韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2005. 2. 제 44권, 제 1호, 103-112.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Febuary. 2005, Vol. 44, No. 1, 103-112.

수학적 사고의 유연성과 확산적 사고

최 영 기 (서울대학교)
도 종 훈 (서울대학교 대학원)

Ⅰ. 서 론

수학창의성 논의를 위해서는 먼저 수학창의성의 구성 요인이 무엇인지를 규명한 후 그것을 어떻게 평가하고 교육할 것인지를 결정해야 할 것이다. Tammadge(1979)는 기존의 지식에 대한 누적적 학습이 너무나 오랫동안 교육을 지배해 왔다고 비판하고 학생들의 창의적인 수학적 능력을 촉진하고 개발해야 한다고 제안하였다. 그러나 일반 창의성과 마찬가지로 수학창의성에 대한 단일하고 합의된 정의는 아직까지 존재하지 않으며(Haylock, 1987; Vivona, 1998), 수학창의성 측정과 교육을 위한 적극적인 방안 모색 또한 아직 미약한 상태에 있다고 할 수 있다.

수학창의성의 구성 요인과 관련하여 Haylock(1987,1997)은 수학문제상황에서 사고의 고착 극복 능력 즉, 사고의 유연성과 확산적 사고 능력을 수학창의성의 구성 요인으로 간주하였다. 국내에서는 김홍원 외(1996,1997)와 이강섭・황동주(2003) 등이 기존의 연구결과들을 종합하여 수학창의성을 수학문제상황에서 사고의 고착을 극복하여 다양한 산출물을 내는 과정이며 능력이라고 정의한 바 있다. 한편, 사고의 유연성과 확산적 사고 능력 사이의 관련성에 대하여 Imai(2000)는 일본의 11-12세 학생 240명을 대상으로 한 실험을 통해 사고의 고착을 극복하는 능력이 다양하고 독창적인 아이디어들을 산출하는데 기여한다고 보고하였다.

그러나 Imai가 사용한 사고의 고착 개념은 Haylock과 국내 연구자들이 제시한 사고의 고착과는 다른 개념이다. Haylock은 사고의 고착을 사고의 유연성과 대비되는 개념으로 간주하고, 이를 내용 고착과 알고리즘 고착으로 특징지었다. 즉, 그는 사고의 고착 극복을 사고의 유연성과 동일한 개념으로 간주하였으며, 그에 의하면 Imai가 사용한 사고의 고착 개념은 보다 하위 개념인 알고리즘 고착에 해당한다.

이처럼 수학창의성 구성 요인에 대한 기존의 논의는 크게 사고의 유연성과 확산적 사고 능력에 대한 논의로 특징지을 수 있다(Haylock, 1987). 그러나 확산적 사고와는 달리 사고의 유연성은 Haylock과 Imai의 예에서 알 수 있듯이 그 개념의 정의 및 적용 범위가 명료하지 않다. 그러므로 수학창의성 논의를 위해서는 먼저 수학창의성의 주요 구성 요인으로 간주되어 온 사고의 유연성과 확산적 사고 능력에 대한 개념 정립 및 이들 사이의 관련성에 대한 분석이 필요하다고 하겠다. 특히 아직 그 개념 구분이 모호한 사고의 유연성에 대한 개념 정립이 우선되어야 할 것이다.

수학창의성 논의에서 사고의 유연성은 수학문제상황을 전제하고 있다. 이러한 관점에서 우리는 기존의 선행연구에 대한 비판적 분석을 통해 사고의 유연성을 문제의 이해 단계에서의 "고정된 사고 극복 능력"과 문제풀이의 과정 단계에서의 "사고(발상)의 전환 능력"으로 새로이 특징짓고, 구체적인 예시 문항 및 예시 문항에 대한 학생들의 반응 사례를 통해 각 개념의 의미를 명확히 하고자 한다(Ⅲ장). 그리고 각 예시 문항에 대한 학생들의 반응 분석을 통해 개념 구분의 타당성을 조사하고, 본 연구에서 정의하는 사고의 유연성과 확산적 사고 능력 사이에는 어떤 관련이 있는지 분석하고자 한다(Ⅳ장). 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

1. 수학문제상황에서 사고의 유연성이란 무엇인가?(Ⅲ장)

* 2004년 12월 투고, 2005년 2월 심사 완료
* ZDM 분류 : C43
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 수학적 사고, 유연성, 확산적 사고

2. 수학문제상황에서 사고의 유연성과 확산적 사고 능력 사이에는 어떤 관련이 있는가?(Ⅳ장)

(1) 고정된 사고 극복 능력과 사고(발상)의 전환 능력의 개념 구분은 타당한가?

(2) 문제의 이해 단계에서 고정된 사고를 극복한 학생과 극복하지 못한 학생은 확산적 사고 능력에 차이가 있는가?

(3) 문제풀이의 과정 단계에서 사고(발상) 전환에 성공한 학생과 성공하지 못한 학생은 확산적 사고 능력에 차이가 있는가?

