韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2005. 2. 제 44권, 제 1호, 1-14.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
Febuary. 2005, Vol. 44, No. 1, 1-14.

한국과 독일의 중등학교 수학교과서 비교 연구 II
- 중학교 기하 영역을 중심으로 -

정 환 옥 (한신대학교)
노 정 학 (한신대학교)

I. 머리말

1. 연구의 배경 및 필요성

2003년 우리는 '중학교 대수영역을 중심으로'라는 부제를 가진 같은 제하의 논문 (노정학 외 2인, 2003)을 발표하였으며, 본 연구는 그의 후속으로 한국과 독일의 중학교 교과서의 기하부분에서 나타난 외형적 체제 및 내용상의 차이점을 심층적으로 비교 분석하였다. 우리는 논문 (노정학 외 2인, 2003)의 서문을 통하여, 왜 우리가 서양의 여러 국가 중 독일을 선택하게 되었는지를 다음의 세 가지 이유로 설명하였다.

첫째로, 독일은 지난 40여 년 동안 한국과 같은 분단국이었으나 지난 1991년 통일을 이루어낸 통일국가라는 점에서 우리에게는 좋은 모델이 될 수 있다는 사실이다. 실제로, 독일은 통일이후 동서독 간에 공동으로 제작된 단일교과서를 비롯한 수학교육 전반에 대하여 지금에 이르기까지 지속적으로 연구 보완을 계속하고 있다. 참고로 수학과 교과과정 및 교과서와 관련된 연구물로는 (Borneleit, 2003), (Giesel, 2003) 등이 있다 [Internet (1) 참조].

둘째로는 중학교 수학교과서의 경우, 현재까지 발표된 외국, 특히 서양의 비교논문이라고는 단지 미국(김연미, 1999)과 영국(황혜정・신항균, 2002), 러시아(서보억 외 2인, 1995) 등 극히 제한적인 국가들뿐이며, 더욱이 세계의 정치 및 경제면에서 3대 축을 이루고 있는 EU에 속한 국가로는, 필자에 의한 독일과의 비교논문 (노정학 외 2인, 2003)을 포함하여 극히 극소수에 불과하다는 사실이다. 마지막 세 번째 이유는, 독일은 Felix Klein의 'Erlangen 프로그램'을 기반으로 현재에 이르기까지 세계 수학교육학의 큰 축을 이루고 있다는 사실이다[(우정호, 2001)의 제8장, (정영옥, 1993) 참조].

모든 비교의 대상이 그렇듯이, 한국의 수학교과서 역시 독일교과서와의 단순 비교를 통하여 장단점을 논한다는 것이 어쩌면 무리가 따를 수도 있다. 특히 양국 사이의 교육이념이나 교육철학 등 교육적 환경의 차이를 감안할 때는 더욱이 그러하다. 따라서 우리는 한국과 독일의 수학교과서를 비교하기에 앞서, 교과서와 관련된 양국의 일반적인 교육정책의 차이를 먼저 짚어보고자 한다.

첫 번째 차이점은 교과서의 발행과정에서 나타나 있다. 먼저 한국의 경우는 발행되는 모든 교과서에 대하여 의무적으로 정부의 검인정을 받도록 함으로써, 교과서에서 사용되는 용어나 기호뿐 아니라 목차 및 내용에 이르기까지 국가에서 제시한 규정에 맞추어야 하는 사실상의 '단일화' 정책을 펴고 있다. 그렇다면 독일은 어떠한가? 이들의 원칙은 한마디로 '다양화' 정책이다. 이는 곧 주정부 차원의 검인정 절차는 출판사나 저자 등 발행인의 자율권을 최대한 보장하는 범위에서 시행되고 있으며, 따라서 발행인은 인문계와 실업계, 도시와 농어촌, 우수학생과 열등학생 등 여러 계층 학생들의 수준이나 관심도에 맞추어 다양한 종류의 교과서를 출간함으로, 학교 또는 교사 단위로 학생들에게 적합한 교과서를 선택하여 지도할 수 있도록 배려하고 있는 것이다.

---

* 2004년 8월 투고, 2005년 2월 심사 완료.
* ZDM분류 : D13
* MSC2000분류 : 97D10, 97U20
* 주제어 : 수학교과서 비교, 독일의 교육과정, 기하영역
* 이 논문은 2004학년도 한신대학교 학술연구비의 지원에 의하여 연구되었음.

두 번째의 중요한 차이점은 교수내용의 선택성 여부, 즉 학습내용의 선택에서 학교 또는 교사에게 자율권이 보장되어 있느냐의 여부이다. 한국의 경우는 -적어도 중학교 과정에서는- 교사 또는 학교장에게 학습내용을 임의로 선택할 수 있는 자율권이 보장되어 있지 않으며, 따라서 교사는 교과서의 모든 내용을 빠뜨림 없이 모두 지도해야만 한다. 그러나 독일의 경우는 그렇지 않다. 즉, 교과서의 종류도 다양할 뿐더러, 설령 같은 교과서가 선택되었다고 하더라도 지역 또는 학교, 심지어는 교사에 따라 교과서에 있는 단원 또는 문제들을 선별하여 지도할 수 있으며, 실제로 그렇게 지도하고 있는 것이다.

마지막 세 번째는 교과서의 외형에서 나타난 차이이다. 일반적으로 독일의 교과서는 -선별적 지도가 가능한 관계로- 한국의 교과서에 비해서 양도 많고 내용도 다양하며 또한 용지의 질이나 색깔, 인쇄, 그림 등에서도 훨씬 잘 제작되어 있다. 이러한 차이의 원인은 한국과 독일 간의 국가 경제력의 차이에서 유인되었다기보다는, 오히려 교과서의 수명에 있다고 판단된다. 즉, 한국교과서는 한번 사용하면 폐기시키는 '1년생'이라 한다면, 독일의 경우는 선후배간 몇 년에 걸쳐 물려주면서 사용되는 '다년생'이기 때문이다.

한국과 독일의 교과서 정책에서 나타난 이러한 일반적인 차이점은, 본 연구의 초점이 되는 한국과 독일 사이의 수학교과서를 비교 분석하는데, 매우 중요한 포인트가 되고 있다.

2. 연구문제

본 연구의 전반은 독일의 수학교육과정(기하부분) 및 한국과 독일의 학년별 목차를, 후반의 본론에 들어서는 중학교 기하영역에서 나타난 일반적 차이점을 비교 분석하였다. 특히, 중학교의 기하교육과정은 반힐(Van Hiele)[2]의 5단계 수직적 모델 중 수준 1 또는 2단계에서 수준 3단계인 '형식적 연역'의 단계로 변화되는 과정이라 볼 때, 비형식적 또는 직관적 수준에서 단순 이해되고 있는 기하학적 명제들에 대하여 가정과 결론의 설정에서부터 논리적 증명절차에 이르기까지 어떤 방식으로 형식화하고 있는가에 분석의 초점을 두었다. 다른 한편 수평적 차원에서도, (석용징 외 2인, 2003)에 명시된 '기하교육을 위한 조언'[3]들이 양국의 교과서에 어떻게 반영되고 있는가 에도 관심을 두었다.

