韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2005. 2. 제 44권, 제 1호, 67-85.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Febuary. 2005, Vol. 44, No. 1, 67-85.

# 초등교사의 분수 지식 실태 분석

**이 종 욱 (주원초등학교)**

## Ⅰ. 서 론

### A. 연구의 필요성 및 목적

수학교육을 개선하고자 하는 노력은 여러 형태로 이루어지고 있으며, 이러한 노력의 결과는 학생을 통해서 나타난다. 학생 개개인이 보다 바람직한 방향으로 발전하도록 도와주는 것이 교육의 본질적 목표라면, 교실에서 교사에 의해 이루어지는 수업의 변화는 이 목표를 달성하는데 직접적으로 영향을 주게 된다. 교육이념과 교육목표가 시대의 변화에 따라 새롭게 설정되더라도 실제 교육현장에서 학생을 가르치고 있는 교사가 변하지 않는다면 교육과정의 개정과는 무관한 수업이 이루어지게 된다는 사실은 교육에서 교사가 차지하는 중요성을 인정하기에 충분하다.

심리학적 관점에서 연구자들은 교사의 지식을 연구하기 시작했다. Shulman(1986)이 교사 지식을 교과 지식(subject matter knowledge), 교수법적 내용 지식(pedagogical content knowledge), 교육과정 지식(curricular knowledge)으로 구분하면서 교수법적 내용 지식에 대한 관심을 가지게 되었으며 이 지식은 학자와 교사를 구분하는 교사의 전문적인 지식으로 논의되기 시작했다.

수학교육에서 교사의 지식과 관련한 최근의 연구는 크게 두 방향에서 진행되어 왔다. 하나는 수학 교과에 대한 지식의 상태가 어떠한가를 알아보는 연구가 진행되고 있으며, 다른 하나는 교실 수업과 교사 지식과의 관계를 규명하는 것이다. 수학교육을 개선하려는 개혁 운동의 밑바탕에는 교사의 지식을 향상시키는 것이 전제 조건이 되며 수학 교과에서는 수학이라는 교육내용이 간과할 수 없는 지식의 한 영역을 차지한다고 볼 수 있다. 하지만 지금까지의 연구들을 살펴보면 교과 지식과 관련되는 문헌에서는 주로 예비교사들을 대상으로 몇 가지 주제와 관련한 지식 상태를 분석한 연구들이 대부분이었다 (Zazkis & Campbell, 1994; Khoury & Zazkis, 1994; Simon, 1993; Post et al., 1991; Ball, 1990a, 1990b). 다시 말하면, 현직 교사를 연구 대상으로 설정하여 교사가 가진 교과 지식과 수업 실제와의 관계를 제시하는 연구가 부족함을 알 수 있다.

예비교사를 대상으로 이루어진 연구에서, 많은 예비교사들은 수학 교과에 대한 지식이 풍부하지 않은 것으로 나타났다. 의미 있는 관계를 형성하는 개념적 이해에 지식의 근거를 두기보다는 오히려 규칙과 알고리즘을 기억하는 것에 두고 있었다. 대부분의 문제 상황에서 예비교사들은 알고리즘을 사용하여 바른 답을 구할 수 있었지만, 해결한 방법의 의미를 설명하는 것에 어려움을 나타내었다. 특히, 예비교사들은 연산의 의미를 표현하는 지식이 매우 부족하였는데, 연산을 실생활 상황, 그림 모델, 그리고 기호적 표현과 연결하여 이해하는 능력이 부족하였다(Buckreis, 2000).

우리나라의 경우 교사 지식과 관련된 연구는 예비교사의 지식 실태를 분석한 연구(차인숙, 한정순, 2004; 이종욱, 2003; 이대현, 서관석, 2003; 김민경, 2003; 서관석, 전경순, 2000)와 현직교사의 지식 실태를 분석한 연구(김원경, 김용대, 2002; 박임숙, 2002)로 구분할 수 있으며, 이들 연구에서 예비초등교사들은 자연수의 덧셈과 뺄셈식을 문장제로 표현할 때 감수나 가수를 구하는 식을 문장제로 표현하는 것을 어려워하였으며 합병과 비교와 같이 두 집합의 관계에 대한 이해가 매우 부족하였다. 그리고 분수를 부분-전체 의미로서 주로 표현하고 있으며 몫과 비의 의미로 표현하는 비율이 아주 낮았다. 또한 분수의 연산과 관련하여 덧셈, 뺄셈, 곱셈에 대한 문장제

* 2004년 12월 투고, 2005년 2월 심사 완료.
* ZDM분류 : C39
* MSC2000분류 : 97C70
* 주제어 : 초등교사, 분수지식

를 바르게 구성하지만 분수 나눗셈의 경우 문장제를 표현하는 데 어려움을 가졌다. 예비중등교사들은 함수 관계 상황 표현 능력에서 실세계와 관련된 상황을 제시하는 것에 있어서 다양성이 결여되어 있어서 변수 선택이 바르지 못하고 변수들 간에 형성되어 있는 관계의 해석이 바르지 못하였다. 현직 중등교사들은 함수 개념과 관련하여 관계에 의한 함수와 식에 의한 함수 부분보다 순서쌍과 그래프에 의한 함수와 대응에 의한 함수 부분에서 이해 정도가 높게 나타났으며, 무한 개념의 이해에서는 초한 기수에 대한 수학적 지식을 이해하지 못하는 경우가 많았으며 실수의 연속성을 수학으로 표현하여 이해하는 것을 매우 어려워하는 것으로 나타났다.

지금까지의 연구들이 수학에 대한 교사의 지식과 교실 수업에서의 영향에 대한 중요한 정보를 제공하였지만 이들 연구는 몇 가지 점에서 한계를 가진다.

첫째, 대부분의 연구는 예비교사나 현직교사의 교과 지식의 실태를 분석하여 교사교육에 몇 가지 시사점을 주고 있지만 교사에게 더욱 요구되는 교수법적 내용 지식이라는 측면에서 접근하는 연구가 부족했다. 교사가 수학 수업을 하기 위해서는 수학 교과에 대한 지식과 함께 학생을 이해하고서 학생에게 적절하게 설명하는 방법적 지식이 더욱 필요하다는 입장을 인정한다면 교수법적 내용 지식과 관련한 연구가 이루어져야 할 것이다.

둘째, 현직교사를 대상으로 교사의 지식 실태를 분석한 연구가 부족하다는 것이다. 교사교육이 성공적으로 이루어지기 위해서는 교사교육기관에서 운영하는 교육과정을 개발해야 할 것이고 이를 위해서는 먼저 예비교사나 현직교사의 지식의 현 상황에 대한 객관적인 분석이 이루어져야 할 것이다. 이런 점에서 현직초등교사의 분수 지식의 실태를 분석하는 연구가 필요한 것으로 본다.

따라서, 본 연구에서는 현직초등교사의 분수 지식의 실태를 교과 지식과 교수법적 내용 지식의 관점에서 분석하여 현직교사를 대상으로 이루어지는 교사교육 프로그램의 개발과 운영을 위한 기초자료를 제공하는 것을 목적으로 한다. 또한 초임교사와 경험교사로 구분하여 이들 교사의 분수 지식에 어떤 차이가 있는가를 분석하여 교사교육에 주는 시사점을 구하고자 한다.

### B. 연구 문제

본 연구의 목적을 달성하기 위하여 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

1. 초등교사의 분수에 대한 교과 지식과 교수법적 내용 지식은 어떠한가?
2. 초임교사와 경험교사의 분수에 대한 교과 지식과 교수법적 내용 지식은 차이가 있는가?

### C. 용어의 정의

#### 1. 교과 지식(subject matter knowledge)

교과 지식은 수학적 개념과 절차 그리고 그들 사이의 연결성, 수학적 개념과 절차의 다양한 표현에 대해 이해하는 것으로, 수학적 개념을 실생활 상황으로 나타내고 그림으로 도식화하며 기호로 표현할 수 있는 지식과 이런 지식들 사이의 관계를 이해하는 개념적 지식을 의미한다.

#### 2. 교수법적 지식(pedagogical knowledge)

교수법적 지식은 교과 내용과 중복되는 부분을 가지면서, 학생에게 적절한 방법으로 설명하며 다양한 형태로 개념을 표현하고 학생 수준과 가르치는 개념에 맞는 자료를 사용하고 학생을 평가하는 것과 같은 학생에 대한 지식, 연간 수업 계획을 수립하고 수업 내용을 조직하고 수정하는 교육과정에 대한 지식, 수업의 상황에 따라 수업의 흐름을 조절하고 교실의 일과(routines)를 구성하는 수업의 방법에 대한 지식을 포함하는 포괄적인 개념으로 정의한다.

#### 3. 교수법적 내용 지식(pedagogical content knowledge)

교수법적 내용 지식은 앞에서 정의한 교과 지식과 학생들이 전형적으로 나타내는 개념과 오개념에 대한 지식, 학생들이 개념을 이해하도록 실생활 상황이나 그림 또는 기호를 사용하여 다양한 방법으로 개념을 표현하는 지식, 학생들에게 개념을 설명하기 위해 학습 자료를 사

용하는 방법에 대한 지식을 포함하는 것으로 정의한다.

### D. 연구의 제한점

본 연구에서는 부산에 위치한 교육대학원의 대학원생 12명의 자료를 분석한 것으로 이들 자료를 일반화시키는 것에는 분석의 한계점을 가진다.

## Ⅱ. 이론적 배경

이 장에서는 교사 지식의 세 가지 유형 가운데 교과 지식과 교수법적 내용 지식을 분수에 대한 이해와 관련하여 살펴보고자 한다.

### A. 분수에 대한 교과 지식

분수에 대한 교과 지식을 가진다는 것은 분수의 의미, 분수 연산의 절차와 의미, 기호 표현과 같이 분수의 핵심 개념을 이해하면서 서로간의 연결성을 이해한다는 것이다. 여기서는 분수에 대한 교과 지식을 분수의 의미와 분수 연산에 대한 이해로 구분하여 설명하고자 한다.

#### 1. 분수의 의미

분수에 대한 교과 지식에서는 먼저 분수의 여러 가지 의미를 안다는 것이 중요하다. 예를 들어, 교사는 분수의 의미 가운데 부분-전체의 의미가 분수의 다른 개념을 이해하는 기본 개념이라는 것을 알고 있어야 하며, 분수와 관련된 문제를 해결하기 위해 '단위'가 얼마나 중요한 개념인가를 이해하고 있어야 한다. 또한 이 단위의 개념은 분수의 또 다른 의미인 비의 의미와 직접적으로 관련된다는 것도 알아야 한다.