Ⅱ. 선행 연구

Aiken(1973)은 선행 연구들을 분석하여 그간의 수학 창의성 정의들이 산출물과 인지과정에 기초하고 있음에 주목하고, 수학창의성을 산출물에 초점을 둔 정의와 인지과정에 초점을 둔 정의의 두 가지 범주로 구분하였다. 이에 따르면 본 연구에서 분석하고자 하는 확산적 사고 능력은 산출물에 초점을 둔 수학창의성 정의의 구성 요인이고, 사고의 유연성은 인지 과정에 초점을 둔 수학창의성 정의의 구성 요인이라고 할 수 있을 것이다.

산출물에 초점을 둔 수학창의성 정의로서 Spraker는 수학창의성을 독창적이거나 유용한 해법을 생산하는 능력으로 정의하였고(Haylock,1987), Jensen(1973)은 여러 가지 형태(지필, 그래프 등)로 주어진 수학적 상황에 대하여 다양한 문제를 제기하는 능력에 대해 논하였다. 그 외에도 많은 연구자들이 수학창의성을 확산적 산출물이라는 개념을 통해 접근하였는데, 확산적 산출물은 Torrance(1990,1998) 등의 확산적 산출물 검사에서 일반 창의성을 측정할 때 사용된 규준에서 비롯된 개념으로서, 다양하고 독창적인 산출물을 내는 확산적 사고 능력은 전통적으로 창의성과 동일한 것으로 간주되어 왔다 (Getzels & Jackson,1962; Guilford,1967; Torrance,1990). 특히 Guilford(1967)는 인간의 사고를 수렴적 사고와 확산적 사고로 구분하고, 창의적 산출물을 특정 문제에 대한 확산적 사고 작용의 결과로 보았다. 확산적 사고 능력 검사는 문제에 대한 답을 주어진 시간 내에 가능한 한 많이 제시할 것을 요구하며, 기본적으로 반응한 답의 개수(유창성), 다양한 정도(융통성), 그리고 독특한 정도(독창성)에 따라 평가한다. Evans(1964)는 그의 박사학위 논문에서 확산적 사고 능력을 측정할 수 있는 평가문항 및 방법을 고안하고, 확산적 사고 능력과 수학 성취도 사이에 양의 상관이 있음을 분석하였다. 이와는 달리 Jensen(1973)은 확산적 사고 능력과 수학 성취도 사이에 그다지 큰 상관이 없다고 보고하였다.

Hadamard(1945)에 따르면 수학적 발견에서의 인지 과정은 준비기, 잠복기, 조명기, 검증기의 4단계로 간주될 수 있는데, 인지 과정에 대한 관심들 중 상당부분이 잠복기에서 조명기로의 이행에 관한 문제 즉, 통찰이 일어나지 않는 것은 무엇 때문인가에 관한 것이다. 이와 관련하여 Wertheimer(1959)는 통찰이 일어나지 못하는 것은 그 사람의 사고가 부적절한 방향으로 고착되어 있기 때문이라고 간주한다. 실제로 수학의 역사에서 위대하고 창의적인 업적들 중에는 기존의 통념이나 상식을 극복한 통찰로부터 비롯된 것이 많다. 대표적인 예로 볼리아이와 가우스, 로바체프스키 등에 의한 비유클리드 기하학의 발견은 당시의 상식과 통념에 위배되는 쌍곡공준을 받아들임으로써 이루어졌다. 그러나 알려진 바와 같이 사체리는 평행공준이 성립하지 않는 경우로부터 비유클리드 기하학의 여러 정리들을 유도해 내었으나, 그로부터 모순을 유도하려고만 함으로써 비유클리드 기하학의 발견에 이르지는 못한 것으로 알려져 있다. 그는 매우 뛰어난 수학자이었지만 평행공준이 나머지 4개의 공준들에 의해 함의될 수 있으리라는 당대의 통념을 극복하지는 못했다고 볼 수 있다.

사고의 고착은 사고의 유연성과 대조되는 개념으로서, Krutetskii(1969,1976)는 정형화된 해법에서 벗어나 자기 제한을 극복하는 사고 과정의 유연성을 수학적 능력의 중요한 구성요인으로 간주하였다.

> 수학적 능력은 문제에 대한 다양한 해법 시도와 하나의 정신 조작에서 또 다른 정신 조작으로의 쉽고도 자유로운 전환 과정 속에 나타난다. 재능이 있는 학생은 필요하다면 패턴화된 전형적인 해법을 버리고 새로운 해법을 찾을 수 있다....이러한 것이 수학창의성의 진정한 모습이다.(Krutetskii, 1969, p.117).

한편, Balka(1974)는 수학에서의 창의적 능력에 대한 6가지 규준 목록 중에 수학적 상황에서 답을 찾기 위해 기존에 가지고 있던 사고방식을 탈피하는 능력을 포함시

쳤고, Laylock(1970)은 문제를 다양한 방식으로 분석하는 능력에 대해 논하였으며, Romey(1970)는 수학창의성을 수학적 아이디어나 접근법 등을 기존의 것과는 다른 새로운 방식으로 결합하는 능력으로 정의하였다. 문제상황을 다양하고 새로운 관점에서 파악하고 해결하기 위해서는 유연한 사고가 필요하다는 관점에서 볼 때, 결국 인지과정에 초점을 둔 이상의 수학창의성 정의들의 가장 중요한 측면은 사고의 유연성에 있다고 할 수 있을 것이다.