본 연구의 내용을 요약하면 다음과 같다.

① 독일의 기하교육과정 및 한국과 독일의 수학교과서(기하부분)의 목차 등의 외적인 차이를 비교하였다.

② 한국과 독일의 수학교과서의 기하영역에 대하여 학습내용의 전개 및 제시방법 등의 내적인 차이를 비교분석하였으며, 특히 삼각형의 합동조건, 삼각형의 특별한 점들, 도형의 닮음, 피타고라스의 정리에 대하여는 별도로 심층 분석하였다.

II. 연구방법

1. 연구대상

우리나라 교재로는 중학교과정에서 배우는 수학 7-나, 수학 8-나, 수학 9-나의 기하영역을 연구대상으로 삼았으며, 독일의 경우는 인문계 교육기관인 김나지움 7, 8, 9학년 수학교과서의 기하영역을 선택하였다. 한편 대상교재는 7차 교육과정에 따라 발행된 여러 종의 중학교 수학교과서 중 대표저자 박규홍의 중학교 수학교과서를 중심으로 하였으며, 독일의 경우는 바덴뷔텝베르크주의 수학교과서를 채택하였다.

(1) 한국: 중학교 수학 7-나, 8-나, 9-나,
박규홍 외 7인 공저, 두레교육(주), 2002년

(2) 독일: Mathematisches Unterrichtswerk
A. Schmid (ed.), Ernst Klett Verlag
7, (1994); 8, (1995); 9, (1997)

2) 반힐(Van Hiele)은 기하 영역에서 진행되는 인간의 사고과정을 수준0: 영상단계, 수준1: 분석단계, 수준2: 비형식적 연역단계, 수준3: 형식적 연역단계, 수준4: 엄밀과정 등 5단계의 수직적 모델로 제시하였다[(김도상 외 3인, 1992), (우정호, 2002) 참조].

3) 석용징 외 2인은 현재 연구되고 있는 '바람직한 기하교육을 위한 조언' 5가지를 제시했다.

2. 연구절차

본 연구는 다음과 같은 절차에 의해 수행되었다.

(1) 교과서 및 각종 자료수집: 우리가 선택한 독일의 바덴뷔템베르크주의 수학과 교육과정 및 교과서 외에도 양국의 수학과 교수요목, 각종 보고서 등이 수집되었다.

(2) 자료의 분석: 수집된 자료에 대하여 종합적으로 연구 분석하였으며, 특히 다음과 같은 내용에 대하여는 더욱 심층적으로 연구 분석 하였다.

① 지금까지 발표된 수학교과서에 대한 외국교과서와의 비교논문

② 독일 김나지움에서의 수학의 역할

③ 동양과 서양의 교과서 편집의 배경의 차이점

④ 한국과 독일 사이의 수학교육과정에서 나타난 차이점

⑤ 각 단원별 교과내용에 대한 비교분석

⑥ 독일과의 비교를 바탕으로 우리 수학 교과서의 앞으로의 방향

III. 수학교육과정 및 목차비교

1. 독일의 수학교육과정(기하부분)

현재 독일의 수학과 교육과정은 주별로 약간의 차이가 있으며, 이 연구에서 우리는 독일의 큰 주중 하나인 바덴뷔템베르크주의 김나지움 7-9학년의 수학과 교육과정의 기하부분을 선택하였다 [자료: Internet (4) 참조].

(1) 7학년 과정

1. 기하학에서의 작도 (22시간)

교 육 내 용	참 고 사 항
이등변삼각형	
기본적 작도와 그의 서술	구두 및 문장으로 보고 및 설명
거리관계와 수직성	
삼각형에서 각과 변 사이의 관계	
평행선과 그의 작도 (평행선 군, 선분의 이등분)	
평행선과 동위각, 엇각	정리의 역도 성립
삼각형과 사각형의 내각의 합	
Thales의 정리	Thales von Milet (기원전 약 600년경) 그리스의 수학자
자와 컴퍼스를 이용한 작도법: 수직이등분선, 각의 이등분선, 평행선 쌍, Thales 원 등	원의 접선도 포함

(2) 8학년 과정

1. 도형과 도형의 합동 (40시간)

교 육 내 용	참 고 사 항
	증명과 관련된 내용들 숙지(예: 정의, 가정, 결론, 증명, 정리와 역, 정리의 일반화, 직접 및 간접증명법 등)
합동인 도형과 그의 성질 (평행이동, 선대칭이동, 점대칭이동)	
도형의 합동	
삼각형의 합동조건	직각삼각형의 합동조건 포함
삼각형의 내심과 외심 삼각형의 무게중심, 수심	학생들에게 적절한 증명문제 제시
삼각형의 작도	
사각형, 특별한 사각형 (사각형의 작도)	문제를 통하여 정리와 역, 증명방법 지도
평행사변형, 삼각형, 사다리꼴의 넓이	

(3) 9학년 과정

1. 도형의 닮음, 피타고라스의 정리 (38시간)

교 육 내 용	참 고 사 항
점대칭이동과 닮음이동	
닮음정리 닮음변환과 그의 성질	물리학 문제와 연관
도형의 닮음 삼각형의 닮음조건	
피타고라스의 정리 대각선정리, 높이정리 피타고라스의 정리의 역	Pythagoras (기원전 약 550년) 예각, 직각, 둔각삼각형
평면 및 공간에서의 길이 계산	닮음정리와 피타고라스의 정리 이용
피타고라스의 수	

2. 발견과 증명 (17시간)

교 육 내 용	참 고 사 항
원주각의 정리	
실험, 추측, 정리, 증명, 정리의 일반화	원에서의 정리 또는 피타고라스의 정리와 관련된 실제적 제반 문제 이용 계산: 컴퓨터 또는 전자계산기 이용
문제풀이 또는 증명을위한 전략 (황금분할 도입)	

2. 양국 수학교과서의 학년별 목차비교 (기하부분)

편집 지면상 본 논문의 가장 뒷면에 위치한 별도의 표로 비교하였다.

IV. 교과서 내용의 비교 및 분석

단원별 세부적인 심층분석에 들어가기에 앞서, 양국 수학교과서의 기하부분에서 드러나고 있는 일반적인 차이점에 대하여, 교과과정, 수학적기초론, 수학적 구조론, 새로운 개념의 도입과정, 실생활과의 접목 등 다섯 분야로 나누어 비교해보자.

