $\gamma + j\delta$ 로 이동시킨다.

IV. 근의 이동범위(Pole's Moving-Range)

근의 이동범위는 가중행렬과 근의 관계식으로부터 계산된 상태가중행렬이 양의 반한정행렬이 되기 위한 조건으로부터 유도된다. 유도된 수식을 이용하면 근의 종류에 따라 근의 이동범위가 복소평면에 그려진다. 근의 종류에 따라 이동범위를 구하는 방법은 다음과 같이 나누어진다.

1. 실근의 이동범위

양의 반한정행렬인 상태가중행렬의 모든 고유값은 음수가 아닌 값을 가진다[7]. (15)로 정의된 상태가중행렬의 모든 고유값이 음수가 아닌 값이 되기 위한 조건은 (28)이다.

$$\tilde{q}_{ij} \geq 0 \quad (28)$$

이 조건에서 얻어지는 실근의 이동범위는 (29)이다.

$$\gamma \leq -|\lambda_j| \quad (29)$$

즉 시스템의 실근은 허수축과의 거리보다 더 멀리 떨어진 안정된 페루프 실근으로 이동된다.

2. 복소근의 이동범위

(24)의 상태가중행렬이 양의 반한정행렬이 되기 위해서는 ρ 는 반드시 양수가 되어야 하고, θ 와는 무관하다. 상태가중행렬의 변수 ρ 와 θ 로부터 복소근이 이동할 수 있는 범위가 얻어진다. 첫째, (26)에서 $\tan \theta$ 가 항상 실수이기 때문에 얻어지는 조건이 (30)이고, 둘째, (27)의 ρ 가 양수이기 때문에 주어지는 조건이 (31)이다.

$$e_2^2 - 4e_1e_3 \geq 0 \quad (30)$$

$$\gamma^2 - \delta^2 > \alpha^2 - \beta^2 \quad (31)$$

ρ 의 조건에서 얻어지는 복소근의 이동범위는 시스템의 근의 특성에 따라 첫째, 실수부($-\alpha^2 > \beta^2$)가 큰 경우에는 그

림 1의 (a)처럼 쌍곡선의 안쪽이 되고, 둘째, 허수부 ($\beta^2 > \alpha^2$)가 큰 경우에는 그림 1의 (b)처럼 쌍곡선의 바깥 쪽이 된다. 복소평면에서 (30)과 (31)의 공통부분이 복소근의 이동범위가 된다.

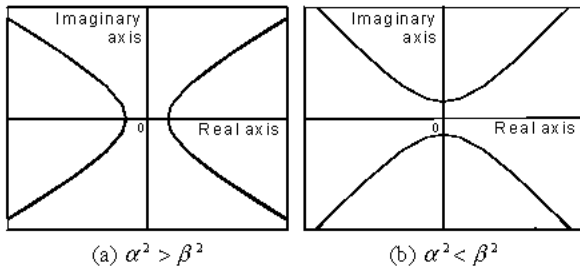


그림 9. ρ 에 의한 복소근의 이동범위.

Fig. 9. Complex pole's moving-range by ρ .