특히 Haylock(1987,1997)은 이전의 논의들을 종합하여 사고의 유연성을 내용 고착과 알고리즘 고착 극복의 두 개념으로 특징지었다. 그에 의하면 내용 고착은 문제와 관련된 내용 영역에 대한 자기 제한을 의미하고, 알고리즘 고착은 이전에 학습했거나 성공적이었던 알고리즘을 보다 나은 해법이 존재하는 이후의 문제에서도 계속해서 적용하는 현상을 의미한다.

Ⅲ. 수학문제상황에서 사고의 유연성이란 무엇인가?

Haylock(1987,1997)은 수학문제상황에서 사고의 고착 대상이 특정 내용 영역인가 알고리즘인가를 기준으로 사고의 유연성을 특징지었다고 할 수 있다. 그러나 수학에서 알고리즘은 학생들이 학습하는 내용 영역의 한 부분이며, 따라서 알고리즘 고착 역시 내용 고착의 한 예로 간주되는 것이 자연스러울 것이라 판단된다.

수학창의성과 관련한 사고의 유연성 논의는 수학문제상황을 전제한다. 수학문제상황에서 사고의 유연성은 문제 해결이 시작되는 문제의 이해 단계와 문제 해결이 본격적으로 이루어지는 문제풀이의 과정 단계에서 모두 중요한 역할을 한다. 문제의 이해 단계에서 학습자가 기존의 특정 내용 지식이나 통념에 고착될 경우 문제의 이해 자체가 어려울 수 있다. 혹시 문제를 이해했다고 하더라도 문제풀이의 과정 단계에서 기존에 알고 있었거나 문제풀이 과정에서 자신이 고안해낸 특정한(혹은 틀에 박힌, 통상적인, 틀린, 비효율적인) 해법이나 관점에 고착되어 문제풀이가 더 이상 진전되지 않을 수 있다.

이러한 관점에서 우리는 사고 고착 대상의 구분을 통해 사고의 유연성을 특징짓고자 한 Haylock과는 달리 수학문제상황에서 사고의 고착이 일어나는 시점(단계)을 기준으로 사고의 유연성을 문제의 이해 단계에서의 고정된 사고 극복 능력과 문제풀이의 과정 단계에서의 사고(발상)의 전환 능력으로 특징짓고자 한다. 이러한 관점에 따르면 Haylock의 알고리즘을 포함한 내용 고착 극복 능력은 시점에 따라 문제의 이해 단계에서의 고정된 사고 극복 능력이 될 수도 있고, 문제풀이의 과정 단계에서의 사고(발상)의 전환 능력이 될 수도 있다.

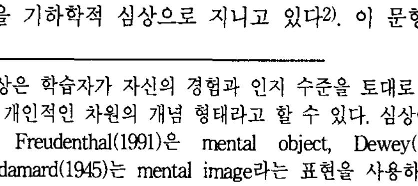
1. 문제의 이해 단계에서의 고정된 사고 극복 능력

본 연구에서 우리는 "고정된 사고"를 경험과 학습을 통해 습득되어 상식화된 학습자의 사고방식 중 새로운 정의나 개념에 당면하였을 때 장애가 되는 사고방식으로 정의한다. 이 때 알고리즘을 포함하여 학습자가 지닌 특정 내용 영역에 대한 기존의 지식, 상식, 통념 등이 모두 고정된 사고방식에 포함될 수 있을 것이다. 그리고 문제의 이해 단계에서 "고정된 사고 극복 능력"을 문제에 제시된 새로운 정의나 개념에 당면하였을 때 고정된 사고를 극복하고 그 개념이나 정의에 유연하게 대처해 나가는 능력으로 정의한다. 다음과 같은 문제를 생각해보자.

평면상에 l이 아닌 임의의 두 직선 m, n이 서로 평행하다는 것을 다음과 같이 정의하자.

[정의] 두 직선 m, n의 교점이 l위에 있을 때 m, n은 서로 평행하다.

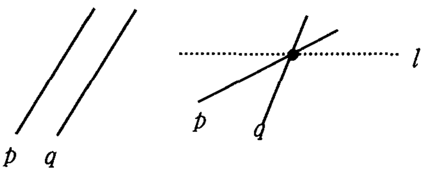
이 정의를 이용하여 삼각형 ABC와 대응하는 각 변이 모두 서로 평행한 삼각형 A′B′C′을 그려라.



평면에서 교점을 갖지 않는 두 직선은 서로 평행하다고 정의되며, 학생들은 이에 대하여 간격이 일정한 두 직선을 기하학적 심상으로 지니고 있다[2]. 이 문항의 경

2) 심상은 학습자가 자신의 경험과 인지 수준을 토대로 형성하는 개인적인 차원의 개념 형태라고 할 수 있다. 심상에 대하여 Freudenthal(1991)은 mental object, Dewey(1933)와 Hadamard(1945)는 mental image라는 표현을 사용하였으며, 이와 유사한 개념으로 Tall & Vinner(1981)는 Concept image, Skemp(1987)는 Schema, Fischbein & Nachlieli(1998)과 Alcock & Simpson(2002)는 Prototype이라는 용어를 사

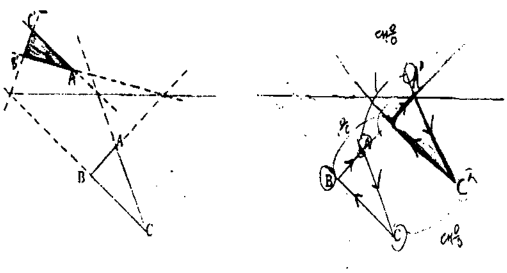
우 서로 평행한 두 직선에 대한 심상이 새롭게 정의된 평행한 두 직선의 개념 이해를 방해하는 요인이 될 수 있으며, 이 때 심상은 새로운 정의를 받아들이기 위해 학습자가 극복해야 할'고정된 사고방식이 된다(그림 1).