분수의 의미에 대해 여러 가지 의견이 있지만, 대체적으로 연구자들은 부분-전체의 의미, 측정의 의미, 몫의 의미, 연산자의 의미, 비의 의미로 구분하고 있다 (Tirosh, 2000; Ma, 1999; Ball, 1993; Kieren, 1993; Mack, 1993).

부분-전체의 의미는 학생들이 처음으로 인식하는 개념이며, 분수 이해의 기본 개념이 된다. 이것은 전체를 똑같이 몇으로 나눈 것 중의 일부분의 크기를 나타내는 것이 분수라는 생각으로 분수가 지니고 있는 여러 가지 의미의 근본적인 바탕이다. 전형적인 문제는 전체를 똑같이 몇으로 나눈 것 중의 일부분을 색칠하는 문제이다. 부분-전체의 의미로서 분수 개념을 익히면서 동분모 분수의 크기를 알게 되고 이것은 이분모 분수의 크기를 비교하는 것의 기초가 된다.

어떤 양을 측정하는 과정에서 분수가 발생하게 되는데, 연속적인 분할이 일어나는 측정으로서 유리수를 사용하는 것이 측정의 의미이다. 예를 들어, 어떤 막대의 길이를 재기 위해서는 적절한 단위가 필요하고, 그 단위를 반복적으로 사용하여 측정결과를 수로 나타낼 수 있는데 이때, 측정 결과는 주어진 단위의 정확한 자연수 배가 될 수도 있고 자연수 배를 하고 남는 부분이 있을 수 있다. 남는 부분을 측정하기 위해서는 처음의 단위보다 더 작은 $\frac{1}{\text{처음단위}}$의 새로운 단위가 되어 길이, 넓이를 분수로 나타내게 된다. 교사는 수직선에서 단위 길이를 주고 남은 길이를 비교하는 활동이나, 단위 직사각형을 제시하여 보다 큰 직사각형의 값을 분수로 표현하는 활동을 제시할 수 있어야 한다. 왜냐하면, 이 측정의 의미로서 분수 개념을 이해하는 것은 분수의 나눗셈을 위한 또 다른 기초가 되기 때문이다.

몫으로서 분수를 사용하는 것은 어떤 대상을 여러 개의 부분으로 분할하는 것으로 생각할 수 있다. $b \div a$(a, b는 정수 $a \neq 0$)로 나타내어 사용할 때 즉 빵 3개를 5명이 똑같이 나누어 가졌을 때 1사람의 몫은 $\frac{3}{5}$이다(강지형 등, 2002). 몫이나 분할은 공평하게 나누는 것에 기초하고 있으며, 각각의 사람은 모두가 똑같이 $\frac{3}{5}$만큼의 빵을 가진다는 것이다. 그러나 몫으로서의 분수의 의미를 지도할 때는 학생들이 가능한 효과적으로 공평하게 나누도록 도와주며 각기 다른 단위를 사용하여 분할하도록 도와야 한다. 예를 들어, 4명이 5개의 빵이나 7개의 사과나 11m의 리본을 똑같이 나누어 가지는 활동을 하는 것이다.

연산자의 의미에서는 분수를 함수로 생각해야 한다. 유리수는 사상의 역할을 한다. 이산량이나 연속량을 다른 이산량이나 연속량으로 변환한다. 연산자는 한 값을

두 가지 서로 다른 연산으로 전환시킨다. 여기서 첫 번째 연산은 분자로서 곱셈의 역할을 하고 두 번째 연산은 나눗셈의 역할을 한다. 예를 들어, 12의 $\frac{2}{3}$는 먼저 12를 분자 2의 연산(곱셈)과 분모 3(나눗셈)의 연산으로 구분할 수 있다. 12를 2배하여 24가 되고 이것은 다시 3으로 나누어 8이 된다. 또 다른 의미에서 연산자 $\frac{m}{n}$은 어떤 크기의 집합에 작용하는가에 대한 정보는 'n'에 의해 주어진다. 집합 $\frac{m}{n}$이 작용하기 위해서는 집합의 원소 수는 n의 배수라야 한다. 8cm의 $\frac{4}{3}$을 그리는 것은 4cm에 대하여 3cm만큼 그리는 것을 의미한다. 이 결과는 원래의 길이보다 줄어드는 것이다.

분수의 마지막 의미는 비의 의미이다. 이것은 두 양의 상대적인 크기를 나타내는 것으로 한 수를 다른 수와 비교하는 것이다. 비의 의미에서 분수의 다른 의미를 사용한다는 점에서 독특한 점이 있다. 비로서 비교하는 양은 부분-전체 비교, 측정 비교, 연산자 비교, 또는 몫의 비교가 될 수 있다. 예를 들어, 한 학급의 학생수에 대한 남학생수는 부분-전체의 의미가 되고, 남학생수에 대한 여학생의 수의 비는 남학생수를 단위로 하는 측정의 의미가 된다. 비의 의미로서 분수를 연산할 때 개념적인 혼란이 일어난다. 비의 연산은 일반적으로 정의되어 있지 않지만, 분수는 사칙연산이 정의되어 있다. 예를 들어, 5타석에 2안타이면 타율은 $\frac{2}{5}$이고, 9타석에 3안타이면 타율은 $\frac{3}{9}$이므로 이를 합하면 14타석에 5안타가 되어 타율은 $\frac{5}{14}$와 같이 계산하는 경우에 분수의 덧셈으로 계산하면 전혀 다른 값이 나오게 된다. 연산에서의 이런 차이를 분수 개념을 지도할 때 자주 언급하지 않지만 또한 비의 개념을 지도할 때도 이런 차이를 비교하지 않는다는 것은 교사가 비의 의미로서의 분수와 비의 특성에 대한 지식이 부족하기 때문이다.

## 2. 분수의 연산

분수의 연산에 대한 의미는 기본적으로 자연수의 연산에 기초한다. 자연수의 덧셈과 뺄셈은 각각 첨가와 합병, 제거와 비교의 상황이 있다. 첨가와 제거는 분명한 행위가 포함되어 있으나 합병과 비교[2]는 정적인 관계를 가진다. 자연수 곱셈의 본질적인 의미는 배의 개념이다. 따라서 분수의 의미에서 연산자의 의미로 곱셈에 접근해야 한다. 어떤 대상에 '배'라는 연산자가 작용하여 새로운 집합을 만들어 내는 것이다. 대상이 연속량일 경우에는 확대, 이산량일 경우에는 그 수를 늘일 것이다. 일상생활에서 나눗셈이 이루어지는 경우는 두 가지 상황이 있다. 하나는 분할의 상황이고 다른 하나는 측정의 상황이다. 분할의 경우는 똑같이 나누어주었을 때 몫이 얼마인가를 묻는 상황으로 단위의 크기를 묻는 것이다. 측정은 양의 크기를 일정한 단위로 측정하였을 때 얼마나 되는가를 묻는 상황이다.

자연수의 덧셈과 뺄셈에서 같은 단위끼리 계산한다는 계산원리는 분수계산에도 적용된다. 그러나 동분모 분수는 단위가 같으므로 계산이 쉽지만 이분모 분수는 단위가 다르기 때문에 직접 계산할 수 없다. 따라서 교사는 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈은 먼저 단위를 같게 해야 한다는 생각을 갖도록 안내해야 한다. 분수의 나눗셈도 마찬가지로 $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d}$와 같이 계산한다고 기계적으로 설명할 것이 아니라, 분수의 덧셈과 같이 단위가 같도록 만든 후에야 가능함을 설명해야 한다.

분수에 대한 교과 지식에는 분수 연산의 절차를 이해하는 것이 포함된다. 분수식을 더하고, 빼고, 곱하고, 나누는 알고리즘을 이해하고 연산을 하기 위해 분수를 적절하게 변형시키는 방법을 알아야 한다. 덧셈과 뺄셈에서는 공통분모를 사용하지만 곱셈과 나눗셈은 그렇지 않다는 것을 이해해야 한다. 그러나 분수 개념에 대한 분명한 이해 없이 분수의 계산 알고리즘을 익힌다는 것은 피상적이고 불확실한 학습이 이루어지게 된다.

2) Carpenter 등(1999)은 아동이 문제를 해결하는 과정에서 어린 아동들은 비형식적 모델링과 계산 전략을 사용한다는 사실을 덧셈과 뺄셈 문장제에 대한 연구를 진행하면서 알게 되었다. 아동이 덧셈과 뺄셈 문제를 해결하는 과정에서 처음에는 문제의 직접적인 표상으로 손가락이나 물리적 대상을 사용하여 첨가나 제거와 같은 분명한 행위를 취하게 되며, 더 높은 수준에서 아동은 두 집합을 부분-전체 관계로 보는 합병과 두 집합을 서로 대응시키고 대응되지 못한 원소를 계산하여 해결하는 비교로서 해결하는 것으로 보았다.

분수 모델과 관련지어 볼 때, 분수를 표현하는 모델로는 넓이 모델, 길이 모델, 집합 모델이 있다. 넓이 모델은 원이나 직사각형을 더 작은 부분으로 나누어 전체와 부분의 관계로서 분수를 표현한다. 이 모델은 분수의 의미 가운데 가장 기초적이고 중요한 부분-전체의 의미를 잘 설명해 줄 수 있다. 길이 모델은 넓이 모델에서 전체의 넓이가 똑 같은 몇 개의 넓이 부분과 비교가 되었지만 이 모델에서는 넓이 대신 길이를 비교하게 된다. 수직선이나 분수 막대를 길이에 기초하여 비교하게 된다. 단위 길이에 따라 자연수와 분수를 나타낼 수 있기 때문에 분수의 측정의 의미와 관계된다. 마지막으로 세 모델 중 가장 고차원적인 모델로 집합 모델에서 전체는 집합으로 구성되며 전체의 부분집합이 분수가 된다(Van de Walle, 2001). 예를 들어, 구슬 3개는 구슬 12개의 $\frac{1}{4}$ 이 된다. 여기서 12는 전체 또는 1이 되며 3은 4씩 1묶음이 4묶음 있을 때 그 중 1묶음으로서 전체의 부분집합이 분수가 되는 예이다. 초등학생들에게 이 모델은 조금 어려운 내용이지만 분수의 몫의 의미를 이해하고 나아가 비의 의미를 이해하도록 돕는 중요한 모델이 된다. 집합 모델에 대한 충분한 이해를 통해 동치 분수의 지도에서부터 분수의 덧셈과 뺄셈, 그리고 곱셈과 나눗셈과 같은 분수의 연산을 생각할 수 있게 된다.

수업 계획을 세울 때에도 교과 지식은 나타난다. 교사는 일관되고 체계적인 수업을 계획하기 위해 자신이 알고 있는 분수에 대한 지식을 사용하게 된다. 일관되고 체계적인 수업은 각각의 수업이 별개로 나누어진 부분으로서 보다는 서로가 유기적으로 관련된 큰 개념으로서 계획될 때 가능한 것이다. 또한 수업 중에도 교과 지식은 표현되는데 학생에게 분수에 대한 질문을 하고 수업의 도입과 전개 그리고 결론을 연결할 때 그 중심에 교과 지식이 있게 된다.