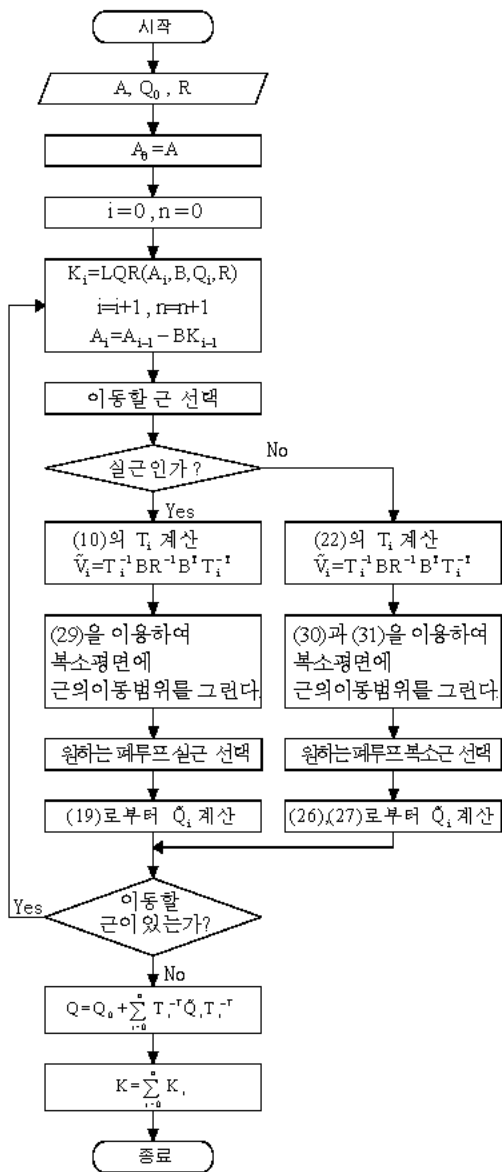


그림 10 설계 알고리즘.

Fig. 10. Design algorithms.

V. 제어기 설계 알고리즘

제시한 방법은 가중행렬과 근의 관계식으로부터 얻어지는 근의 이동범위를 복소평면에 나타내고, 영역 안에서 원하는 근을 선택하여 상태가중행렬을 계산하는 방법으로 LQR 제어기를 설계한다. 시스템의 근을 원하는 위치로 이동시키는 LQR 제어기를 설계하는 방법은 그림 2와 같다.

이 설계 방법은 가중행렬에 관계없이 이득여유와 위상여유를 보장하는 LQR 제어기의 이점과 시스템의 근을 임의의 위치에 배치하는 극배치 방법의 장점을 모두 가진다. 기존의 방법으로 설계된 LQR 제어기의 성능개선을 위해 근의 위치를 변경할 경우[8]와, 시스템의 특성을 나타내는 근을 각각 특정 위치에 개별적으로 이동시키고자 하는 경우에 적용할 수 있다.

VI. 예제

본 논문에서는 SISO 시스템을 이용한 예제를 통해 제시한 방법의 타당성을 검토한다. 예제에 사용할 SISO 시스템의 상태방정식은 (32)이고, overshoot가 30% ($\xi > 0.35$)보다 작게, 정상상태 도달 시간이 6.0 초 ($\xi \omega_n > 0.67$) 이내가 되도록 설계조건을 설정한다.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2.5 & -3.5 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

먼저 가중행렬을 (33)으로 설정하고, LQR 방법으로 상태피드백 이득 K_0 를 계산하면 (34)가 되고, 폐루프 시스템 $A_1 = A_0 - BK_0$ 의 근은 (35)가 된다.

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R = 1 \quad (33)$$

$$K_0 = [0.1926 \quad 0.1700 \quad 0.0832] \quad (34)$$

$$s = -1.0416, -0.5208 \pm j1.5211 \quad (35)$$

K_0 에 대한 모의실험(그림 5)의 결과를 보면 정상상태에 도달하는데 13.0초 걸리고, overshoot가 55% 발생하여 설계조건을 만족시키지 못한다. 여기에 제시한 근의 이동범위를 이용하면, 부적절한 근을 설계조건을 만족하는 영역의 근으로 이동시키는 상태가중행렬을 계산할 수 있다. 설계 순서는 A_1 의 근 중에서 먼저 복소근($-0.5208 \pm j1.5211$)을 이동시키고, 다음으로 실근(-1.0416)을 이동시킨다.