첫째로 교과내용의 학년별 배정위치에서 나타난 양국의 차이점을 보자. 우선 우리는 연구 (노정학 외 2인, 2003)을 통하여 대수영역의 경우는, 같은 교과내용에 대하여 독일이 한국에 비해 대체로 같거나 더 먼저 배운다는 것을 확인하였다. 그러나 기하영역의 경우는 이와는 정반대로, 양국이 비슷하거나 아니면 한국이 오히려 더 빠르다. III-2의 학년별 목차비교에서 보듯이, 예를 들어 삼각형의 합동조건이나 평면도형의 넓이 등의 소단원의 경우, 한국교과서는 7학년에 나타나 있는데 반하여 독일교과서에는 8학년에서 다루어지고 있다. 또 한국의 8학년 목차에 있는 도형의 닮음이 독일에서는 9학년에 들어 있으며, 삼각비의 경우는 한국은 9학년, 독일은 10학년에서 배운다. 반면에 독일이 한국보다 더 낮은 학년에서 다루어지는 내용은 적어도 교과과정에서는 전혀 찾아볼 수 없다. 이러한 한국의 조기도입 현상은 양국의 교육제도나 인문계 중학교의 입학비율 등을 감안한다면, 더욱이 주목해야할 사항이다[(Weidig, 1988) 또는 Internet (2), (3) 참조; 특히 Internet (3)은 영문본 임].

두 번째로는 수학기초론의 입장에서 분석해보자. 기하영역에 대한 이 부분의 비교는, 특히 정리(Theorem)에 대한 가정과 결론의 설정과 그의 증명에 대한 도입시기 및 도입 방법에서 가장 잘 나타나 있다.

먼저 한국의 경우를 보자. 도형과 관련된 여러 가지 성질에 대하여, 7학년까지는 작도나 실습을 통하여 얻어진 결과들에 대하여 구체적인 증명은 가급적 피한 채 단순 서술하고 있으나, 8학년부터는 모든 정리에 대하여 가정과 결론을 명확히 설정한 후, 이를 기존의 밝혀진 사실을 토대로 매우 논리적이고도 정확한 증명과정을 요구하고 있다. 반면에 독일의 경우는 어떠한가? 독일교과서에는 8학년까지도 가정이나 결론이라는 용어는 물론, 증명이라는 용어조차 거의 사용하지 않는다. 이 시기까지는 단지 어떤 사실에 대하여 작도나 실례(實例) 또는 실험 등을 바탕으로 그 정리가 성립함을 간접적으로 인식시키는 정도이며, 단지 매우 간단한 정리에 대하여만 설명을 통하여 증명을 유도하고 있다. 실제로 독일의 경우, 우리는 어떤 정리에 대한 추정 및 가정과 결론의 설정, 그의 논리적 증명 등이 9학년 교과서의 각 단원 마지막 절에서 본격적으로 다루어지고 있음을 직접 확인할 수 있다(III-2의 목차비교 참조). 이러한

차이 역시 대수영역과는 대조적인 것으로, 우리가 눈여겨 볼 대목이다.

셋째로는 수학의 구조적 입장에서 관찰해보자. 먼저 대수영역의 경우, 우리는 이미 독일은 한국에 비해 계산방법이나 답을 얻는 요령보다는 교환, 결합 및 배분 법칙 등 대수적 구조에 더 비중을 두어 다루어지고 있다는 사실을 잘 알고 있다(노정학 외 2인, 2003). 이러한 대수적 구조에 대한 독일교과서의 관심은 기하영역에서도 전혀 변함이 없는데, 이를 잘 보여주고 있는 단원은 도형의 합동과 닮음이다. 하단의 테마별 심층 분석과정에서 구체적으로 설명되겠지만, 한국의 경우, 두 도형의 합동은 '모양과 크기가 같은 두 도형'으로, 또 닮음은 '한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소를 통하여 얻어지는 두 도형' 등의 매우 직관적인 방법으로 정의하고 있는데 반하여, 독일교과서에는 합동이나 닮음을 정의하기 앞서 먼저 합동 및 닮음변환을 도입하고, 이후에 이러한 변환에 의해 얻어지는 두 도형을 합동 또는 닮음이라고 정의하고 있다. 이는 합동이나 닮음의 개념을 일반적인 선형대수학의 선형변환의 구조적 의미로 유도하고 있는 것이다.

이제 네 번째로 새로운 수학적 개념을 도입하는 과정에서 나타난 차이점을 보자. 먼저 한국의 경우는 대체로 개념의 정의를 우선 앞세운 후, 이에 대한 기본 성질이나 예들을 제시하는 '연역적' 방법을 택하고 있다. 반면에 독일에서는 이와는 반대로 도형의 작도 또는 실제적 현상들에 대한 관찰이나 탐구과정을 거친 후에 그에 대한 개념을 도입하는 '귀납적' 방법으로 설명되어 있는 것이다. 이에 대하여는 아래 테마별 심층 분석 중 내접원 및 외접원의 도입과정에서 구체적으로 확인할 수 있다.

마지막 다섯 번째로 비교되는 것은 예제나 연습문제에서 제시되는 문제의 유형에 있다. 먼저 한국의 경우는 제시된 문제의 개수도 많지 않으며, 또한 문제의 유형이 대체로 단순할 뿐 아니라 제시된 수치 역시 전반적으로 정수의 범위를 넘지 않고 있다. 이는 한국 수학교육의 본질이 실용성보다는 수학이론 자체에 더 큰 의미를 두고 있는 점, 서론에서 언급했듯이 한국에서는 학력이나 지역적 차이와는 무관하게 모든 학생에게 교과서의 전체 내용을 필수적으로 학습시켜야만 한다는 점, 계산기의 사용이 허락되지 않고 있다는 점 등에서 유인된 것으로 예상된다. 그렇다면 독일은 어떠한가? 한마디로 표현한다면, 독일교과서에 제시된 문제들은 한국교과서에 비해 문제의 형태도 다양할 뿐 아니라, 내용 역시 매우 실용적이다. 실제로, 교과서에 제시된 문제의 유형을 분석해 보면, 물리나 화학 등의 자연과학뿐 아니라, 경제학, 심리학, 사회학 등 여러 학문분야에서 부딪히는 수학과 관련된 제반 문제들을 수학의 교과내용에 결합시켜 해결함으로써, 수학적인 협소한 안목에서 탈피한 탈교과적인 학문 및 사고를 유도하고 있는 것이다.

이제 각 주제 또는 단원별로 비교 분석을 해보자. 기하부분은 대수부분과는 달리, 다음의 두 가지 큰 이유로 비교연구의 대상이 될 수 있는 몇 개의 주요 테마만을 선별하여 비교할 수밖에 없었다.

첫째로는 III-2의 목차비교표에서 보듯이, 양국 교과서 사이에는 대단원과 소단원의 분류가 전혀 다르다는 것이다. 예를 들어 '도형의 작도'의 경우, 독일교과서에서는 이 내용을 7학년에서 대단원으로 상세하고 깊이있게 다루어지고 있는 반면, 한국은 7학년에서 하나의 소단원으로만 다루어지고 있음을 확인할 수 있다. 한편 원의 성질의 경우는 이와는 반대로, 한국에서는 7학년에서 먼저 원의 성질 및 부채꼴의 넓이와 호의 길이라는 테마로 소단원으로 다루어진 후, 9학년에서는 원의 성질이라는 대단원으로 심도있게 다루어지고 있는 반면, 독일교과서에는 9학년에서 원에서의 닮음의 활용이라는 소단원으로 유일하게 나타나 있는 것이다.