평행한 두 직선 p, q에 대한 심상 평행한 두 직선 p, q에 대한 새로운 정의

<그림 1>

2003학년도 서울대학교 과학영재교육원 수학분과에 소속된 중등 수학영재 32명에게 이 문항을 제시한 결과 27명이 올바른 답을 제시한 데 비해 5명의 학생은 기존에 지니고 있던 평행한 두 직선에 대한 심상 즉, 고정된 사고를 극복하지 못하고 문제해결에 실패하였다(그림2).



<그림 2> 고정된 사고를 극복한 학생(왼쪽)과 극복하지 못한 학생(오른쪽)의 응답 사례

다른 예로 Krutetskii(1976)는 문항 "5로 나누어서 7이 남는 수의 일반적인 형태를 대수적으로 나타내어라"에 대하여 수학적 능력이 뛰어난 학생들이 "5x+7"이라는 답을 제시한데 비해, 그보다 능력이 떨어지는 학생들은 "나눗셈에서 나머지는 나누는 수보다 작아야 하므로 5로 나누어서 7이 남는 수는 없다"라는 답을 제시한 것을 관찰하고, 수학적 능력이 뛰어난 학생일수록 문제에 주어진 구체적인 데이터들보다는 문제 속에 내재한 추상적인 구조에 주목하는 경향이 있다고 분석하였다(Heid, 1983). 그러나 학생들의 반응은 그들의 학습과 경험을 통해 습득된 고정된 사고의 극복이라는 관점에서 재해석 될 수 있다. 즉, 그가 관찰한 두 부류의 학생들은 "나눗셈에서 나머지는 언제나 나누는 수보다 작아야한다"라는 고정된 사고를 극복한 학생과 극복하지 못한 학생들로 간주될 수 있을 것이다.

용하였다.

2. 문제풀이의 과정 단계에서의 사고(발상)의 전환 능력

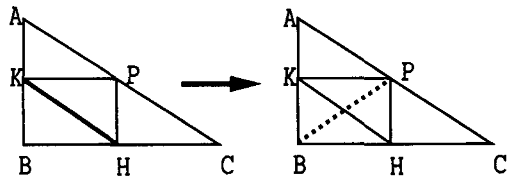
본 연구에서 우리는 "사고(발상)의 전환 능력"을 문제풀이의 과정에서 틀에 박힌 통상적인 해법이나 관점과는 다른 문제해결에 유용한 새로운 해법이나 관점을 떠올리거나, 제시된 문제 상황을 다른 사람들과는 다른 관점에서 파악하여 접근하는 능력으로 정의한다. 다음과 같은 문제를 생각해 보자[3].

변 AC가 빗변인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 AC 위의 한 점 P에 대하여, 점 P를 지나면서 변 AB, 변 BC에 각각 평행인 직선이 변 BC, 변 AB와 만나는 점을 각각 H, K라고 하자. 선분 HK의 길이가 최소가 되도록 하는 점 P의 위치를 구하여라.

이 문항에 대한 학생들의 풀이 전략은 다양하다. 학생들은 점 P의 위치를 옮겨가면서 각 경우마다 자를 이용하여 선분 HK의 길이를 실측하기도 하고, 좌표축을 도입하고 피타고라스 정리나 직선의 방정식을 이용하기도 하며, 또 어떤 학생들은 산술-기하 평균 부등식을 이용하기도 한다.

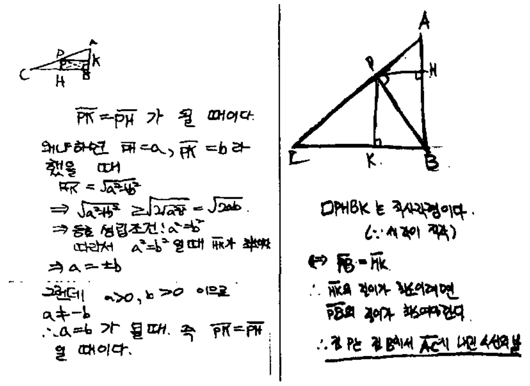
그러나 일부 학생들은 문제에 주어진 사각형 PKBH가 직사각형이고 보조 선분 BP가 선분 HK와 대각선으로서 서로 길이가 같다는 사실에 주목한다(그림2). 이들은 선분 HK 대신 선분 BP의 길이가 최소가 되는 경우를 고려하면서 문제에 대한 관점을 그러지 못하는 학생들과 달리한다.

3) 이 문항은 Furinghetti et al.(2001)이 열린 문제 상황에서 소집단 협력 학습이 학생들의 추측 생산 및 정당화 능력 함양에 어떤 영향을 미치는지 알아보기 위해 사용한 문항이다.