### B. 분수에 대한 교수법적 내용 지식

교과 지식만으로는 학생이 분수에 대한 이해를 하도록 돕기에는 충분하지 않다. 학생의 이해를 위해서 교사는 교과 지식 이외의 것으로 학생에 대한 이해가 있어야 하며 이것이 분수에 대한 교수법적 내용 지식의 필요성을 부각시킨다.

#### 1. 학습자에 대한 이해

교수법적 내용 지식은 교사가 학습자의 사고 과정을 고려하여 다양한 방법으로 수학 내용을 이해하는 것을 의미한다. 이 지식은 교과 지식과 학생에 대한 이해를 포함하는 지식으로 분수와 관련시켜 볼 때, 분수에 대한 학생의 개념과 오개념을 아는 것과, 교사가 학생에게 맞도록 분수의 다양한 모델을 제시하고 분수의 여러 가지 의미를 표현하는 방법을 아는 것이다.

교수법적 내용 지식은 학생이 개념을 어떻게 이해하는가와 어떻게 잘못 이해하는가를 판단할 때 나타난다. Baroody 등(1998)은 분수 학습에서 학생들이 가지는 어려움을 다음과 같이 적고 있다

첫째, 수업에서 원 모양으로 분수를 자주 지도하기 때문에, 다른 연속량 모델이나 이산량 모델과 분수 개념을 관련시키는 데 어려움을 가진다.

둘째, 많은 학생들은 전체의 부분을 이해할 때, 각 부분은 같은 크기로 전체를 분할해야 한다는 사실을 이해하지 못한다.

셋째, 어떤 학생들은 분수가 전체의 부분을 나타낸다는 것을 알지 못하고 대신 부분을 전체의 나머지 부분과 비교한다.

넷째, 학생들은 동치분수를 이해할 때 직접 대응 모델은 이해를 잘 하지만 간접 대응 모델에서는 어려움을 가진다. 예를 들어 6개 중 2개는 $\frac{2}{6}$ 라고 표시하는 것에 별 어려움이 없지만 이것을 $\frac{1}{3}$ 로 표시하는 것에는 어려움을 가진다.

다섯째, 학생들은 분수의 크기를 비교하는 것에 어려움을 가진다. 예를 들어 3이 2보다 크기 때문에 $\frac{1}{3}$ 이 $\frac{1}{2}$ 보다 크다고 생각한다.

여섯째, 많은 학생들은 분수 문제를 해결할 때, 전체나 단위를 분명하게 정의하는 것의 중요성을 인식하지 못한다.

일곱째, 학생들은 종종 분수가 특정한 양의 크기가 아니라 관계를 나타낸다는 것을 이해하지 못한다. 예를 들어 전체의 크기를 모를 때에도 $\frac{1}{2}$ 이 $\frac{1}{3}$ 보다 크다고 생각한다.

### 2. 학생의 오개념

Tirosh(2000)에 의하면, 전형적으로 학생들은 분수를 나눌 때 세 가지 오류 유형 중의 하나를 나타낸다. 알고리즘에 기초한 오류는 두 분수를 나눌 때 제수 대신에 피제수를 역수로 하는 계산적인 오류이다. 직관에 기초한 오류는 지나친 일반화에 기초한 오류이다. 여기서 학생들은 나눗셈은 수를 더 작게 만든다는 생각으로 자연수의 나눗셈을 지나치게 일반화시키게 된다. 마지막으로 형식적 지식에 기초한 오류이다. 예를 들면 곱셈의 교환속성을 나눗셈에 적용하는 것이다.

분수의 연산을 학생들이 잘 이해하지 못하는 이유 중의 하나는 연산과 관련되는 상황과 연결하지 않고서 가르치기 때문이다. 이것은 분수의 연산을 학생들이 가지는 비형식적 지식[3]과 연결시키지 않으면서 알고리즘에 중점을 둔 학습을 하기 때문이다. 다른 이유는 곱셈을 동수누가로만 나눗셈을 분할로만 보기 때문이다.

초등학교에서 분수 연산의 알고리즘을 가르치는 것은 상대적으로 간단하다. 분수의 덧셈과 뺄셈에서 학생들은 공통분모를 구하면 되고 곱셈은 분모와 분모 분자와 분자끼리 곱하면 되며, 나눗셈은 역수를 곱하면 된다는 사실만 기억하면 간단히 해결될 수 있는 문제로 생각하기 쉽다. 그러나 이렇게 생각하는 데는 두 가지 위험성이 있다. 하나는, 이런 규칙은 연산의 의미에 대해 학생들이 생각할 수 있는 기회를 상실하게 하며 또 하나는, 짧은 시간에 익힌 규칙은 중요한 순간에 혼돈을 일으키게 한다는 것이다.

### 3. 분수 연산의 지도

분수의 연산은 기본적으로 자연수의 연산에 바탕을 두고 있다. 분수 연산을 지도할 때 Van de Walle(2001)의 지적은 분수에 대한 교사의 교수법적 내용 지식을 향상시키는 한 방법이 될 수 있다.

첫째, 간단한 맥락 문제로 시작하라. 문제는 결코 어려운 내용이 아니라 학생의 상황에서 연산이 이루어지는 상황으로 연산의 의미가 포함된 문제에서 출발해야 한다.

둘째, 분수 연산의 의미를 자연수 연산과 연결시켜라. 예를 들어, $2\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$의 학습을 위해서는 먼저 2×3이 어떤 의미인가를 살펴보는 것이 필요하다.

셋째, 분수의 연산을 위해 어림이나 비형식적 방법을 적극 이용하라. 어림은 수와 연산에 대한 개념을 형성하고, 반성적인 사고를 형성하는데 도움을 준다. 형식적인 알고리즘을 도입하기 이전에 아동들은 $\frac{7}{8} + \frac{1}{2}$이 $1\frac{1}{2}$보다 $\frac{1}{8}$이 작기 때문에, $1\frac{3}{8}$이라는 재미있는 사실을 발견할 수 있어야 한다.

넷째, 모델을 사용하여 각 연산을 탐구하라. 시각적인 모델은 학생이 분수에 대해 학습하도록 하여 결국 표준 알고리즘을 학습하는 유용한 기초를 마련해 줄 수 있을 것이다.

## Ⅲ. 연구방법 및 절차

### A. 연구 대상

본 연구는 2004년 1학기 부산에 위치한 초등교사양성대학의 교육대학원 강의에 참여한 대학원생 12명을 연구대상으로 하였다. 참여교사 중 1명(울산지역 근무)을 제외한 교사 모두가 부산지역에서 근무하고 있었으며 부산시의 각 지역교육청별로 소속되어 있었다.

교육 경력으로 볼 때, 16년 이상 20년 미만이 3명, 10년 이상 15년 미만이 1명, 5년 이하가 8명으로 구성되었다. 본 연구에서는 5년 이하의 교육 경력을 가진 교사를 초임교사로, 10년 이상의 경력을 가진 교사를 경험교사로 구분한다.

### B. 검사 도구

초등교사들의 분수에 대한 교과 지식과 교수법적 내용 지식을 평가하고자 모두 12문제로 구성된 지필 검사 문

3) 비형식적 지식은 관련된 주제에 대하여 형식적인 지도를 받기 이전에 획득한 지식 즉, 학생이 실생활 경험으로부터 자연스럽게 전수 받은 지식과 사전 지식, 그리고 스스로 발명한 지식을 의미한다. 이러한 비형식적 지식은 구체적이고, 직관적이며, 특수하고, 일상의 언어를 사용하는 특징이 있다(백선수, 2004).

제를 사용하였다. 이 문제들은 분수에 대한 학생과 교사의 이해를 연구한 다른 연구들을 참고로 하여 연구자가 수정·보완하여 개발하였다(Lamon, 1999; Ball, 1993; Mack, 1993; Post et al., 1991).

분수에 대한 교과 지식과 교수법적 내용 지식에 관한 문헌 검토에 따라 <표 Ⅲ-1>과 같은 평가 항목과 평가 내용을 선정하였다. 평가 항목 가운데 분수 개념, 분수 연산, 표현, 교육과정, 연결성은 교과 지식의 항목이 되는 동시에 교수법적 내용 지식의 영역에 포함된다. 그리고 학생과 설명은 교수법적 내용 지식에만 포함되는 항목이다.

<표 Ⅲ-1> 평가 항목과 평가 내용

| 평가 항목 | 평가 내용 |
|---|---|
| 분수 개념 | ·분수의 의미<br>(부분-전체, 측정, 몫, 연산자, 비)<br>·분수의 종류, 크기<br>·나눗셈과 분수, 분수와 유리수, 분수와 비<br>·분수의 기호와 용어 |
| 분수 연산 | ·자연수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈,<br>나눗셈에 대한 의미<br>·이분모 분수의 덧셈과 뺄셈, 분수의 곱셈<br>·동수누가와 배<br>·분수 나눗셈의 분할 모델과 측정 모델<br>·역수로 곱하는 원리,<br>연산에 포함된 대수적 지식 |
| 표현 | ·분수의 문장제 표현이나 실생활 상황 표현<br>·분수의 모델(넓이, 길이, 집합) 표현<br>·비형식적 지식과 형식적 지식의 표현 |
| 교육과정 | ·문제의 난이도, 문제의 종류,<br>교육내용 위계 |
| 연결성 | ·기호와 모델, 모델과 알고리즘,<br>문장제와 모델<br>·문장제와 기호 사이의 연결성 |
| 학생 | ·개념과 오개념<br>·분수 연산에 대한 학생의 문제해결 전략 |
| 설명 | ·교과 내용을 학생에게 설명하는 방법 |

분수에 대한 교사의 교과 지식과 교수법적 내용 지식을 평가하는 평가 기준을 마련하는데 도움을 주고자 분수 개념, 분수 연산, 표현, 교육과정, 연결성, 학생, 설명의 평가 항목과 그에 따른 지식의 유형을 문헌 검토 결과에 근거하여 <표 Ⅲ-2>와 같이 구분하였다.

<표 Ⅲ-2> 평가 항목별 지식 유형 선정 근거

| 평가 항목 | 교과 지식 | 교수법적 내용 지식 |
|---|---|---|
| 분수 개념 | ○ | ○ |
| 분수 연산 | ○ | ○ |
| 표　　현 | ○ | ○ |
| 교육 과정 | ○ | ○ |
| 연 결 성 | ○ | ○ |
| 학　　생 | | ○ |
| 설　　명 | | ○ |

분수에 대한 교사의 지식을 평가하기 위해 평가 항목에서 분류한 평가 내용에 따라 각 문제별 평가하고자 하는 항목과 내용은 <표 Ⅲ-3>과 같다.