두 번째 이유는, 양국교과서에서 다루어지는 테마의 존재 여부이다. 예를 들어 위치관계(점, 직선, 평면 또는 원과 직선), 다면체, 회전체 등은 한국교과서에는 있으나 독일교과서에는 나타나 있지 않으며, 한편 독일교과서에서 다루어지고 있는 변환의 개념이나 탈레스(Thales)의 정리 등은 한국교과서에는 나타나 있지 않다. 물론 일부내용의 경우는 목차에는 없으나 교과내용 중에 내포되어 있는 것도 있다.

따라서 우리는 양국 교과서의 공통 내용 중, 교과내용의 유도 및 전개과정, 표기법, 예제와 연습문제의 유형 등에서 비교연구의 대상이 되는 다음의 4개의 주제

만을 선별하여 비교 분석하였다.

- 삼각형의 합동
- 삼각형의 특별한 점들
- 도형의 닮음
- 피타고라스의 정리

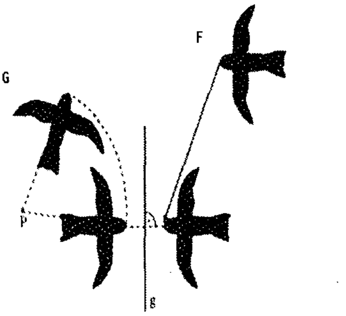
다만 위 테마에 대한 비교 분석과정에서 독자가 이해해야 할 것 한 가지를 명시한다. 제목에 나타난 본 연구의 주제는 양국 교과서를 비교 분석하는 것이지만, 애초 우리의 연구가 이러한 비교 분석을 통하여 우리 교과서의 장점은 가급적 살리되, 독일교과서의 장점 또는 유익한 내용을 참고하여 우리 교과서의 부족한 점을 최대한 보완하는 데 목적이 있음을 감안할 때, 연구의 내용이나 그림 등이 독일교과서에서 주로 인용되었음을 이해해 주기 바란다.

(1) 삼각형의 합동

도형의 합동은 한국에서는 7학년에서 배우는 반면, 독일은 1년 늦은 8학년 교과서에 나타나 있으며, 합동의 표기 방법도 약간 다르다. 두 도형 P와 Q가 합동일 때, 한국은 $P \equiv Q$로 표기하는 반면, 독일은 $P \cong Q$로 쓴다.

이제 합동의 도입과정부터 살펴보자. 먼저 한국의 경우는 '모양과 크기가 같은 두 도형을 서로 합동이라고 한다' 라고 매우 간결하게 정의함으로 합동의 개념을 매우 쉽게 접근시키고 있는 반면, 독일에서는 합동이라는 용어를 정의하기에 앞서 합동변환을 먼저 정의함으로, 합동의 의미를 등장변환(等長變換; isometry)의 개념으로 유도하고 있다. 이 과정을 간단히 요약하면 다음과 같다.

먼저 도형에 대한 평면상의 세 가지 기본이동(평행이동, 대칭이동, 회전이동)을 도입 설명한 후, 이러한 이동을 유한 번 시행하여 얻어진 변환을 합동변환이라 정의하고, 이어서 변의 길이나 각의 크기는 이 변환에 의해 변화되지 않는다는 사실 등 합동변환의 기본적 성질이 다루어진다. <그림 1>은 새 모양의 도형 F를 평행, 대칭, 회전이동을 시켜 합동인 도형 G를 얻는 과정을 보여주고 있다.



<그림 1> 평행, 대칭, 회전이동에 의한 변환

이러한 합동변환의 정의 및 성질을 바탕으로, 두 도형의 합동을 다음과 같이 정의하고 있다.

> 두 도형 F와 G가 합동이라는 것은, 도형 F를 도형 G에 일치시키는 어떤 합동변환이 존재할 때이다.

이제 본 연구의 초점 내용 중 하나인 삼각형의 합동조건에 대하여 고찰해 보자. 먼저 한국에서는 세 가지 합동조건, 즉 대응하는 세 변의 길이가 각각 같을 때, 대응하는 두 변과 그 끼인각의 크기가 각각 같을 때, 대응하는 한 변과 그 양끝각의 크기가 각각 같을 때에 대하여 각각 SSS, SAS, ASA등의 이니셜로 표현하듯이, 독일 역시 이 세 가지 합동조건을 독일어의 이니셜인 sss, sws, sww[4]로 표현하고 있다. 이제 내용에 있어서 나타난 두드러진 차이점 또는 우리가 교과서 편찬에서 참고가 될 수 있는 부분 세 가지를 선별하여 정리해보자.

① 합동조건의 증명방법

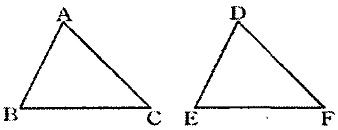
삼각형의 합동조건 3가지는 양국이 동일함에도, 그 합동조건이 성립하는 이유 대한 설명은 양국 사이에 상당한 차이를 보이고 있다.

먼저 한국의 경우는, 우선 삼각형의 결정조건 3가지를 작도를 통하여 도입한 다음, 이 세 가지 조건이 두 삼각형의 합동조건과도 부합됨을 인식시킴으로 세 합동

4) s: Seite(변), w: Winkel(각)

조건이 성립함을 증명하고 있다. 반면 독일교과서에는 합동의 정의에 근거하여, 합동변환, 즉 유한 번의 평행, 대칭 회전이동을 통하여 한 도형을 다른 도형에 일치시킬 수 있음을 보이는 방법으로 이 정리를 증명하고 있다. 예를 들어, 합동조건 SAS(독: sws)의 경우를 보자.

먼저 한국교과서의 경우, ΔABC와 ΔDEF에 대하여 $\overline{AB}=\overline{DE}$, $\overline{AC}=\overline{DF}$이고$\angle A=\angle D$라 하자(<그림 2>). 그러면 이 두 삼각형은 두 변과 끼인 각이 주어져 있으며 또한 그 길이와 각의 크기가 일치함으로, 삼각형이 유일하게 결정되는 조건에 의해 두 삼각형은 합동이 된다고 간단히 설명하고 있다.