<그림 3> 사고(발상) 전환을 통한 관점의 변화

2003년 서울대학교 과학영재교육원 수학분과에 소속된 중등 수학영재 29명에게 위 문항을 제시한 결과 이들 중 10명이 위 문항을 선분 BP의 관점에서 해결하였고, 나머지 학생들은 다양한 전략을 사용하긴 하였지만 문제를 해결하지는 못하였다. 즉, 10명의 학생들은 자유로운 사고(발상)의 전환을 통해 문제를 쉽게 해결하였으나, 나머지 19명의 학생들은 선분 HK로부터 선분 BP로의 사고(발상) 전환에 실패한 것으로 볼 수 있다(그림4).



<그림 4> 사고(발상) 전환에 성공한 학생(오른쪽)과 실패한 학생(왼쪽)의 응답

다른 예로 Haylock이 알고리즘 고착의 대표적인 예로 제시한 Einstellung Effect를 들 수 있다. Luchins(1951)는 들이가 주어진 세 개의 물컵을 이용하여 주어진 물컵의 들이를 재는 일련의 문제들에 대한 검사를 실시하였는데, 피험자가 처음 몇 개의 문제 풀이 과정에서 얻은 알고리즘을 그 보다 더 간단한 해법이 존재하는 이후의 문제에서도 계속 적용하는 현상을 관찰하고 이를 Einstellung Effect라고 하였다. Einstellung Effect를 보인 학생들은 문제풀이의 과정에서 자신이 만들어내어 익숙해진 특정 알고리즘으로부터 보다 간단한 해법으로의 사고(발상) 전환에 실패한 것으로 볼 수 있다.

Ⅳ. 사고의 유연성과 확산적 사고 능력 사이의 관계

우리는 Ⅲ장에서 사고의 유연성을 문제의 이해 단계에서의 고정된 사고 극복 능력과 문제 풀이의 과정 단계에서의 사고(발상)의 전환 능력으로 특징짓고, 각 구성 요인에 대한 예시 문항과 그에 대한 학생들의 반응 사례를 예시하였다. 이 장에서는 각 예시 문항에 대한 학생들의 지필검사 반응을 토대로 이러한 개념 구분의 타당성 및 확산적 사고 능력과의 관련성을 알아보고자 한다.

1. 연구 방법 및 절차

(1) 연구 대상

서울특별시 4개 지역구(강동구, 종로구, 도봉구, 영등포구)에 각각 위치한 4개 중학교 2학년 학생 193명의 지필 검사 결과를 분석하였다. 무응답을 포함하여 분석이 불가능한 답을 제시한 학생들은 분석 대상에서 제외되었다.

(2) 문항 및 채점 방법

고정된 사고 극복 능력, 사고(발상)의 전환 능력, 확산적 사고 능력 별로 1개 문항씩 총 3개 문항에 대한 지필검사를 실시하였다. 사고의 유연성 측정 문항의 경우 Ⅲ장에 제시된 예시 문항들(4개) 중에서 난이도 및 선행연구(Imai,2000)와의 비교·분석을 고려하여 2개 문항을 선택·수정하였고, 확산적 사고 능력 측정 문항의 경우 Evans(1964)와 Imai(2000)의 연구에 사용된 문항을 그대로 사용하였다.

문제의 이해 단계에서의 고정된 사고 극복 능력 측정 문항은 Ⅲ장 1절에 제시된 예시 문항을 난이도와 연구 목적을 고려하여 다소 수정한 것이다(부록). 본 연구에서는 학생들이 심상으로 지니고 있는 평행한 두 직선에 대한 고정된 사고를 극복하는가의 여부에 관심이 있으며, 학생들이 새로운 정의에 얼마나 유연하게 대처하는가를 측정하는데 초점을 둔다. 옳은 그림을 제시한 학생은 문제의 이해 단계에서 고정된 사고를 극복한 것으로, 그렇지 못한 학생은 극복하지 못한 것으로 간주한다.

문제풀이의 과정 단계에서의 사고(발상)의 전환 능력

측정 문항은 Luchins(1951)에 의해 고안되어 Imai(2000)와 Haylock(1985,1997)의 연구에 사용된 문항으로서, 들이가 주어진 세 개의 컵을 이용하여 주어진 들이를 잴 수 있는 최선의 방법을 찾는 문항이다(부록). 학생들은 6개의 문항에 답을 해야 하며, 반응 유형에 따라 사고(발상)의 전환에 성공한 집단과 성공하지 못한 집단으로 나누어진다. 처음 몇 개의 문항에서 얻은 답을 보다 간단한 해법이 존재하는 이후의 문항에서도 계속 적용하여 6개의 문항에 모두 같은 답(B－A－2C)을 제시한 학생은 사고(발상) 전환에 성공하지 못한 집단에 속하고, 앞의 4개 문항에는 같은 답(B－A－2C)을 제시했지만 5번이나 6번 문항에서는 보다 간단한 답(예를 들어, 5번에서는 A－C, 6번에서는 C)을 찾아 제시한 학생은 사고(발상) 전환에 성공한 집단에 속하는 것으로 간주한다. 이러한 분석 방법은 Imai와 동일하다.