<표 Ⅲ-3> 문제별 평가 항목과 평가 내용

| 번호 | 평가 항목 | 평가 내용 |
|---|---|---|
| 1 | 분수개념, 표현 | 분수의 의미 |
| 2 | 표현 | 분수의 모델 표현 |
| 3 | 연결성, 표현, 설명 | 모델과 기호의 연결성 |
| 4 | 교육과정, 설명<br>분수연산, 연결성 | 교육내용 위계, 모델과 기호의 연결성 |
| 5 | 분수연산, 연결성<br>설명 | (자연수)×(진분수)의 문장제와 모델의 연결성 |
| 6 | 분수연산, 표현 | (대분수)÷(진분수)의 문장제 표현 |
| 7 | 분수연산, 표현 | (대분수)÷(진분수)의 모델 표현 |
| 8 | 분수연산 | 분수 나눗셈 알고리즘 |
| 9 | 분수개념, 표현<br>설명 | 분수의 의미를 학생에게 설명하는 방법 |
| 10 | 분수연산, 설명 | (진분수)÷(진분수)를 학생에게 설명하는 방법 |
| 11 | 학생 | 학생이 가지는 분수 개념과 분수 연산에 대한 이해 |
| 12 | 학생 | 분수 개념과 분수 연산에 대한 학생의 개념과 오개념 |

평가 항목과 평가 내용에 따라 구체적으로 개발한 문제는 다음과 같다.

1. 분수 $\frac{2}{3}$의 여러 가지 의미를 이해할 수 있는 상황을 모두 제시해 주세요.

2. $\frac{2}{3}$를 나타내는 그림을 모두 그려 주세요.

3. $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$라는 것을 학생에게 어떻게 설명하겠습니까?

4. $\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$을 처음 배우는 학생에게 어떻게 설명하겠습니까?

5. $12\times\frac{3}{4}$의 상황을 나타내는 문장제를 모두 제시하고 이에 맞는 적절한 그림을 그려 주세요.

6. $1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$의 상황을 나타내는 문장제를 모두 제시해 주세요.

<표 III-4> 문제별 평가 기준

| 문제 | 평가 내용 | 평가 단계 | |
|---|---|---|---|
| 1 | 분수의 의미 | 3 | 부분-전체, 몫, 측정, 비, 연산자의 의미 중 세 가지 이상 제시함 |
| | | 2 | 부분-전체, 몫, 측정, 비, 연산자의 의미 중 두 가지를 제시함 |
| | | 1 | 부분-전체, 몫, 측정, 비, 연산자의 의미 중 한 가지만 제시함 |
| | | 0 | 시도하지 않거나 의미의 설명이 적절하지 않음 |
| 2 | 분수의 모델 표현 | 3 | 넓이, 길이, 집합 모델 중 세·가지 모델을 모두 제시함 |
| | | 2 | 넓이, 길이, 집합 모델 중 두 가지 모델을 제시함 |
| | | 1 | 넓이, 길이, 집합 모델 중 한 가지 모델을 제시함 |
| | | 0 | 시도하지 않거나 제시하는 모델이 적절하지 않음 |
| 3 | 모델과 기호의 연결성 | 3 | 그림 모델을 사용하면서 통분이나 약분의 알고리즘을 함께 설명함 |
| | | 2 | 그림 모델을 사용하여 두 양의 크기가 같음을 설명함 |
| | | 1 | 약분이나 통분에 의한 알고리즘으로 설명함 |
| | | 0 | 시도하지 않거나 설명이 적절하지 않음 |
| 4 | (진분수)-(진분수)의 학습내용순서, 모델과 기호의 연결성 | 3 | 선수학습인 동분모 분수나 크기가 같은 분수의 필요성을 언급하면서 그림과 기호를 관련시켜 설명함 |
| | | 2 | 선수학습인 동분모 분수나 크기가 같은 분수의 필요성을 언급하지 않고 그림으로 설명함 |
| | | 1 | 통분하는 알고리즘으로 설명함 |
| | | 0 | 시도하지 않거나 설명이 적절하지 않음 |
| 5 | (자연수)×(진분수)의 문장제와 모델의 연결성 | 3 | 연속량과 이산량 각각을 사용하는 문장제와 그림을 바르게 제시함 |
| | | 2 | 연속량과 이산량 중 한 가지를 사용하여 문장제와 그림 모두를 바르게 제시함 |
| | | 1 | 문장제와 그림 중 한 가지를 바르게 제시함 |
| | | 0 | 시도하지 않거나 문장과 그림이 적절하지 않음 |
| 6 | (대분수)÷(진분수)의 문장제 표현 | 3 | 분할과 측정 두 상황에 맞는 문장을 제시함 |
| | | 2 | 분할 상황에 맞는 문장을 제시함 |
| | | 1 | 측정 상황에 맞는 문장을 제시함 |
| | | 0 | 시도하지 않거나 상황이 적절하지 않음 |
| 7 | (대분수)÷(진분수)의 모델 표현 | 3 | 분할과 측정 두 모델에 맞는 그림을 제시함 |
| | | 2 | 분할 모델에 맞는 그림을 제시함 |
| | | 1 | 측정 모델에 맞는 그림을 제시함 |
| | | 0 | 시도하지 않거나 적절하지 않음 |
| 8 | 분수 나눗셈 알고리즘 | 3 | 항등원과 역원, 번분수, 동분모의 나눗셈 등 세 가지 이상의 방법으로 설명함 |
| | | 2 | 항등원과 역원, 번분수, 동분모의 나눗셈 중 두 가지 방법으로 설명함 |
| | | 1 | 항등원과 역원, 번분수, 동분모의 나눗셈 중 한 가지 방법으로 설명함 |
| | | 0 | 시도하지 않거나 적절하지 않음 |

7. $1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$ 의 상황을 나타내는 그림을 모두 그려 주세요.

8. $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$ 가 됨을 식으로 증명해 주세요.

Leitze & Mau(1999)에 따르면 분석적 평가 기준에서 3단계 이하의 평가 단계는 반응의 차이를 충분히 확인하지 못하게 하며, 너무 세분화된 평가 단계는 반응의 구별을 힘들게 하는 경향이 있다. 이를 고려하여 표 Ⅲ-4와 같이 4단계로 구분하여 평가 기준을 개발하였다.

평가 기준을 설정한 위의 문제 외에도 연구자는 교사의 지식을 평가하기 위해 비록 평가 기준은 마련하지 않았지만 질적 분석을 위한 문제를 개발하였다. 개발한 문제는 다음과 같다.

9. $\frac{3}{4}$ 을 학생에게 설명하려고 합니다. 설명할 수 있는 모든 방법을 적어 주세요.
10. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ 을 학생에게 설명하려고 합니다. 설명할 수 있는 모든 방법을 적어 주세요.
11. 지필 검사 A에서 학생들이 가장 이해하기 어려운 것은 어느 것이라고 생각합니까? 그 이유는?
12. 학생들이 분수를 학습하는 동안 일반적으로 가지는 오개념을 모두 적어 주세요.

문제9는 분수의 의미에 대한 교사의 교과 지식이 학생에게 설명하는 상황에서 어떻게 표현되고 있는가를 알아보기 위한 것이다. 즉 문제1에서 분수에 대한 교과 지식이 교수법적 내용 지식과는 어떤 관계를 가지는가를 알아보기 위한 것이다. 문제10은 6, 7, 8번 문제에서 분수의 나눗셈에 대한 교과 지식이 교수법적 내용 지식과 어떤 관계를 가지는가를 알아보기 위한 것이며, 문제11은 학생들이 어려워하는 내용에 대한 교사의 이해 정도를 평가하는 것이며, 문제12는 학생들의 개념과 오개념에 대한 교사의 지식을 평가하기 위한 문제이다.

## Ⅳ. 결과 분석

### A. 교과 지식

참여 교사의 분수 지식을 파악하기 위해 모두 12문제로 이루어진 검사지를 사용하였으며 이 가운데 문제 1, 2, 5, 6, 7, 8을 통해 분수의 교과 지식을 분석하였다. 검사는 2004년 3월 약 2시간 동안 이루어졌다. 검사에서 참여자들이 문제를 이해하지 못하여 답하지 못하는 경우를 방지하기 위해 참여자들이 문제에서 제시하는 뜻을 질문할 경우 이에 대해 답을 적는 간단한 설명을 덧붙였다.

교사들은 평균 41.20(100점 만점)의 점수를 받았으며 문제2에서 가장 높은 점수를 얻었으며(M=80.55) 문제1(M=55.55)과 문제5(M=69.44)는 50% 이상의 득점을 보였다. 그러나 문제 6, 7, 8에서는 평균이 20점 이하로 낮은 점수를 나타내었다.

참여 교사들이 문제에 정확하게 답한 비율을 살펴보기 위해 평가 단계에서 코드점수 3을 받은 비율을 살펴보았다. 문제 가운데 유일하게 문제2에 대하여 참여 교사 가운데 6명(50.00%)이 정확하게 답하였으며 문제5에 대하여 교사들 가운데 2명(16.67%)이 완전한 답을 하였고 문제1에 대하여 1명(8.33%)이 완전한 답을 하였다. 그러나 나머지 문제에 대해서는 완전하게 답한 참여자가 아무도 없었다. 더욱이 문제에 대해 아예 시도하지 않거나 의미의 설명이 적절하지 않아 평가 단계에서 코드점수 0을 받은 참여자의 비율을 살펴보면 문제2와 문제5에서는 한 명의 참여자도 이 단계의 평가를 받은 참여자가 없었으며 문제1에서는 1명이었다. 그러나 문제6은 8명(66.67%), 문제7은 8명(66.67%), 문제 8은 5명(41.67%)으로 이 문제들에 대해 많은 참여자들이 공란으로 비워두었다.