<그림 2> 합동인 삼각형

이제 독일교과서의 설명을 보자. ΔABC와 ΔPQR에 대하여

$$\overline{AB}=\overline{PQ},\ \overline{AC}=\overline{PR}\text{이고}\quad \alpha=\alpha_1$$

이라 하자. (여기서 $\alpha=\angle A$, $\alpha_1=\angle P$이다. <그림 3>)

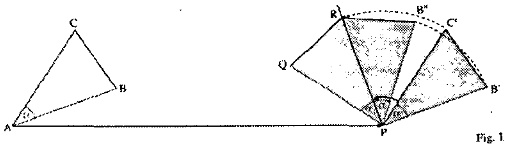


Fig. 1

<그림 3> sws 합동

먼저 평행이동을 통하여 점 A를 점 P에 일치시켜 얻어진 삼각형을 $\Delta PB'C'$이라 놓자. 이제 $\Delta PB'C'$을 점 P를 중심으로 $\angle C'PR$만큼 회전이동 시켜 얻어진 삼각형을 $\Delta PB''C''$이라 하자. 그러면 $\overline{AC}=\overline{PC'}=\overline{PC''}=\overline{PR}$이므로, 점 C''은 점 R과 일치된다. 만일 주어진 두 삼각형 ΔABC와 ΔPQR가 같은 방향이면, $\alpha=\alpha_1$이므로 변 $\overline{PB''}$과 $\overline{PQ}$는 일치되는데,

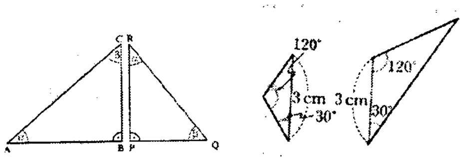
$$\overline{AB}=\overline{PB'}=\overline{PB''}=\overline{PQ}$$

이므로 점 B''과 점 Q는 일치된다. 따라서 ΔABC는 평행 및 회전이동에 의해 ΔPQR와 일치되고, 결국 두 삼각형은 합동이 된다. 한편, 두 삼각형이 서로 반대방향을 이루고 있는 경우는 <그림 3>과 같이 위의 과정 이후, $\overline{PR}$에 대하여 대칭이동을 추가함으로 역시 ΔABC와 ΔPQR가 합동이 됨을 확인할 수 있다.

② 왜 꼭 SAS 또는 ASA인가? (즉, SSA나 SAA는?)[5]

독일교과서의 경우는 SSA, 즉 두 변과 끼인각이 아닌 다른 한 각이 주어져 있는 경우, 합동이 아닌 두 삼각형이 나타날 수도 있음을 작도를 통하여 보여주고 있는데 반하여, 우리가 선택한 한국교과서에는 이에 대한 언급이 전혀 없다. (물론 국내의 다른 교과서 중에는 이에 대한 설명을 한 것도 많이 있다).

이제 SAA의 경우를 보자. 삼각형에서는 대응하는 두 각이 같으면 나머지 각도 같아지므로, 따라서 ASA나 SAA 또는 AAS는 대응순서만 고려한다면 모두 동치이므로 별 문제가 되지 않는다. (실제로 독일교과서에는 wsw(한국의 ASA) 대신에 sww(한국의 SAA)로 표기하고 있다.) 다만 한 변과 두 각이 같더라도 대응순서가 서로 다르면 합동이 될 수 없다는 것은 양국 교과서에서 <그림 4>을 통하여 공통으로 설명하고 있다. (왼쪽 그림은 독일교과서에서, 오른쪽 그림은 한국교과서[6]에서 발췌한 것이다.)



<그림 4> 한 변과 두 각이 같은 삼각형

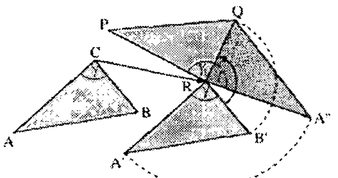
5) 쉽게 이해될 수 있도록 이니셜 표현은 한국에서 사용하는 영문이니셜을 선택하였다.
6) 중학교 수학 7-나, 조태근 외 4명 공저, (주)금성출판사.

③ 한국교과서에는 없는 Ssw합동

SSA의 조건에서 삼각형이 형성되는 경우라도 합동이 아닌 삼각형이 언제나 2가지로 나타나는 것은 아니다. 독일교과서에는 이에 대해 새로운 합동조건의 하나로 매우 상세히 서술되어 있는데 반하여, 한국에서는 어느 교과서에도 이를 다루어지지 않는 것으로 추정되어 이곳에 소개한다.

<그림 5>와 함께 설명하기 위하여 표기는 독일교과서의 방식을 취하겠다. ΔABC의 세 꼭지점 A, B, C가 이루는 각을 각각 α, β, γ라 하고, 이 세 각의 대변을 a, b, c라 두자. 이제 두 변 a, c와 이 두 변의 끼인각이 아닌 각 γ가 주어져 있다고 할 때, 만일 $a > c$이면 합동이 아닌 두 삼각형이 작도될 수 있는 반면, $a < c$인 경우는 삼각형이 유일하게 작도된다. 이는 곧, 다음의 정리가 성립됨이 예상된다.[7)]

[정리] 두 삼각형의 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 두 변 중 큰 변의 대각의 크기가 같으면 이 두 삼각형은 서로 합동이다.[8)]



<그림 5> Ssw 합동

이 정리가 성립함을 보이기 위하여 독일교과서에는 평행, 대칭, 회전이동을 이용하여 다음과 같이 설명하고 있다.

<그림 5>와 같이 두 삼각형 ΔABC와 ΔPQR에 대하여

$$\overline{AB} = \overline{PQ},\ \ \overline{BC} = \overline{QR},\ \ \gamma = \gamma_1 \text{이며}$$

$$\overline{AB} > \overline{BC}\ (\text{또는 } \overline{PQ} > \overline{QR})$$

이라 하자. 그림에서 보듯이, 먼저 ΔABC를 C가 R에 일치하도록 평행이동시킨 삼각형을 $\Delta A'B'R$이라 두고, 계속해서 R을 중심으로 $\angle B'RQ$만큼 회전이동하여 변 $\overline{B'R}$을 변 $\overline{QR}$에 일치시킨다. (여기서 $\overline{B'R} = \overline{BC} = \overline{QR}$임에 유의하자.) 얻어진 삼각형을 $\Delta A''QR$이라 할 때, 이 삼각형을 $\overline{QR}$을 축으로 대칭이동 시키면, 먼저 $\gamma = \gamma_1$으로부터 반직선 $\overline{RA''}$은 $\overrightarrow{RP}$와 일치하게 되며, 계속해서 $\overline{QA''} > \overline{QR}$로부터 Q를 중심으로 하고 반지름이 $\overline{QA''}$인 원을 그리면 이 원은 반직선 $\overrightarrow{RP}$와 단 한 점에서 만난다. 그런데 가정 $\overline{PQ} = \overline{AB} = \overline{A''Q}$로부터 이 교점은 P와 일치하며, 따라서 ΔABC는 ΔPQR와 합동이 된다.

(2) 삼각형의 특별한 점들

중학교 전 과정(7-9학년)을 통틀어 양국 모두 삼각형의 오심(五心) 중 내심, 외심 및 무게중심만을 다루고 있으며, 또한 그와 관련된 예제 및 활용 역시, 단지 독일에서는 더 실용적이며 문제의 다양성이 높은 문제들이 제시되고 있다는 일반적인 차이점 이외에는 대체로 대동소이하다. 다만 우리가 이 테마를 선택하게 된 주된 이유는 단 두 가지인데, 첫째는 내심 및 외심의 도입 및 증명과정에서의 나타난 약간의 차이점이며, 둘째로는 중선 및 무게중심의 의미를 매우 실제적으로 설명하고 있는 독일교과서의 내용을 소개하기 위함이다.

① 내심과 외심

다음에 설명되어지는 모든 내용은 내심과 외심에서 공통으로 나타나고 있는 것이므로, 우리는 단지 외심의

7) $a = c$인 경우는 γ가 예각, 직각, 둔각 중 어느 것이냐의 여부에 따라 다르므로, 독일교과서에서도 이 경우는 언급하지 않고 있다.