확산적 사고 능력 측정 문항은 원에 내접하고 있는 정육각형을 나타낸 그림을 보고 머릿속에 떠오르는 수학적인 생각, 아이디어, 관계 등을 쓰는 문항이다(부록). 학생들은 제한시간 내에 독창적이고 다양한 생각이나 아이디어, 관계 등을 가능한 한 많이 제시해야 한다. 이 때 확산적 사고 능력은 유창성, 융통성, 독창성의 세 가지 하위 요인에 대한 반응 점수로 평가된다. 유창성의 경우 각 반응에 대하여 1점씩 부여하고, 융통성의 경우 전체 학생들의 반응을 몇 개의 범주로 나누어 각 범주에 대하여 1점씩 부여한다. 그리고 독창성 점수는 각 반응의 희소성 정도에 따라 서로 다른 점수를 부여하는데, 각 반응에 대하여 응답한 학생의 비율이 전체의 50% 이상일 경우 0점, 25% 이상 50% 미만일 경우 1점, 10% 이상 25% 미만일 경우 2점, 5% 이상 10% 미만일 경우 3점, 그리고 5% 미만일 경우 4점을 부여한다. 이러한 분석 방법은 Imai와 동일하다.

(3) 결과 분석 방법

문제의 이해 단계에서의 고정된 사고 극복 능력과 문제풀이의 과정 단계에서의 사고(발상)의 전환 능력 사이의 관계를 분석하기 위해 피어슨의 적률상관계수를 이용한 상관분석을 실시하였다. 사고(발상)의 전환에 성공한 집단과 성공하지 못한 집단, 고정된 사고를 극복한 집단과 극복하지 못한 집단이 확산적 사고 능력에 차이가 있는지를 분석하기 위해 t-검증을 실시하였다.

2. 결과

Ⅲ장에서 우리는 고정된 사고 극복 능력과 사고(발상)의 전환 능력을 사고의 유연성을 나타내는 서로 다른 능력으로 특징지었다. 학생들의 반응을 분석한 결과 이들 두 능력 사이에 통계적으로 유의미한 상관은 없는 것으로 나타났다

($r2=0.11$, $p=0.12>0.05$)[4]. 즉, 사고(발상)의 전환에 성공한 학생이 고정된 사고를 극복하거나 혹은 그 역이 성립한다고 볼 수 없으며, 이는 두 능력이 학생들의 서로 다른 인지적 특성을 나타내고 있음을 의미한다. 그러므로 두 능력을 서로 다르게 간주한 본 연구의 가설은 유효하다고 할 수 있다.

Imai(2000)는 사고(발상)의 전환에 성공한 학생들이 확산적 사고 능력 또한 뛰어나다고 보고하였다. 학생들의 반응을 분석한 결과 문제풀이의 과정 단계에서 사고(발상)의 전환에 성공한 학생 44명과 성공하지 못한 학생 149명의 확산적 사고 능력 평균은 각각 21.34, 16.07로서 사고(발상)의 전환에 성공한 학생이 그러지 못한 학생보다 확산적 사고 능력 또한 우수한 것으로 나타났으며(표1), 이는 Imai(2000)의 연구 결과를 뒷받침한다.

<표1> 고정된 사고 극복 및 사고(발상) 전환 여부에 따른 확산적 사고 능력 점수

구분		학생 수	평균	표준 편차	t값
고정된 사고	극복	37	22.35	12.95	3.30*
	미극복	156	16.06	9.72	(.00)
사고(발상)의 전환	성공	44	21.34	12.64	2.55*
	실패	149	16.07	9.75	(.01)

()안의 값은 유의확률임. *p<.05

4) 실제로 193명의 학생 중에서 사고(발상)의 전환에 성공한 학생과 고정된 사고를 극복한 학생은 각각 44명과 37명이었지만, 두 경우에 동시에 해당하는 학생은 21명이었다.

한편, 문제의 이해 단계에서 고정된 사고를 극복한 학생과 극복하지 못한 학생들의 확산적 사고 능력 평균은 각각 22.35, 16.06으로서 고정된 사고를 극복한 학생이 그러지 못한 학생보다 확산적 사고 능력 또한 우수한 것으로 나타났다(표1). 특히 고정된 사고를 극복한 학생 37명과 사고(발상)의 전환에 성공한 학생 44명의 확산적 사고 능력 점수 사이에 거의 차이가 없음을 확인할 수 있는데, 이는 서로 다른 특성으로 확인된 두 능력이 적어도 확산적 사고에서는 통계적인 차이가 없음을 의미한다.

V. 결론 및 제언

사고의 유연성과 확산적 사고 능력은 그간 여러 학자들에 의해 수학창의성의 중요한 측면으로 간주되어 왔다. 확산적 사고 능력은 장기간에 걸친 일반 창의성 분야의 연구를 통해 그 개념의 의미와 측정법이 상당한 정도로 체계화되어 왔다. 그러나 사고의 유연성 개념은 Haylock과 Imai의 예를 통해 알 수 있듯이 여전히 그 개념 구분이 불명확하며, 더구나 확산적 사고 능력과의 관련성에 대한 연구를 찾아보기는 어렵다.