1. 복소근 ($-0.5208 \pm j1.5211$)의 이동

제시한 방법을 적용하기 위해 A_1 을 대각행렬로 변환한다. A_1 은 (22)의 변환행렬 T_1 에 의해 대각행렬 Λ_1^* 로 변환된다. 복소평면에 그려진 복소근의 이동범위(그림 3)는 $-0.5208 \pm j1.5211$ 을 (30)과 (31)에 대입하여 얻어지는 (36)과 (37)의 공통범위이다.

$$(8.60 \gamma^2 - 8.60 \delta^2 - 32.75 + 1.58(\gamma^2 + \delta^2)^2)^2 - 4(3.33 \gamma^2 - 3.33 \delta^2 - 5.16 - 0.52(\gamma^2 + \delta^2)^2) \times (5.54 \gamma^2 - 5.54 \delta^2 - 6.31 - 1.20(\gamma^2 + \delta^2)^2) \geq 0 \quad (36)$$

$$\gamma^2 - \delta^2 > -2.0425 \quad (37)$$

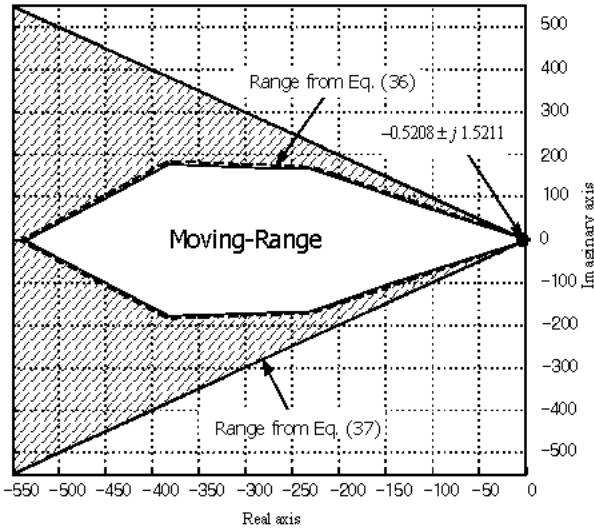


그림 11. 복소근의 이동범위.
Fig. 11. Moving-range of complex pole.

표 1. 상태가중행렬 \tilde{Q}_1 .

Table 1. State weighting matrix \tilde{Q}_1 .

	θ	ρ	\tilde{Q}_1
1	3.6855°	47.9205	$\begin{bmatrix} 47.7225 & 3.07394 & 0 \\ 3.0739 & 0.1980 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2	76.2362°	25.2131	$\begin{bmatrix} 1.4272 & 5.8264 & 0 \\ 5.8264 & 23.7859 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

설계조건과 복소근의 이동범위의 공통범위(그림 4)에서 원하는 페루프 복소근으로 $-3.0 \pm j1.0$ 을 선택하면, (26)와 (27)으로부터 θ 와 ρ 가 계산되고, 이로부터 구해지는 \tilde{Q}_1 은 표 1과 같이 두 개의 값을 가진다.

$-0.5208 \pm j1.5211$ 의 복소근은 \tilde{Q}_1 에 의해 계산되는 상태 피드백 이득에 의해 $-3.0 \pm j1.0$ 로 이동된다.

2. 실근(-1.0416)의 이동

$A_2 = A_1 - BK_1$ 는 변환행렬 T_2 에 의해 대각행렬 A_2 로 변환되고, (29)에 의해 실근의 이동범위는 (38)이 된다.

$$\gamma \leq -1.0416 \tag{38}$$

설계조건과 실근의 이동범위가 겹치는 범위(그림 4)에서 원하는 페루프 근을 -4 로 선택하면, (19)에 의해 상태가중행렬

$$\tilde{Q}_2 = \begin{bmatrix} 106.894 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{39}$$

가 얻어진다. \tilde{Q}_2 로부터 계산되는 상태피드백 이득은 -1.0416 를 -4 로 이동시킨다.