5년 이하의 교육 경력을 가진 초임교사와 10년 이상의 교육 경력을 가진 경험교사로 두 집단을 구분하여 반응을 분석하였다. 먼저 초임교사(8명)의 교과 지식에 대한 평균은 43.75이었으며 경험교사(4명)의 평균은 36.11이었다(100점 만점). 초임교사와 경험교사의 평균의 차를 평가 단계의 코드점수로 분석한 결과는 다음 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 사전 검사 결과 분석

| 집단 | N | M# | SD | df | t | p |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 초임교사 | 8 | 7.875 | 1.457 | 11 | 1.782 | .105 |
| 경험교사 | 4 | 6.500 | .577 | | | |

#18점 만점

1. 분수의 의미

지필 검사에서 문제1과 문제2는 분수의 의미를 참여 교사들이 어떻게 이해하고 있는가를 알아보는 문제이다. 문제1에서 분수 $\frac{2}{3}$의 여러 가지 의미를 이해할 수 있는 상황을 모두 제시하라고 했을 때, 참여 교사 12명 가운데 1명은 3가지 의미(부분-전체, 측정, 비)를 제시하였으며 7명은 2가지 의미를 제시하였으며, 3명은 1가지 의미를 제시하였고, 나머지 1명은 문제의 뜻을 제대로 파악하지 않고 있었다. 참여 교사들이 분수의 의미에 대해 표현한 것을 각 의미별로 분석하여 표로 나타내어 보면 다음 <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-2> 분수의 의미에 대한 반응

| | 부분-전체 | 몫 | 측정 | 연산자 | 비 |
|---|---|---|---|---|---|
| 인원 | 11 | 5 | 2 | 0 | 2 |
| (%) | (91.67) | (41.67) | (16.67) | (0) | (16.67) |

<표 Ⅳ-2>에서 나타난 바와 같이 분수의 의미에 대해 91.67%의 교사는 부분-전체의 의미로 이해하고 있다는 것을 알 수 있다. 즉 1명을 제외한 11명의 교사는 분수의 의미 가운데 부분-전체에 대한 의미를 알고 있으며 다른 의미보다도 부분-전체의 의미로서 분수를 이해하고 있음을 알 수 있다. 분수의 의미에 대해 부분-전체, 몫, 측정, 비, 연산자의 순으로 이해하고 있다. 분수개념에서 가장 기초적이고 중요한 부분-전체의 개념에 대한 이해에 비해 상대적으로 측정의 의미와 비의 의미에 대한 깊은 이해가 부족하며 연산자의 의미에 대해서는 어떤 언급도 없는 것으로 보아 교사들의 분수의 의미에 대한 이해는 부분-전체의 의미에 한정적인 것으로 이해의 폭이 매우 좁다는 것을 알 수 있다.

한편, 초임교사와 경험교사로 구분하여 반응을 분석해 보면 또 다른 특징을 알 수 있다. 각 집단의 반응은 다음<표 Ⅳ-3>과 같다.

<표 Ⅳ-3> 분수의 의미에 대한 집단별 반응

| 집단# | 부분-전체 | 몫 | 측정 | 연산자 | 비 |
|---|---|---|---|---|---|
| 초임인원(%) | 7(87.5) | 3(37.5) | 2(25.0) | 0(0) | 2(25.0) |
| 경험인원(%) | 4(100) | 2(50.0) | 0(0) | 0(0) | 0(0) |

#초임교사 8명, 경험교사 4명

초임교사는 5가지 의미 가운데 연산자의 의미를 제외한 의미에 대해 표현하고 있지만 경험교사는 부분-전체의 의미와 몫의 의미로만 표현하고 있다. 측정과 연산자 그리고 비의 의미에 대해서는 언급이 없었다. 비록 부분-전체의 의미와 몫의 의미에서는 상대적인 비율이 경험교사가 높았지만 측정과 연산자 그리고 비의 의미에 대해서는 초임교사에 비해 이해도가 낮았다. 그리고 양쪽 모두 연산자의 의미에 대해서는 전혀 언급이 없었다.

2. 분수의 모델 표현

문제2에서는 $\frac{2}{3}$를 나타내는 그림(모델)을 모두 그려보라고 했다. 이는 분수를 그림으로 표현하는 모델을 어떻게 알고 있는가를 분석하는 것으로 넓이 모델, 길이 모델, 집합 모델로 표현할 수 있는가를 알아보는 것이다. 분수를 그림으로 표현하는 것에 대해 6명의 교사는 3가지 모델 모두를 나타내었으며 5명은 2가지 모델로 표현하였고 1명은 1가지 모델로 표현하였다. 이 문제는 교과지식을 평가하는 문제 가운데 가장 점수가 높게 나왔으며 공란으로 남겨둔 교사가 한 명도 없었던 문제이다. 즉 교사들은 분수를 그림으로 나타내는 것에는 대부분이 잘 알고 있는 것으로 나타났다. 교사들이 표현한 모델을 구체적으로 나타내면 <표 Ⅳ-4>와 같다.

<표 Ⅳ-4. 분수 모델 표현>

| 모델 | 넓이 | 길이 | 집합 |
|---|---|---|---|
| 인원(%) | 12(100) | 9(75.0) | 8(66.7) |

이 표에서도 알 수 있듯이 사전 검사에 반응한 교사

모두는 분수 $\frac{2}{3}$에 대해 넓이 모델로 표현할 수 있었다. 이것은 앞서 분석한 분수의 의미를 부분-전체의 의미로 표현한 것에 비추어 볼 때, 전체에 대한 부분의 의미로서 분수를 해석하고 있다는 사실을 반영하고 있다. 사실이 모델은 분수를 처음 배우는 초등학교 3학년 교육과정에서 공식적으로 다루고 있는 모델이다. 분수의 넓이 모델 표현에 대해 좀 더 구체적으로 살펴보면 교사들 가운데 2명을 제외한 10명의 교사는 원 모델을 사용하였다. 이것은 분수의 의미에서 표현한 상황과 같은 맥락에서 해석하면 부분-전체 의미에서 교사들의 대부분은 피자나 빵을 예로 하여 부분-전체의 의미를 나타내었다는 사실에서 원 모델이 기본적으로 표현되고 있다는 것을 알 수 있다.

길이 모델과 관련해서는 사실 구분이 명확하지 않은 부분이 있었다. 직사각형 모델로 표현할 때 표현한 모델이 넓이 모델인지 길이 모델인지에 대한 해석이 어려웠으나 직사각형의 한 부분의 가로가 상대적으로 긴 직사각형일 때는 길이 모델로 보았으며 세로가 상대적으로 긴 직사각형일 때는 넓이 모델로 해석하였다. 이렇게 볼 때, 전체의 75% 정도의 교사는 길이 모델을 사용하였으며 넓이 모델에 비해 다소 부족하지만 상당수의 교사들이 분수를 길이 모델로 표현하고 있음을 알 수 있다. 길이 모델의 표현에서 특히 지적하고 넘어가야 할 것은 직사각형의 길이 모델이 아니라 수직선 모델의 사용이다. 교사들 가운데 6명이 수직선 모델을 사용하였으며 띠 모델과 수직선을 제외한 다른 모델을 사용한 교사가 아무도 없었다는 것이다.

모델의 사용에 대해 초임교사와 경험교사로 구분하여 다시 분석해 보면 다음 <표 Ⅳ-5>와 같다.

<표 Ⅳ-5. 집단별 모델 표현>

| 집단# | 넓이 | 길이 | 집합 |
|---|---|---|---|
| 초임교사 인원(%) | 8(100) | 5(62.5) | 6(75.0) |
| 경험교사 인원(%) | 4(100) | 4(100) | 2(50.0) |

#초임교사 8명, 경험교사 4명

두 집단 모두 넓이 모델을 100% 답했다. 그러나 반응을 자세히 살펴보면 약간의 차이가 있다. 경험교사들은 넓이 모델과 길이 모델의 차이가 분명하다는 것이다. 다시 말하면, 초임교사들이 직사각형을 사용하여 모델을 표현할 때 넓이 모델인지 길이 모델인지를 구분하기 어려웠던 예를 4명(50%)의 교사가 보여주었다면 경험교사는 직사각형을 사용하여 표현할 때 4명(100%) 모두 분명하게 넓이 모델로 표현했다는 것이다.

이런 차이는 길이 모델을 표현하는 것에서도 나타났다. 경험교사는 길이 모델을 4명(100%) 모두 수직선을 사용하여 나타내었다. 수직선을 3등분하여 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1로 표시하여 0에서 $\frac{2}{3}$까지 포물선을 그려서 나타내었다. 그러나 초임교사의 경우 길이 모델은 더욱 다양한 형태로 나타났다. 수직선 모델 2명(25%), 띠 모델 5명(62.5%)으로 나타내었으나 수직선은 단순히 수직선을 3등분하여 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1로 표시하여 $\frac{2}{3}$까지만 빗금을 칠하였거나 경험교사가 사용한 방법처럼 표시하였다. 띠 모델에서는 단순히 직사각형을 가로로 길게 해서 나타내는 방법과 이 띠에 0과 1을 표시하여 나타내는 방법, 그리고 띠를 6등분 한 가운데 4부분 즉, 동치 분수로서 $\frac{2}{3}$를 표현하기도 하였다.

집합 모델의 표현에서는 초임교사와 경험교사 사이에 뚜렷한 차이를 구분할 수 없었다. 두 집단 모두 이산량으로 3개를 전체로 보고 그 중의 2개로 나타내는 모델과 12개나 15개 등 3의 배수를 전체로 보아 그 중에 4개씩 2묶음이나 5개씩 2묶음과 같이 묶음의 수로서 표현하고 있었다.

모델 표현과 관련하여 볼 때 경험교사는 대체적으로 교과서에서 제시하는 모델을 따랐으며 초임교사는 교과서에서 제시하는 것과는 다소 차이가 있는 다양한 형태로 모델을 표현하였다는 것을 알 수 있다.

### 3. 분수 곱셈에서 문장제와 모델의 연결성

문제5는 (자연수)×(진분수)를 문장으로 나타내고 이것과 그림을 어떻게 연결하는가를 알아보는 것으로서 참여자들이 사용하는 모델의 형태를 분석하는 것이었다. 이산량과 연속량 두 가지 모두를 사용하여 문장제와 그림을 바르게 제시한 완전한 답을 한 교사는 2명(16.67%)이

었으며 9명(75%)은 연속량과 이산량 중 한 가지를 사용하여 문장제와 그림을 바르게 제시하였다. 나머지 1명의 교사도 단지 문장을 제시하지는 않았지만 그림을 분명히 그린 것으로 보아 문제5에 대해서는 바르게 이해하고 있는 것으로 볼 수 있다. 따라서 교사들은 자료의 형태에 관계없이 자연수와 진분수의 곱셈에 대한 문장제와 모델에 대해 바르게 이해하고 있음을 알 수 있다.

문제5에 대해 초임교사와 경험교사를 비교해 보면 비록 평균이 66.67과 75.00(100점 만점)으로 경험교사가 높은 것처럼 보이지만 실제적으로 보면 두 집단 모두 이 문제를 분명하게 이해하고 있다고 볼 수 있다.

4. 분수 나눗셈의 문장제 표현

나눗셈에서는 곱셈과는 상황이 많이 달랐다. 우선 문제 6, 7, 8에서 공란으로 남겨둔 경우가 많다는 것이다. 문제6에서는 4명, 문제7에서는 3명, 문제8에서는 5명이 공란으로 남겨두었다. 또한 공란과 함께 비록 문제에 대한 해결을 시도하였지만 바르지 않은 반응을 포함하면 문제6에서는 8명(66.67%), 문제7에서는 9명(75%), 문제8에서는 5명(41.67%)으로 교사들 대부분이 분수의 나눗셈에 대한 이해가 매우 낮음을 알 수 있다.