8) 독일교과서에서는 큰 변의 길이를 대문자 S, 작은 변의 길이를 소문자 s로 표기할 때, 큰 변의 대각을 나타내기 위하여 이 합동을 Ssw로 표현하고 있다.

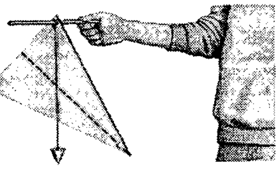
경우만을 서술하겠다.(내심의 경우도 유사하게 설명된다.)

먼저 외심의 도입의 순서를 보자. 한국에서는 일반적인 다각형의 외접원 및 외심을 정의한 후, 삼각형의 경우에 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 교차함을 보임으로 외심의 존재를 유도하고 있는 반면, 독일교과서에서는 이와는 반대로 설명하고 있다. 즉, 먼저 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만남을 보이고, 이 과정에서 그 교점이 삼각형의 세 꼭지점에 이르는 거리가 같다는 사실을 인식시킴으로 외접원을 도입하였고, 이 외접원의 중심으로서 외심을 정의하고 있다.

이제 외심에 대한 이 테마에서의 핵심정리, 즉 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 교차한다는 정리를 증명하는 과정에서 나타난 양국 사이의 차이점을 보자. 다른 정리나 예제와 마찬가지로, 우선 정리의 가정과 결론을 명확히 설정한 후, 이를 삼각형의 합동조건을 이용하여 모순이 없이 상세하고도 논리적으로 증명하고 있는 한국의 경우와는 대조적으로, 독일에서는 7학년의 여러 가지 작도에서 이미 다루어진 명제, 즉 선분의 수직이등분선 위의 임의의 점에서 선분의 두 끝점에 이르는 거리는 같다는 사실을 활용하여 매우 간결하게 설명하고 있다.

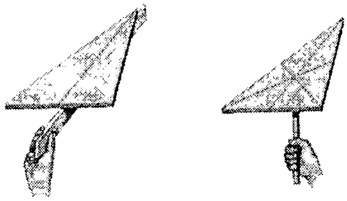
② 무게중심

양국이 모두 8학년 교과서에 있으나, 한국은 내심이나 외심과는 별도로 '도형의 닮음' 이후에 다루어지고 있는 반면, 독일교과서에는 도형의 닮음 이전에 내심 및 외심과 함께 다루어지고 있다. 이는 삼각형의 세 중선이 한 점에서 교차함을 보이는데 필요한 '삼각형의 중점연결정리' 때문인데, 한국에서는 도형의 닮음의 활용부분에서 이 중점연결정리가 나타나고 있는 반면, 독일에서는 7학년 과정에서 도형의 닮음의 이론적 근거가 없이 이 정리가 설명되어 있기 때문이다.



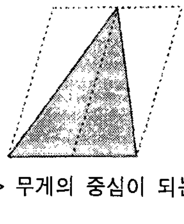
<그림 6> 삼각형의 중선

이제 중선 및 무게중심의 물리학적 의미를 보자. 한국교과서의 경우, 단지 무게중심의 의미, 즉 삼각형의 무게가 그 한 점에 모여 있다는 정도의 설명만 있을 뿐, 그 이유에 대하여는 전혀 언급이 없다. 물론 중선에 대한 물리학적 의미도 다루지 않고 있다.



<그림 7> 삼각형의 중선 및 무게중심

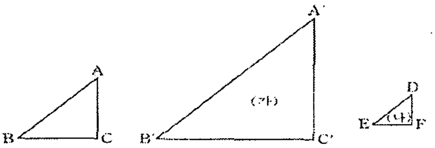
그러나 독일교과서의 경우는 한국과는 달리 매우 상세하다. 먼저 중선의 경우, <그림 6> 및 <그림 7>의 왼쪽 그림에서 보듯이, 삼각형 모양의 널빤지나 판자 등을 이용한 실험을 통하여 중선은 이 삼각형의 무게의 중심을 이루는 직선, 즉 '중심선'이 됨을 확인시켜주고 있으며, 또 <그림 8>을 통하여 이것이 사실임을 수학적으로 증명해주고 있다. 한편 모두 3개가 존재할 수 있는 이러한 무게의 중심선인 중선은 단 한 점에서 일치함을 보임으로, 이 점이 주어진 삼각형의 무게의 중심이 될 수 있음을 <그림 7>의 오른쪽 그림이 보여주고 있다.



<그림 8> 무게의 중심이 되는 중선

(3) 도형의 닮음

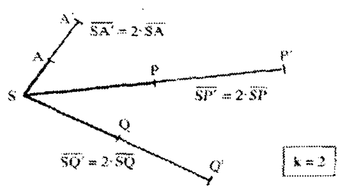
도형의 합동에서와 마찬가지로, 도형의 닮음 역시 도입과정에서 양국 사이에 큰 차이를 보이고 있다. 먼저 한국의 경우는 전형적인 기하학적 방법, 즉 <그림 9>와 같이 한 도형을 일정한 비율로 확대 또는 축소하여 새로운 도형을 얻을 때, 이 두 도형 사이에 닮음인 관계가 있다고 정의되어 있다.



<그림 9> 닮은 삼각형

반면에 독일의 경우는 합동의 도입과정과 유사한 방법, 즉 닮음변환의 관점에서 두 도형의 닮음을 접근하고 있다. 이는 선형대수학에서의 선형변환의 개념을 암묵적으로 유도하고 있는 것으로, 그 과정을 구체적으로 설명하면 다음과 같다.

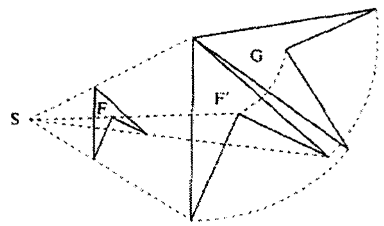
> 고정점 S에 대하여, 평면 위의 임의의 점 P가 다음의 조건에 따라 P'에 대응될 때, 이 변환을 닮음변환이라 한다.
> (a) 점 P'은 두 점 S와 P를 지나는 직선 위에 놓여있다.
> (b) 임의의 점 P에 대하여, 조건 $\overline{SP'} = k\,\overline{SP}$를 만족시키는 상수 $k > 0$가 존재한다.



<그림 10> $k=2$ 인 경우

이러한 닮음변환의 정의를 바탕으로, 닮음변환의 여러 가지 성질, 예를 들면 직선은 직선에 대응된다는 것 또는 대응하는 각의 크기가 변하지 않는다는 것 등이 제시되어 있으며, 계속해서 닮음변환의 정의를 바탕으로 두 도형의 닮음을 다음과 같이 도입하고 있다(<그림 11> 참조).

> 도형 F가 어떤 닮음변환에 의해 F'에 대응될 때, 이 두 도형 F와 F'은 닮음의 위치에 있다고 말한다. 또 두 도형 F와 G에 대하여, 어떤 닮음변환에 의해 F의 상이 G와 합동을 이룰 때, F와 G는 서로 닮았다고 정의한다. 이 경우, $F \sim G$로 표기한다 (한국은 F□□ G).