3. 결과 및 고찰

설계조건을 만족하는 범위에서 선택된 근으로 이동시키

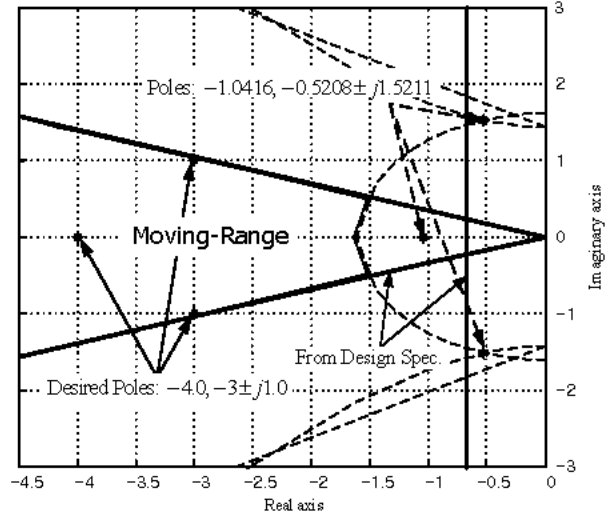


그림 12. 설계조건을 고려한 근의 이동범위.
Fig. 12. Pole's Moving-range considering design specification.

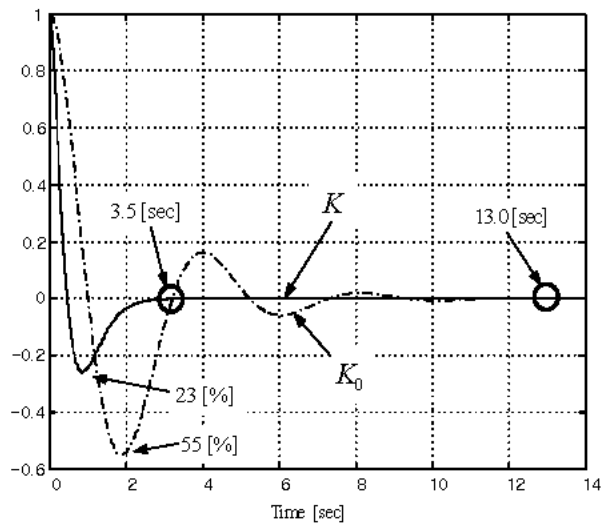


그림 13. 모의실험.
Fig. 13. Simulation.

는 상태가중행렬 Q 는 앞에서 계산한 상태가중행렬의 합으로 표현되며, 그 값은 (40)이다.

$$Q = \begin{bmatrix} 1593.750 & 945.131 & 104.055 \\ 945.131 & 561.860 & 67.118 \\ 104.055 & 67.118 & 35.000 \end{bmatrix} \tag{40}$$

또는

$$= \begin{bmatrix} 1593.750 & 1039.075 & 194.245 \\ 1039.075 & 742.241 & 153.704 \\ 194.245 & 153.704 & 35.000 \end{bmatrix}$$

계산된 상태가중행렬이 두 개이지만 입력이 하나이기 때문에 상태피드백 이득은 (41)처럼 하나가 된다.

$$K = [37.5 \quad 30.5 \quad 8.0] \tag{41}$$

제시한 방법으로 설계된 K 를 적용한 모의실험(그림 5)에서 얻은 응답특성을 보면 Overshoot가 약 23%이고, 정상상

태도달시간이 약 3.5초로 설계조건을 만족한다.

이로써 근의 이동범위를 이용하여 설계조건을 만족하는 페루프 근으로 이동시키는 LQR 제어를 설계하였다.

VII. 결론

본 논문은 복소평면에 근의 이동범위를 나타내어 원하는 근을 선택하는 방법을 이용하여 SISO 및 MIMO 시스템의 LQR 제어를 설계하는 방법을 제시하였다. 이 방법은 가중행렬에 관계없이 이득여유와 위상여유를 보장하는 LQR 제어기의 이점과 시스템의 근을 임의의 위치로 이동시키는 극배치 방법의 장점을 모두 가진다. 특별한 형태의 가중행렬로 표현되는 Hamiltonian 시스템의 특성방정식을 이용하여 복소근과 가중행렬의 관계식을 세우고, 가중행렬이 갖는 특성을 이용하여 근의 이동범위를 수식으로 유도하여 복소평면에 근의 이동범위를 그림으로 표현하였다.