이에 본 연구에서는 수학문제해결의 관점에서 사고의 유연성을 문제의 이해 단계에서의 고정된 사고 극복 능력, 문제풀이의 과정 단계에서의 사고(발상)의 전환 능력으로 보고, 구체적인 예를 통해 각 개념의 의미를 명확히 하고자 하였다. 그러나 문제의 이해 단계와 문제풀이의 과정 단계의 개념적 구분은 실제 수학문제상황에서는 명료하지 않을 수 있다. 특히 문제상황이 복잡하고 어려울 경우 문제의 이해가 문제풀이의 전 과정을 통해 이루어지기도 하고, 문제풀이의 과정 단계에서 새로운 보조문제들이 생성되기도 한다.

실험 결과의 분석을 통해 문제의 이해 단계에서의 고정된 사고 극복 능력과 문제풀이의 과정 단계에서의 사고(발상)의 전환 능력의 개념 구분이 유의미하며, 이들 두 능력이 모두 확산적 사고 능력과 긍정적인 상관이 있음을 확인할 수 있었다. 또 서로 다른 능력으로 확인된 사고의 유연성을 특징짓는 두 능력이 확산적 사고에 있어서는 통계적인 차이가 없음을 확인할 수 있었다. 그러나 본 연구에서는 사고의 유연성과 확산적 사고 능력을 평가하기 위해 각각 1개씩의 예시문항에 대한 학생들의 반응을 분석하였다. 단일 문항으로 해당 특성이나 능력을 신뢰성 있게 측정하기는 어려우며 문항의 내용 수준이나 형식 등 학생들의 응답에 영향을 미칠 수 있는 다양한 변인들이 존재한다. 그러므로 내용 수준, 난이도 및 측정하고자 하는 특성이나 능력에 대한 적합성 등을 고려한 다양한 문항의 개발과 학생들의 반응 특성에 대한 비교, 분석 연구가 후속으로 이루어져야 할 것이다.

본 연구는 학교수학에서의 수학창의성 교육 연구를 위한 기초 연구라고 할 수 있다. 최근 들어 권오남·김정효(2000)가 창의적 문제해결력 신장을 위한 초등학교 수준의 수학과 교육과정 연구를 실시한 바 있으나, 수학교육 실천의 관점에서는 아직까지 충분한 논의가 이루어지지 않았다. 수학창의성에 대한 정의는 다양할 수 있다. 중요한 것은 그 정의에 입각하여 수학창의성을 어떻게 신장하고 평가할 것인가에 대한 구체적이고 실천 가능한 방안을 제시하는 것이다. 그러므로 수학창의성에 대한 정의로부터 시작하여 학생들의 수학창의성을 신장시킬 수 있는 교수-학습 내용과 방법, 교사의 역할 등에 대한 보다 구체적인 연구가 실증적인 자료를 토대로 심도 있게 이루어져야 할 것이다. 수학창의성의 구성 요인에 관한 본 연구는 이러한 후속 연구들을 위한 기초연구로서의 역할을 할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

권오남·김정효 (2000). 창의적 문제해결력 중심의 수학 교육과정 적용 및 효과 분석. 한국수학교육학회지시리즈 A <수학교육> **제39권 제2호**. 서울: 한국수학교육학회.

김홍원·김명숙·송상헌(1996). 수학영재 판별 도구 개발 연구(Ⅰ) - 기초연구편. 한국교육개발원 CR 96-26. 서울: 한국교육개발원.

김홍원·김명숙·방승진·황동주 (1997). 수학영재 판별 도구 개발 연구(Ⅱ) - 검사제작편. 한국교육개발원 CR 97-50. 서울: 한국교육개발원.

이강섭·황동주 (2003). 일반창의성(도형)과 수학창의성과의 관련 연구. 한국수학교육학회시리즈 A <수학교육> **제42권 제1호**. 서울: 한국수학교육학회.

Alcock, L. & Simpson, A. (2002). Definitions : Dealing with categories mathematically. *For the learning of mathematics* **22(2)**, pp.28-34.

Balka, D. S .(1974). Creative ability in mathematics. *Arithmetic Teacher* **21**. pp.633-636.

Dewey, J. (1933). *How we think*. Boston : Heath.

Evans, E. W. (1964). *Measuring the ability of students to respond in creative mathematical situations at the late elementary and early junior high school level*. Doctoral Dissertation. University of Michigan.

Fischbein, E. & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geomerical reasoning. *International journal of science education* **20(10)**, pp.1193-1211.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.

Furinghetti, F. et al. (2001). Students approaching proof through conjectures : snapshots in a classroom. *International journal of mathematical education in science and technology* **32(3)**, pp.319-335.

Getzels, J. & Jackson, P. (1962). *Creativity and Intelligence*. Wiley : New York.

Guilford, J. P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*. McGraw Hill : New York.

Hadamard, J .(1945). *The mathematician's mind : the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press.

Haylock, D. W. (1985). Conflicts in the assessment and encouragement of mathematical creativity in schoolchildren. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **16(4)**, pp.547-553.

__________ (1987). A framework for assessing mathematical creativity in schoolchildren. *Educational studies in mathematics* **18**, pp.59-74.

__________ (1997). Recognising mathematical creativity in schoolchildren. *ZDM* **29(3)**, pp.68-74.

Heid, M. K. (1983). Characteristics and special needs of the gifted student in mathematics. *Mathematics teacher* **76(4)**, pp.221-226.