<그림 11> 닮음의 위치에 있는 두 도형

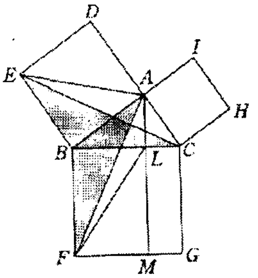
도형의 닮음에 대한 이와 같은 '완벽한' 도입과정에 반하여, 독일교과서에 나타난 내용이나 활용 등은 한국에 비해 상대적으로 약하게 다루고 있다. 예를 들어 삼각형의 닮음조건의 경우, 한국에서는 세 가지 닮음조건, 즉 대응하는 세 변의 길이의 비가 같은 경우(SSS닮음), 대응하는 두 변의 길이의 비와 그 끼인각이 같은 경우(SAS닮음), 두 각이 같은 경우(AA닮음) 등이 모두 제시되어 있는 반면, 독일교과서에는 단지 세 번째 조건, 즉 두 각이 같은 경우(AA닮음) 하나만이 제시되어 있을 뿐, 나머지 두 닮음조건은 전혀 언급조차 없다. 또 도형의 닮음의 활용으로는 가장 대표격이라 할 수 있는 원의 성질의 경우, 9학년에서 별도의 단원을 두어 매우 상세히 다루고 있는 한국에 비해, 독일의 경우는 한 절 정도의 규모로 가볍게 다루고 있다. 우리는 이러한 분석을 통하여, 도형의 닮음의 교육의 초점을 어디에 맞추고 있는지를 분명히 확인할 수 있겠다.

(4) 피타고라스의 정리

우선 도입과정의 경우, 모눈종이를 이용하여 특수한 몇 개의 직각삼각형에 대하여, 각 변을 한 변으로 세 정사각형의 넓이를 비교함으로써 피타고라스의 정리를

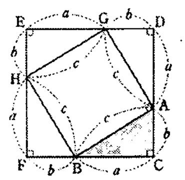
추정하는 방식은 양국이 유사하다. 이 테마에 대한 우리의 초점은, 임의의 삼각형에 대한 이 정리의 증명과정에서 양국 사이에는 어떤 차이점을 보이고 있는가에 있었다. 결론부터 말한다면, 한국은 대체로 수식을 이용한 대수적인 방법을 취하고 있는데 반하여, 독일은 수식보다는 거의 작도나 공작(工作)을 통한 직관적인 방법으로 설명되어 있다는 것이다.

이제 이에 대하여 구체적으로 설명하기 전에, 먼저 과거의 한국교과서에서 가장 대표적으로 제시되었던 증명방법,



<그림 12> 합동을 이용한 증명

즉 <그림 12>와 같이 두 삼각형 ΔEBC와 ΔABF의 합동이라는 것과 삼각형의 넓이의 변환을 이용한 전통적 증명방법은 양국 교과서에서 모두 취급하지 않고 있다. 이는 양국 교과서가 공통적으로, 기하학을 쉽게 이해시키기 위한 5가지 방안 중 하나인 '수학의 형식이나 논리적인 증명을 지나치게 강요해서는 안된다'는 점에 비추어, 매우 긍정적인 발전이라 판단된다(석용징 외 2인, 2003). 이제 이 정리에 대하여 표본으로 선택한 양국의 증명방법을 보자.

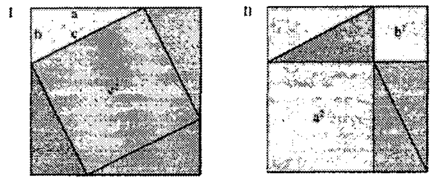


<그림 13> 피타고라스의 정리의 증명(한국)

<그림 13>의 모양을 모델로 선택한 것은 양국이 동일하다. 그러나 이 모델을 이용한 증명방법에서는 양국 사이에 큰 차이를 보이고 있다. 먼저 한국교과서의 경우는 전적으로 대수적 방법, 즉 <그림 13>과 같이 직각을 낀 두 변의 길이를 a와 b, 빗변의 길이를 c라 할 때, 전체 정사각형의 넓이 $(a+b)^2$는 네 직각삼각형의 넓이 $4 \times \frac{1}{2}ab$와 가운데 위치한 정사각형의 넓이 c^2의 합과 같다는 사실을 이용하여

$$(a+b)^2 = 4 \times \frac{1}{2}ab + c^2$$

으로부터 피타고라스의 정리 $a^2 + b^2 = c^2$를 유도하고 있다. 반면, 독일의 경우는 <그림 13>과 대응되는 다른 하나의 그림을 이용하여 수식의 계산은 전혀 없는 직관적 방법을 택하고 있다.



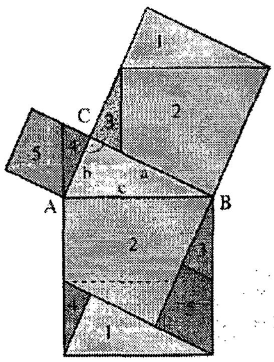
<그림 14> 피타고라스의 정리의 증명(독일)

즉, 한 변의 길이가 $a+b$인 합동인 두 정사각형에 대하여 직각을 낀 두 변의 길이가 a와 b이고 빗변의 길이가 c인 직각삼각형 4개를 <그림 14>의 I과 같이 잘라내고 남는 부분의 넓이를 비교할 때, 좌측의 경우는 c^2이 되는 반면, <그림 14>의 II의 정사각형의 경우는 $a^2 + b^2$가 되어 피타고라스의 정리 $a^2 + b^2 = c^2$이 성립한다고 설명되어 있다.

이제 양국 교과서에는 이 표본 증명 이외에 어떤 다른 증명방법이 제시되어 있는지 알아보겠다. 전술한대로 피타고라스의 정리의 대표적 증명인 <그림 12>의 방법은 다소 난해한 이유로 양국 교과서가 공통으로 채택하지 않고 있다. 그러나 이 방법을 다른 방식으로라도 접근해보려는 시도는 양국 교과서에서 모두 엿보이고 있다. 한국교과서의 경우는 단원의 마지막 '체험학습'란에 오려붙이기 공작방법 한 가지가 제시되어 있는

반면, 독일교과서에는 한국교과서에 제시된 방법을 포함하여 작도 또는 공작을 이용한 3가지 증명방법이 나타나 있다. 그 중 한국교과서에 나타나 있지 않은, 작도를 통하여 그림만을 보고도 직관적으로 쉽게 이해되는 방법 하나를 여기에 소개한다.

<그림 15>를 보자. 이 그림은 단지 주어진 변을 연장하거나 또는 한 점에서 주어진 변에 평행선을 작도함으로 얻어진 것이다. 이 그림에서 학생들은 어렵지 않게 같은 번호를 갖는 삼각형 또는 사각형끼리는 서로 합동이 됨을 확인할 수 있으며, 따라서 큰 정사각형의 넓이 c^2는 작은 두 정사각형의 넓이의 합 a^2+b^2과 같음이 확인된다.