문제6은 대분수를 진분수로 나누는 문장제를 나타내는 것이다. 문제에서 의도한 것은 분수의 나눗셈에서 분할과 측정의 상황을 이해하고 있는가하는 것이다. 12명의 교사 가운데 4명만이 문제에 대한 답을 제시할 수 있었다. 이들은 모두 측정의 상황으로 나눗셈을 제시하였으며 분할의 상황으로 문제를 제시한 교사는 아무도 없었다. 이것을 다르게 해석하면 초등학교 교과서에서 분수의 나눗셈은 측정 상황에 한정한다는 것을 염두에 두면 평가의 단계와는 별도로 완전한 답을 하였다고 볼 수 있다. 그러나 본 연구에서는 교사의 지식이 초등학교 교과서에 머무르는 것이 아니기 때문에 알아야 할 것은 알아야 한다는 의도로 분할 모델까지 포함하였다. 그리고 문제에 답을 제시한 이 4명은 모두 초임교사였다. 경험교사는 모두가 공란이거나 상황이 바르지 않은 응답을 하였다. 평가 단계에서 모두 코드점수 0을 받았다. 시도하였으나 바르지 않은 답을 한 4명의 예를 좀 더 자세히 분석해 보면 분수의 나눗셈을 분수의 곱셈으로 해석한 경우가 3명 있었다.

초임교사의 경우 4명(50%)은 측정의 상황으로 분수 나눗셈을 문장제로 표현할 수 있었지만 경험교사의 경우 전혀 언급할 수 없었다는 사실을 주목해야 할 것이다. 이는 문제2와 문제5에서 경험교사가 상대적으로 쉽게 분수의 그림 모델 표현과 분수의 곱셈에 대해 접근했다는 사실과는 상반되는 결과를 제공하는데, 사실 분수의 나눗셈을 알고리즘에 의존해서 가르치고 있다는 사실을 인정해본다면 오히려 당연한 결과가 아닐까 생각된다. 그러나 다른 한편으로 생각하면 이렇게 초임교사 시절에는 다양하게 인식하고 있는 지식들이 분수에 대한 분명한 지식의 획득이 없는 상황에서는 더욱 고착화되어 교과서 지향적인, 더욱 정확하게 말하면 알고리즘 지향적인 지식으로 변해갈 수도 있다는 사실을 알려주고 있다.

5. 분수 나눗셈의 모델 표현

문제7에서는 (대분수)÷(진분수)를 그림으로 어떻게 표현하는가를 알아보았다. 결과는 문제6과 같은 상황을 보여주었다. 이것으로 볼 때 분수의 나눗셈을 이해한다는 것은 결국 나눗셈 상황을 이해한다는 것이고 이 상황을 이해하는 것은 그림 모델을 이해한다는 것과 같다는 결론을 얻을 수 있다.

6. 분수 나눗셈 알고리즘

문제8은 분수 나눗셈을 분수 곱셈으로 변환하는 알고리즘을 어떻게 유도하는가에 대한 지식을 알아보았다. 분수의 나눗셈과 관련된 문항 가운데 상대적으로 조금 높은 반응을 나타내었다. 비록 평가 단계를 4단계로 하여 평가하였지만 어떻게든 해결한 반응을 살펴보면 7명(58.33%)이었으며 공란으로 남겨둔 경우는 5명(41.67%)이었다. 해결한 7명의 반응은 다시 2경우로 구분할 수 있다. 그 가운데 4명은 현행 교과서에서 제시하는 방법인 동분모의 나눗셈 형식으로 유도하였으며 3명은 곱셈의 항등원과 역원을 이용하여 증명하였다. 60% 정도의 교사들은 대수적으로 분수의 나눗셈을 역수로 곱하는 과정을 증명할 수 있다는 것이다.

초임교사와 경험교사 사이에는 다소의 차이가 있었다.

초임교사 중 6명(75.0%)은 항등원과 역원 또는 교과서에서 제시하는 동분모를 통한 나눗셈 방식으로 증명하였으나 경험교사 중에는 1명(25%)만 항등원과 역원을 이용하여 증명하였다.

결국, 분수의 나눗셈과 관련하여서는 초임교사와 경험교사간에 분명한 교과 지식의 차이가 있음을 알 수 있다.

### B. 교수법적 내용 지식

교수법적 내용 지식은 수학 교과에서 가르치는 학습내용에 대한 지식, 학생들이 전형적으로 나타내는 개념과 오개념에 대한 지식, 학생들에게 실생활 상황이나 그림 또는 기호를 사용하여 다양한 방법으로 개념을 표현하는 지식, 학생들에게 개념을 설명하기 위해 학습 자료를 사용하는 방법에 대한 지식을 포함하는 것으로 보면서 이 절에서는 이들 지식에 대한 참여 교사들의 지식을 분석하고자 한다.

#### 1. 동치분수의 설명

문제3에서는 $\frac{4}{6}$와 $\frac{2}{3}$가 동치라는 것을 설명하는 방법으로 단순히 알고리즘으로 설명하는 것을 1점으로 그림 모델을 사용하여 설명하는 것을 2점, 그림 모델을 사용하면서 통분이나 약분을 함께 설명하면 3점으로 코드 점수를 부여하였다.

문제3에 대하여 문제에서 요구한 완전한 답을 한 교사는 12명 가운데 2명이었다. 그림 모델을 사용하여 동치임을 설명한 교사는 9명(75.0%)이었으며 약분이나 통분에 의해 설명한 교사가 1명이었다. 이것으로 대부분의 교사는 동치 분수를 설명할 때 그림으로 나타내는 방법으로 설명하고 있음을 알 수 있다. 그러나 연구자가 문제에서 구체적으로 알아보고자 한 것은 단지 그림으로 그려서 설명하는 것과 알고리즘을 연결하여 설명하는 것을 보고자 한 것이 아니었다. 만약 $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$라는 것을 학생에게 어떻게 설명하겠는가? 라고 문제를 제시하였다면 직사각형을 아래 그림과 같이 3부분으로 쪼개어 2부분에 빗금을 쳐서 이것을 $\frac{2}{3}$로 나타내고, 이 부분들을 다시 반으로 쪼개서 6부분으로 자른 다음 빗금 친 부분이 4부분이므로 $\frac{4}{6}$가 되어 서로 크기가 같다는 것으로 설명하는 것이 보통의 경우일 것이다.

그러나 문제에서는 순서를 바꾸어 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$라는 것을 설명하는 것이다. 이것은 그림 모델로 제시할 때 위의 설명방식과는 다른 방법으로 접근이 가능한 문제가 된다. 즉 넓이 모델이나 길이 모델 또는 집합 모델을 사용할 때, $\frac{4}{6}$에 해당하는 부분을 2부분씩 모아서 1그룹을 만들어 그룹의 수를 모두 3그룹으로 표시하여 그 중에 2그룹을 표시하는 방법을 사용할 수 있게 된다. 물론 위의 문제에서도 이 방법이 가능하지만 인지적으로 후자의 문제가 그룹으로 해결하기에 더 용이할 것이다. 이러한 접근 방식으로 보면, 교사들의 반응은 평가 단계의 코드 점수로 분석하는 것과는 다른 양상을 나타낸다. 4단계 평가에서 3점을 받은 2명의 교사는 모두 그림으로 서로 같은 크기임을 설명하면서 분자, 분모에 0이 아닌 같은 수를 곱하여도 그 양은 같다는 사실을 언급하고 있다. 그러나 2교사 모두 그룹으로 묶어서 양이 서로 같다는 것을 설명하고 있지 않다. 또한 2점을 받은 9명 가운데 1명만이 그룹으로 설명하였다.

문제3에 대해 초임교사와 경험교사 사이의 차이를 분석해 보았으나 명확한 차이는 없었으며 단지 경험교사는 일률적으로 그림을 서로 비교해 봄으로써 크기가 서로 같다는 것으로 설명하고 있지만 초임교사들은 각각 서로 다른 방법으로 약분과 통분의 알고리즘, 그림으로 크기를 비교하는 방법, 그림으로 그룹을 비교하는 방법, 그림과 알고리즘을 연결하는 방법과 같이 다양한 방법으로 설명하고 있다는 것이 서로 달랐다.

#### 2. 학습내용 순서, 모델과 기호의 연결성 설명

문제4는 (진분수)-(진분수)의 학습 내용 순서, 모델과 기호의 연결성을 알아보는 것이다. 이 문제에서는 이분모 분수의 뺄셈에서 분모가 다를 때 뺄셈이 어렵다는 사실을 발견하여 이를 해결하기 위해서 선수학습에서 이미 배운 분모를 서로 같게 해야할 필요성을 이해하고 있는

가를 알아보고자 하였다. 따라서 이 문제를 해결하는 핵심 개념은 동분모 분수의 필요성을 언급하는 것이었다. 3명(25.0%)의 교사는 동분모 분수가 왜 필요한가를 언급하면서 그림과 기호를 연결시켰으며 7명(58.33%)은 동분모 분수의 필요성을 언급하지 않고 그림과 기호를 연결시켰다. 그리고 2명(16.67%)은 적절하지 않은 설명을 제시하였다. 이를 볼 때, 이분모 분수의 빨셈에서 많은 교사들은 분모를 같게 하는 진정한 이유를 충분히 알고 있지 않은 것으로 나타났다.

두 집단 사이에는 양적 비교에서 차이가 있었다. 초임교사의 평균이 58.33이었으며 경험교사는 75.0이었다. 평균으로 보면 경험교사가 분명히 높은 점수라고 할 수 있다. 그러나 초임교사는 문제3과 마찬가지로 서로 다른 지식의 다양한 양상을 보였으나 경험교사는 비교적 일률적인 반응을 보였다는 것이다.

### 3. 분수의 의미 설명

이 절에서는 교과 지식의 분석에서 나타난 지식의 양상이 교수법적 내용 지식에서는 어떻게 나타나는가를 알아보는데 목적이 있다. 교과 지식의 내용은 교수법적 내용 지식에 그대로 포함되기 때문에 서로 간에 영향을 미치겠지만 교과 지식이 충분하다고 해서 교수법적 내용 지식이 충분할 수 있는가라는 물음을 가지게 되고 여기서는 이 물음에 답을 구하고자 한다. 이를 위해 문제9에서는 교과 지식을 알아보는 문제1에서 제시한 분수에 대한 의미를 학생에게 어떻게 설명하겠는가를 질문하였다. 다른 말로하면, 분수에 대한 교과 지식이 학생을 가르치는 상황에서는 어떻게 나타나고 있는가를 알아보는 것이다. 학생에게 이해하도록 가르치기 위해서는 분수가 사용되는 상황이 제시되어야 하고 이에 적절한 모델로 표현되어 상황과 모델 그리고 기호와 함께 연결되어야 할 것이다. 이 모두는 학습자의 입장에서 이루어져야 할 것이다.