Imai, T. (2000). The influence of overcoming fixation in mathematics towards divergent thinking in open-ended mathematics problems on Japanese junior high school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* **31(2)**, pp.187-193.

Krutetskii, V. A (1969). 'Mathematical aptitudes', in J.Kilpatrick and I.Wirzup(eds.), *Soviet studies in the Psychology of learning and teaching mathematics*, Volume II, University of chicago press, Chicago.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. University of Chicago press.

Laylock, M. (1970). Creative mathematics at Nueva. *Arithmetic Teacher* **17**, pp.325-328.

Luchins, A. S. (1951). The Einstellung test of rigidity : Its relation to concreteness of thinking. *Journal of Consulting Psychology* **15**, pp.303-310.

Romey, W. D. (1970). What is your creativity quotient?. *School Science and Mathematics* **70**, pp.3-8.

Skemp, R. R./황우형 역 (1987). 수학학습심리학. 사이언스북스.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity. *Educational Studies in Mathematics* **12**, pp.151-169.

Tammadge, A. (1979). Creativity. *The mathematical Gazette* **63**, pp.145-163.

Torrance, E .P. (1990,1998). *Torrance Tests of Creative Thinking : Norms-Techincal Manual-figural forms A &B*. Scholastic Testing Service Inc : Bensenvill, Illinoi

Vivona, R .F. (1998). *Toward a theory of mathematical creativity*. Ph.D.thesis, The union institute graduate college, Graduate school of interdisciplinary arts and sciences.

Wertheimer, M. (1959). *Productive thinking*. New York : Harper.

Flexibility of Mind and Divergent Thinking in Problem Solving Process

Choi, Youn gi
Department of Mathematics Education, Seoul National University, Seoul 151-748, Korea
E-mail : yochoi@snu.ac.kr

Do, Jong hoon
Department of Mathematics Education, Seoul National University, Seoul 151-748, Korea
E-mail : djhn@snu.ac.kr

This paper is designed to characterize the concept of flexibility of mind and analyze relationship between flexibility of mind and divergent thinking in view of mathematical problem solving. This study shows that flexibility of mind is characterized by two constructs, ability to overcome fixed mind in stage of problem understanding and ability to shift a viewpoint in stage of problem solving process. Through the analysis of writing test, we come to the conclusion that students who overcome fixed mind surpass others in divergent thinking and so do students who are able to shift a viewpoint.

* ZDM classification : C43
* MSC2000 classification : 97C30
* key word : flexibility of mind, divergent thinking, mathematical problem solving

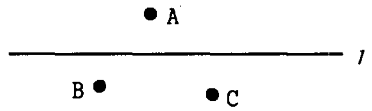
부록 : 검사 문항

(1) 문제의 이해 단계에서의 고정된 사고 극복 능력 검사 문항

평면상에 l 이 아닌 임의의 두 직선 m, n 이 서로 평행하다는 것을 다음과 같이 약속하자.

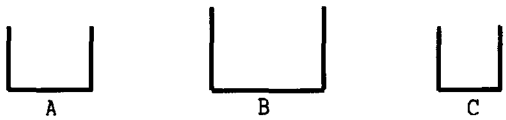
[약속] 두 직선 m, n 의 교점이 l 위에 있을 때 m, n 은 서로 평행하다.

위 약속에 따라, 다음 그림에서 두 점 A,B를 지나는 직선을 그리고, 점 C를 지나 이 직선에 평행한 직선을 그려라.



(2) 문제풀이의 과정 단계에서의 사고(발상)의 전환 능력 검사 문항

들이가 주어진 3개의 컵 A, B, C를 사용하여 주어진 양을 잴 수 있는 가장 좋은 방법을 찾아라.



[예] A에는 10 l, B에는 63 l, C에는 2 l를 담을 수 있다고 할 때, 55 l를 재는 방법을 찾아라.
답 : B - A + C

(1) A에는 10 l, B에는 64 l, C에는 1 l를 담을 수 있다고 할 때, 52 l를 재는 방법을 찾아라.

(2) A에는 100 l, B에는 124 l, C에는 5 l를 담을 수 있다고 할 때, 14 l를 재는 방법을 찾아라.

(3) A에는 10 l, B에는 17 l, C에는 2 l를 담을 수 있다고 할 때, 3 l를 재는 방법을 찾아라.

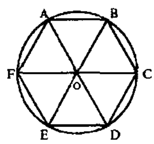
(4) A에는 21 l, B에는 127 l, C에는 3 l를 담을 수 있다고 할 때, 100 l를 재는 방법을 찾아라.

(5) A에는 23 l, B에는 49 l, C에는 3 l를 담을 수 있다고 할 때, 20 l를 재는 방법을 찾아라.

(6) A에는 50 l, B에는 65 l, C에는 5 l를 담을 수 있다고 할 때, 5 l를 재는 방법을 찾아라.

(3) 확산적 사고 능력 검사 문항

다음 그림을 보고 머릿속에 떠오르는 수학적인 생각, 아이디어, 관계 등을 아래의 [예]처럼 모두 써라. 당연하다고 생각되는 것들도 모두 써라. 가능한 한 다양하게 많이 써라. 다른 친구들이 생각해내지 못할 것들을 쓰도록 노력하라.(제한시간 10분)



[예] 정육각형의 각 꼭지점이 원 위에 있다.