이 방법의 장점은 첫째, 복소평면에 근의 이동범위를 표현하여 원하는 페루프 근을 선택할 수 있고, 둘째, 선택된 근으로부터 가중행렬과 상태피드백 이득을 수학적으로 계산할 수 있으며, 셋째, MIMO 시스템뿐만 아니라 SISO 시스템에도 적용할 수 있다는 것이다.

제어가능하고 관측가능한 SISO 및 MIMO 시스템이 서로 다른 근을 가지는 경우에 실근은 Solheim의 방법을 적용하고, 복소근은 제시한 방법을 적용하면 시스템의 근을 설계조건을 만족하는 페루프 근으로 이동시키는 LQR 제어를 설계할 수 있다. 이로써 Fujinaka가 제시한 방법이 가지고 있는 문제점을 해결하였고 제시한 방법이 기존의 시행착오적인 방법의 LQR 제어기 설계방법보다 체계적임을 예제를 통해 확인하였다.

제시한 방법은 시스템의 실근을 실근으로, 복소근을 복소근으로 이동시키는 한계가 있으므로 앞으로 한 쌍의 복소근을 두 개의 실근으로 이동시키는 가중행렬을 계산하는 방법과 두 개의 실근을 한 쌍의 복소근으로 이동시키는 가중행렬을 계산하는 방법에 관한 연구가 필요하다.

참고문헌

- [1] B. D. O. Anderson, J. B. Moore, *Optimal Control*, Prentice-Hall, 1989,
- [2] O. A. Solheim, "Design of optimal control systems with prescribed eigenvalues," *Int. J. Control*, vol. 15. pp. 143-160, 1972.
- [3] M. Saif, "Optimal linear regulator pole-placement by weighting selection," *Int. J. Control*, vol. 50. no. 1, pp. 399-414, 1989.
- [4] T. Fujinaka, H. Shibata, "Admissible region for pole positioning with optimal regulator," *Proc. IEEE CDC*, Kobe, Japan, pp. 3631-3635, 1996.
- [5] T. Fujinaka, S. Omatu, "Pole placement using optimal regulators," *T.IEE Japan*, vol. 121-C, pp. 240-245, 2001.
- [6] K. Ogata, *State space analysis of control systems*, Prentice-Hall, pp. 119-120, 1967.
- [7] G. Strang, *Linear Algebra and its applications*, 3rd Ed. Harcourt Brace & Company, pp. 339-340, 1988.
- [8] 박민호, 홍석교, "LQR 제어기의 과도 상태 개선 방법에 관한 연구," 대한전기학회 하계학술대회 논문집, pp. 2239-2241, 2004.

박민호



1969년 1월 29일생. 1991년 아주대학교 제어공학과 졸업. 1993년 동 대학원 제어계측공학과 석사. 1999년 9월~현재 아주대학교 전자공학과 박사과정. 관심분야는 최적제어, Robust Control.

홍석교



1948년 8월 23일생. 1971년 서울대학교 전기공학과 졸업. 1973년 동 대학원 석사. 1981년 동 대학원 박사. 1976년~현재 아주대학교 전자공학부 교수. 관심분야는 로봇제어, 컴퓨터 응용, 지능제어.

이상혁



1937년 5월 16일생. 1962년 서울대학교 전기공학과 졸업. 1964년 동 대학원 석사. 1965년 Free University of Brussels 석사. 1973년 Free University of Brussels 박사. 1974년~2002년 8월 아주대학교 전자공학부 교수. 2002년

9월~현재 아주대학교 전자공학과 명예교수. 관심분야는 다변수제어, Robust Control.