참여 교사들이 사용한 분수의 의미를 살펴보면 아무런 응답을 하지 않은 1명과 그림만 제시한 1명을 제외한 10명(83.33%)은 부분-전체의 의미를 문장으로 제시하였다. 몫의 의미 4명(33.33%), 비의 의미 2명(16.67%) 그리고 측정과 연산자의 의미는 반응이 없었다. 이것은 분수에 대한 교과 지식에서 나타난 바와 거의 같은 비율로서 교과 지식에서 나타난 비율(부분-전체: 91.67%, 몫: 41.67%, 측정: 16.67%, 연산자: 0%, 비: 16.67%)보다 조금씩 낮은 비율을 보였지만 거의 같은 비율을 보였다.

분수의 의미를 설명하면서 교사들이 그림 모델을 얼마나 사용하고 있는가를 알아보았다. 그러나 결과는 아주 기대 이하였다. 교사들 가운데 3명(25%)이 그림을 사용하였으며 이 가운데 1명은 문장이나 상황을 제시하지 않고 그림만 제시하였다. 사용한 그림은 모두 부분-전체의 의미를 표현한 것으로 원과 직사각형 모델이 각각 2회 길이 모델 1회 집합 모델 1회로 나타났다. 이것으로 보아 교사들은 분수를 설명할 때 그림을 거의 사용하고 있지 않으며 그림 모델을 잘 알고 있지 못한 것으로 나타났다. 또한 분수의 상황과 그림 그리고 분수의 기호를 함께 사용하면서 연결성을 시도한 예가 하나도 없다는 것으로 보아 분수 지도에서 세 가지 표현의 연결성을 다루는 경험이 전혀 없는 것으로 나타났다. 분수의 상황을 나타내는 자료로서 6명(50%)은 피자를, 2명(16.67%)은 빵을, 3명(25%)은 사과를 그리고 바둑알, 연필, 우유를 각 1명(8.3%)씩 나타내었다. 즉 넓이 모델과 관련되는 자료(7명)를 상대적으로 많이 언급하면서 집합 모델과 관련되는 자료(5명)가 어느 정도 나타났지만 길이 모델과 관련되는 자료는 전혀 언급하지 않았다. 다시 말하면, 참여 교사들은 다양한 자료의 형태를 인식하지 못하고 있었다. 그리고 두 집단 사이의 차이는 교과 지식에서 나타난 차이와 비슷한 양상을 보였다.

### 4. 분수의 연산 설명

문제10에서는 분수 연산의 지도를 어떻게 할 것인가에 대한 참여자들의 지식 수준을 파악하였다. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$을 학생에게 어떻게 설명할 것인가에 대한 질문을 하였다.

(진분수)÷(진분수)의 연산에 대한 교사들의 교수법적 내용 지식은 교과 지식에서 나타난 바와 같이 상당히 낮은 수준이었다. 우선 이 질문에 반응을 한 교사는 모두 6명(50%)이었다. 나머지 6명은 백지로 남겨두었다. 분수의 나눗셈을 설명하면서 학생이 이해할 수 있는 상황을 제시할 수 있는가를 알아보았을 때 (진분수)÷(진분수)에 적절한 상황을 제시한 반응은 없었다. 1명의 교사가 상

황을 제시하였지만 문제와는 전혀 상관없는 상황을 제시하였다. 즉 교사들은 분수의 연산을 설명할 때 연산에 적절한 생활 속의 상황을 표현하지 않았다. 이는 분수의 나눗셈 연산에 맞는 적절한 생활 속의 상황을 인식하지 못했다는 것을 나타낸다. 1명의 교사는 통분하여 분자와 분자의 나눗셈으로 계산하는 알고리즘에 기초하여 설명하였으며, 4명(33.34%)의 교사는 그림을 이용하여 설명하고 있지만 각자 그림을 설명하는 방법은 서로 달랐다. 이 중 2명은 나눗셈의 포함제 상황에 적절한 그림으로 분수 나눗셈을 설명하였다.

그림으로 설명한 반응 가운데 1명은 비록 그림은 제시하였으나 분수의 나눗셈을 알고리즘으로 설명하고 있으며 그림이 나눗셈 상황을 나타내기 위한 것이 아니라 분수의 크기를 시각적으로 나타내기 위한 것으로 문제에서 요구하는 핵심개념과 무관한 그림을 제시하고 있었다. 나머지 1명은 그림만 제시하고 아무런 설명이 없었지만 자세히 살펴보면 분수 나눗셈을 측정의 상황으로 설명하고 있음을 알 수 있다.

3명(25%)의 교사만이 분수 나눗셈을 그림으로 표현할 수 있었으며 이들은 모두 측정에 해당하는 그림으로 설명하였다. 또한 이들은 넓이 모델과 길이 모델을 사용하였으며 집합 모델은 사용하지 않았다. 분수 나눗셈을 설명하면서 나눗셈 상황과 그림 그리고 알고리즘을 연결하여 설명한다는 것은 상당히 어려운 일 중의 하나임은 틀림없다.

우리의 교과서에서도 이 세 가지를 같은 학년에서 같은 단원에서 다루고 있지만 이 세 가지를 모두 연결하여 설명할 수 있는 교사가 아무도 없었다는 것은 시사하는 바가 크다.

교과 지식과 비교해 보았을 때 분수 연산에 대한 교과 지식의 부족은 그대로 교수법적 내용 지식과 연결됨을 알 수 있다. 문제6, 7, 8에서 기본적인 1단계 평가를 받은 교사가 3명이었다는 사실과 문제10에서 3명의 교사만이 그림으로 설명할 수 있었다는 사실은 같은 맥락에서 교과 지식은 교수법적 내용 지식과 연결된다는 사실을 증명해 주고 있다.

두 집단 사이에는 분명한 차이가 있었다. 경험교사는 분수 나눗셈에 대해 1명이 반응하였지만 문제와 전혀 관계없는 설명을 하였으며 초임교사는 5명이 위에서 설명한 방법으로 문제에 접근하고 있었다는 것으로부터 이 부분에 대해서는 초임교사의 교수법적 내용 지식이 더 강하다는 것을 알 수 있다. 이것은 사후 면담을 통해서 알게된 사실이지만 초임교사들은 교사임용고시를 준비하면서 자연수의 연산에 대한 상황에 대한 지식을 어느 정도 가지고 있었다는 것에서 기인한다고 본다. 즉 초임교사들은 임용고시를 준비하면서 자연수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈에서 첨가와 합병, 제거와 비교, 동수누가와 배 그리고 분할과 측정의 상황이 있음을 알고 있었다. 분수의 연산은 자연수의 연산에 기초하고 있다는 사실을 생각해보면 자연수의 연산에 대한 깊은 이해가 분수 연산에 대한 교수법적 내용 지식과 직접적으로 연결된다는 사실을 알 수 있다. 따라서 분수 연산을 지도하기에 앞서 자연수의 연산에 대한 지도가 선행되어야 한다는 사실을 알 수 있다.

5. 학생에 대한 개념과 오개념

교수법적 내용 지식에는 분수에 대한 학생의 개념과 오개념이 포함된다. 즉 학생들이 전형적으로 분수를 어떻게 이해하고 있으며, 어떻게 잘못 이해하고 있는가를 알아야한다. 이 물음에 대한 답을 구하기 위해 문제11을 통해 교사들의 반응을 살펴보았다.

참여 교사들 가운데 5명(41.67%)이 반응을 보였으며, 7명(58.33%)은 공란으로 두었다. 5명 가운데 3명은 분수 나눗셈과 관련한 문제를 아동들이 이해하기 어려울 것이라고 답했다. 구체적인 예를 살펴보면서 반응을 분석할 것이다. E교사는 "$1\frac{3}{4} \div \frac{1}{2}$의 상황을 그림으로 나타내는 것. 왜냐하면 자연수를 반으로 나누면 그 전의 양보다 작아진다는 생각을 하고 있다. 단순히 $2 \div \frac{1}{2}$을 계산하시오 라고 했을 경우 역수를 생각해 4라고 금방 말하겠지만 분수로 나눈다는 개념은 쉽게 다가오지 않고 그림으로 나타내기도 힘든 것 같다"라고 적었다. 이 교사의 경우 문제6, 7에서 전혀 답을 할 수 없었다. 즉 자신이 잘 알지 못하는 사실을 학생들도 이해하기 어렵다고 표현하고 있는 것이다. B교사는 "6번, 왜냐하면, '$\div 2$'의 개념과 '$\div \frac{1}{2}$'의 개념 차이를 혼동하거나 구분하는데 어

려움을 느낄 것 같다"라고 하였다. 역시 이 교사도 6번 문제에 제대로 답하지 않은 교사였다. 그러나 반대의 경우도 있었다. G교사는 "4번, 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈에서 이분모 분수의 계산으로 넘어가는 단계이며, 통분이 시작되므로"라고 적었으며 L교사는 "4번, 이분모 분모의 계산에서 동분모 분모로의 전환을 이해하는데 시간이 소모되고, 개념의 이해보다는 기계적 변환에 익숙함"으로 표현하였다. 이 교사들은 사실은 문제4에 대해 평가 단계 3단계와 2단계를 받은 교사로 이 문제에 대해 잘 알고 있는 교사였다. 분석해 보면 교사들은 학생들이 분수의 나눗셈을 문장제로 표현하거나 그림으로 나타내는 것을 어려워할 것으로 생각하고 있으며 또한 이분모 분수의 뺄셈을 어려워할 것으로 생각하고 있다. 이는 교사 자신이 어려워하는 문제를 학생들도 어려워한다는 생각과 함께 분수 연산에서 이분모 분수의 뺄셈을 학생들이 어려워한다고 여기고 있는 것으로 나타났다. 그러나 더 중요한 사실은 50% 이상의 교사들이 학생들이 어떤 문제를 왜 어려워하는가를 인식하고 있지 않다는 사실이다. 즉 교사들은 학생들의 개념과 오개념에 대해 깊이 있는 지식이 부족하다는 것이다.

초임교사와 경험교사 사이에는 학생의 어려움에 대해서도 약간의 차이가 있었다. 초임교사 가운데 4명(50%)은 학생의 어려움에 대해 응답을 하였지만 경험교사 중에는 1명(25%)이 학생의 어려움에 응답하였다. 비록 사례수가 작지만 이 점은 교사 교육의 첫 출발에서 시사하는 바가 또 다르다. 흔히 생각하기에 경험교사가 학생의 어려움에 더 깊은 이해를 할 것으로 생각하는데 이 사전 검사에 의하자면 오히려 경험교사들이 학생의 어려움에 깊은 이해가 부족하다는 것을 알 수 있다. 물론 단정적으로 표현할 수는 없지만 경험교사들이 지필 시험에 쓰기 활동을 부담스러워하는 것이 작용했을 것이지만 일반적인 상식과는 다른 결론이 나왔다.

학생들이 분수를 학습하는 동안 가지는 오개념에 대한 질문을 문제12를 통하여 제시하였다. 모두 4명(33.33%)의 교사가 응답하였으며 8명은 응답하지 않았다. 비록 4명이 응답하였지만 오개념의 유형은 다양하였다. 전체 또는 1의 개념을 잘 이해하지 못한다고 하였다. 분수가 전체에 대한 부분의 양임을 알기보다는 단순히 시각적인 크기로 인식한다는 것이다. 부분-전체에서 부분은 같은 양으로 나누어야 한다는 사실을 잘못 이해하는 경우를 예로 들었다. 이분모 분수일 경우 분모와 분모, 분자와 분자끼리 덧셈이나 뺄셈을 하는 경우를 들었으며 또한 동치 분수에 대한 오개념을 예로 들었다. 대략 4가지 정도의 오류 유형을 분석할 수 있었다. 이것은 학생들이 분수를 학습하면서 가지는 오개념에 대해 많은 교사들이 인식하고 있지 않다는 것을 보여주고 있으며 오류 유형의 이해도 부족함을 알 수 있다.

오류 유형에 답한 교사 4명 가운데 1명은 경험교사였다는 사실에서 보면 경험이 많은 교사라고 해서 학생에 대한 이해가 더욱 풍부하다는 가정은 잘 못되었다는 것을 알 수 있다. 오히려 초임교사들이 더 많은 오개념의 예를 제공하는 것으로 보아 교육 경험이 많다는 것이 학생 이해를 보장하고 있지 않음을 알 수 있다.

## V. 결 론

본 연구의 결과 분석을 통해 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 연구 결과에 따르면 분수의 의미에 대해 초등교사들은 분수를 부분-전체의 의미로 대부분 이해하고 있으며 연산자, 비, 측정의 의미로 이해하는 경우가 드물었다. 그리고 분수를 넓이, 길이, 집합 모델로 적절하게 표현할 수 있으나 상대적으로 집합 모델로 표현하는 비율이 낮았다. 이것은 초등교사들이 분수의 의미나 모델과 관련하여 체계적인 분수 개념을 획득하지 못하였음을 시사하고 있다. 다시 말하면, 분수에 대해 어렴풋하게는 알고 있지만 분수의 기원과 의미를 역사적인 상황이나 연산과 관련짓거나 자료의 속성에 따라 분수 개념의 특성이 달라진다는 것을 분명하게 이해하지 못하고 있다는 것이다. 초등학교 3학년 과정에서 나눗셈과 관련하여 분수가 도입되고 있다는 것과 초등학교 6학년에서 분수 나눗셈을 분수 곱셈으로 변환하는 과정을 이해하기 위해서는 분수 개념과 관련된 체계적인 이해가 있어야 한다. 때문에, 현직교사교육을 담당하는 프로그램에서는 현행 교육과정을 고려하여 분수에 대한 큰 틀을 마련하여야 할 것이다.

둘째, 분수의 곱셈과 나눗셈에 대해 초등교사들은 대부분 분수의 곱셈을 문장제와 그림 모델로 표현할 수 있

으나 분수 나눗셈에 대한 이해는 아주 낮은 것으로 나타났다. 분수의 연산 가운데 특히 나눗셈과 관련하여 초등교사들은 지식의 수준이 낮았다. 이것은 근본적으로 자연수 연산에서 자연수의 나눗셈에 대한 이해가 부족하기 때문인 것으로 해석할 수 있다. 분수 나눗셈은 자연수 나눗셈과 관계가 많은 것을 생각해보면, 초등교사들은 나눗셈에 대한 상황 즉, 측정과 분할에 대한 분명한 이해가 부족한 것으로 해석할 수 있다. 따라서 분수에 대한 교사교육을 실시하기 이전에 자연수의 연산에 대한 충분한 논의를 거치는 것이 필요할 것으로 본다.

셋째, 초등학교에서 연산을 가르칠 때 실생활 상황과 관련하여 지도가 이루어져야 한다는 것이다. 초등학교 수학교육은 수학의 기초적인 개념을 도입하기 위하여 학생들이 느낄 수 있는 여러 가지 생활 현상에서 알아보는 것을 당연시하고 있다. 이런 생활적인 상황으로 연산을 도입할 때 학생들은 연산을 의미 있게 이해하게 될 것이다. 그러나 초등교사들이 분수 나눗셈에 대한 상황을 제시할 수 없었다는 것으로 미루어 볼 때, 초등교사들은 분수의 연산을 실생활 상황과 관련시켜 지도하지 않는 것으로 보인다. 따라서 교사들이 먼저 사칙연산을 상황과 연결하여 해석할 수 있는 능력을 함양시켜야 할 것이다.

넷째, 분수의 의미와 분수의 연산을 설명하면서 초등교사들은 교과 지식의 정도에 따라 교수법적 내용 지식에 영향을 준다는 사실을 알 수 있다. 즉, 분수라는 수학의 내용에 대한 분명한 이해가 부족할 때 분수를 명확하게 가르칠 수 없다는 것이다. 이는 수학을 가르치는 교사가 가져야 할 지식 가운데 더 중요한 지식이 어떤 것인가에 대한 분명한 답을 제시하고 있다. 초등학교에서는 교수법적 지식도 중요한 교사 지식의 한 구성요소가 되지만, 적어도 수학을 가르치는 수학 교실에서는 수학 교과에 대한 교과 지식이 더욱 필요한 지식이라고 주장할 수 있게 된다.

다섯째, 초임교사와 경험교사는 교과 지식과 교수법적 내용 지식에서 어느 정도 차이가 존재하며 일반적인 생각과는 달리 경험교사가 초임교사에 비해 지식의 정도가 낮은 것을 다시 한번 생각해 볼 필요가 있다. 이것은 현행 현직교사교육의 프로그램과 운영이 과연 적절한가라는 물음에 대해 긍정적이지 않은 답을 말해주는 것으로 해석할 수 있다. 따라서 현직교사를 위한 교사교육에 필요한 교과 지식과 교수법적 내용 지식의 요목과 운영에 대해 깊이 있는 논의가 이루어져야 할 것이다.

초등교사의 분수에 대한 이해를 알아본 결과 대부분의 교사들은 수학이라는 교과의 전체적인 교육과정 속에서 교과의 내용을 바라보는 능력이 부족하다는 것을 알 수 있었다. 이것은 특정한 학년 수준에서 수학을 가르칠 때 학생이 개념적 이해를 하면서 학습할 수 있는 환경을 제공하기 어렵게 하여 절차적 지식을 강조하는 수업을 이끌게 될 것이다. 따라서 현직교사교육을 담당하는 기관에서는 교육과정 전체에 대한 이해와 함께 실생활 상황, 그림 모델, 기호를 연결하는 개념적 이해를 강조해야 할 것이다.

## 참 고 문 헌


김민경 (2003). 나눗셈 개념 대한 초등예비교사의 이해도 분석. 학교수학 **5(2)**, pp.223-240.

김원경 · 김용대 (2002). 교사의 수학적 지식에 대한 연구: 함수 개념과 관련하여, 수학교육 **41(1)**, pp.101-107.

백선수 (2004). 비형식적 지식을 활용한 분수 곱셈과 나눗셈에서의 형식화 지도 방안 개발. 한국교원대학교 박사학위논문.

박임숙 (2002). 교사의 무한개념 이해도 조사 연구. 수학교육 **39(1)**, pp.37-47.

서관석 · 전경순 (2000). 예비 초등 교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구: 교사교육적 관점. 수학교육연구 **10(1)**, pp.103-113.

이대현 · 서관석 (2003). 초등학교 예비교사들의 분수에 대한 표상의 분석. 초등수학교육 **7(1)**, pp.31-41.

이종욱 (2003). 예비초등교사의 덧셈과 뺄셈에 관한 교수학적 지식. 수학교육연구 **13(4)**, pp.447-462.

차인숙 · 한정순(2004). 중등 예비교사의 함수 관계 상황 표현 능력에 대한 조사연구. 수학교육 43(2), pp.199-210.

Ball, D. L. (1990a). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education* **21(2)**, pp.132-144.

Ball, D. L. (1990b). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal* **90**, pp.449-467.

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal* **93(4)**, pp.373-397.

Baroody, A. J. & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to k-8 mathematics instruction.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Buckreis, W. F. (2000). *Elementary mathematics teacher subject matter knowledge and its relationship to teaching and learning.* Doctoral dissertation, Oregon State University, Oregon.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Khoury, H. A., & Zazkis, R. (1994). On fraction and non-standard representations: Preservice teachers' concepts. *Educational Studies in Mathematics* **27**, pp.191-204.

Kieren, T. A. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter & E. Fennema & T. A. Romberg(Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 49-84). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lamon, S. J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Leitze, A. R., & Mau, S. T. (1999). Assessing problem-solving thought. *Mathematics Teaching in the middle school* **4(5)**, pp.304-311.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mack, N. K. (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In T. P. Carpenter & E. Fennema & T. A. Romberg(Eds.), *Rational number: An integration of research* (pp.85-105). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Post, T. R., Harel, G., Behr, M. J., & Lesh, R. (1991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. In E. Fennema, T. P. Carpenter, & S. J. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp.177-198). Albany, NY: State University of New York Press.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* **15(2)**, pp.4-14.

Simon, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education* **24(3)**, pp.233-254.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conception: The case of division of fraction. *Journal for Research in Mathematics Education* **31(1)**, pp.5-25.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (4th Ed.). NY: Longman,

Zazkis, R., & Campbell, S. (1994). *Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: Preservice teachers' understanding.* Paper presented at the annual meeting of American Educational Research Association, New Orleans, LA.

# An Analysis of Elementary Teachers' Knowledge of Fraction

**Lee,. Jong Euk**
Juwon Elementary School, Busan, Korea
E-mail: jongeuk@chol.com

This study investigated elementary teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge of fractions. The subject for data collection were 12 in-service elementary teachers and data were collected through written test problems. The finding imply that most elementary teachers understand fraction construct as part-whole, show low level of understanding of operator, ratio, and measurement constructions and word problem posing, using models, and developing the algorithms to divide fractions. The research results indicates that experienced teachers possess poor knowledge of fractions against novice teachers.

* ZDM classification : C39
* MSC2000 classification : 97C70
* key word : Teachers' knowledge, Subject matter knowledge, Pedagogical content knowledge.