<그림 15> 작도를 이용한 증명

마지막으로 한국교과서에서 돋보이는 것은, 인터넷을 통하여 피타고라스의 정리를 이해하고 활용할 수 있는 방법이 '컴퓨터 프로그램의 활용'이라는 별도항목을 통하여 제시하고 있다는 것이다. 이러한 내용은 독일교과서에서는 전혀 나타나지 않고 있는데, 다만 아쉬운 것은 이 자료의 출처가 교재에 전혀 제시되어 있지 않다는 점이다. 우리의 희망으로는 한걸음 더 나아가서, 이 자료와 더불어 피타고라스의 정리와 관련된 여러 인터넷 사이트도 함께 제시함으로 (물론 이 경우는 거의 매년 업그레이드를 해야만 하는 어려움이 있겠지만), 학생들이 스스로 검색하고 공부할 수 있는 길을 마련해 줄 수 있다면 더욱 바람직할 것으로 사려된다.

V. 맺는말

우리는 본 연구논문을 준비하면서 먼저 다음의 사항들이 전제되어야 한다고 믿고 있었다.

첫째, 한국과 독일, 더 나아가서는 동양과 서양은 역사적 배경이 전혀 다르며, 따라서 종교나 철학, 문화 등 제반 정서면에서 많은 차이를 보이고 있다. 이러한 차이는, 양국 사이에 교육정책을 비롯한 학교교육 전반에서부터 세부적으로는 수학교과서에 이르기까지 암묵적으로 매우 큰 영향을 미치고 있음이 자명하며, 따라서 이러한 시대적 또는 지역적 배경을 무시하고 양국 사이의 교과서를 단순 비교하여 좋고 그름을 논한다는 것은 불합리하다는 점이었다.

둘째로는 양국의 교육제도로부터 유인된 인문계 중학교 학생들의 위상이다. 대다수의 학생들이 인문계 중등학교인 중학교 과정을 이수하고 있는 한국과는 달리, 독일의 경우는 불과 상위 약 30%에 속하는 학생들만이 인문계 중학교인 김나지움에 진학하고 있으며 [(Burscheid, 1984), (Weidig, 1988) 또는 Internet (2) 참조], 우리의 비교대상인 수학교과서 역시 이러한 수준의 학생들을 위한 교재임을 감안해야 한다는 것이다.

우리가 염두에 두었던 세 번째 사항은 한국의 기하교육의 현실이었다. 잘못된 입시제도로 인한 우리 수학교육의 병폐는 어제 오늘의 문제가 아님은 잘 알려진 사실이다. 학생들은 단순한 객관식 또는 단답형의 문제에만 익숙해져 있으며, 따라서 풀이과정이나 서술형을 요구하는 문제는 이미 학생들로부터 떠난 지 오래이다. 우리가 양국 수학교과서의 기하부분을 비교분석하면서 이 병폐를 새롭게 지적하는 이유는, 이 문제가 기하영역의 경우에는 그 심각성을 더하고 있기 때문이다. 기하영역(특히 중학교 8, 9학년 과정)의 가장 큰 핵심은 증명문제라는 것이 주지의 사실이라 할 때, 양국 사이의 문제의 유형이나 난이도를 비교하기에 앞서, 우리 교육현장의 현실이 과연 이러한 증명문제들을 제대로 지도할 환경을 갖추고 있느냐 하는 것이었다. 실제로 교사가 교과서의 원칙에 맞추어 지도하려고 해도, 입시를 비롯한 모든 시험에서는 증명문제를 포기하거나 아니면 기껏해야 증명과정의 빈칸 채우기 정도의 문제들이 출제되고 있는 현실에서, 이러한 교과서적인 증명문

제들은 학생들로부터 도외시 당할 수밖에 없는 것이다.

이러한 여러 가지 교과서 외적인 요인을 감안하면서도, 독일교과서를 통하여 우리 교과서의 기하영역 편집에서 참고가 될 수 있다고 생각되는 항목 중 중요한 3가지를 제언한다면 다음과 같다.

1. 명제 또는 사실을 학생들에게 미리 주지시키기 보다는, 다양한 탐구활동과 실험실습을 통하여 학생들이 스스로 그 사실을 인지할 수 있도록 배려한다.
2. 전통적 유클리드 기하학의 범주에서 탈피하여 수학의 대수적 구조의 차원에서 생각하고 판단할 수 있도록 배려한다.
3. 탈교과적인 문제들을 포함하여, 예제나 연습문제를 통하여 제시되는 문제들의 유형을 가급적 다양화 하며, 또한 문제에 제시되는 수치들도 생활 속에서 실제로 접하는 값들을 선택한다. 이를 위하여 계산기의 사용도 부분적으로 허용한다.

참 고 문 헌

김도상 · 석용징 · 신현성 · 이준영 (1992). 수학과 교재론, 서울: 경문사.

김연미 (1999). 한국과 미국의 초등학교 저학년 수학 교과서 및 교육과정의 비교와 분석, 수학교육학연구, **9(1)**, pp.121-132.

김응태 · 박한식 · 우정호 (2003). 수학교육학 개론(제2증보), 서울: 서울대학교 출판부.

노정학 · 양춘우 · 정환옥 (2003)., 한국과 독일의 중등학교 수학교과서 비교 연구 -중학교 대수 영역을 중심으로-, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **42(3)**, pp.275-294.

박규홍 외 7인 (2002)., 중학교 수학 7-나, 8-나, 9-나, 서울: 두레교육(주).

서보억 · 신현용 · 진평국 (1995). 한 · 소 수학교육과정 비교 연구-중학교 대수영역을 중심으로-, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **34(2)**, pp.265-283.

석용징 · 신현성 · 이준영 (2003). 수학과 교재론(제3판), 서울: 경문사.

우정호 (2001). 학교수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교 출판부.

우정호 (2002). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대학교 출판부.

정영옥 (1993). 독일 수학교육학의 경향, 대한수학교육학회 논문집 **3(2)**, pp.135-157.

황혜정 · 신항균 (2002). 영국과 우리나라의 수학과 교육과정 비교 분석 연구-수와 대수 영역을 중심으로-, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **41(3)**, pp.233-256.

Borneleit, P. : *Lehrplan- und Schulbuchentwicklung in der DDR,* ZDM **35**(2003). pp.134-145.

Burscheid, H. J. : *Eine Schulbildung unter den Gymnasialdidaktikern des aus- gehenden 19.Jahrhunderts.* ZDM **16** (1984) H.6, pp.191-195.

Giesel, H. : *Vergleich der grundlegenden Konzeptionen der Didaktik der Mathematik in der BRD und in der DDR.* ZDM **35**(2003), pp.166-171.

Schmid, A. (ed.) *Mathematisches Unterrichtswerk 7(1994), 8(1995), 9(1997),* Stuttgart : Ernst Klett Verlag.

Weidig, I. : *Mathematics teaching in Germany - the school system, regulations, and the content dimension,* The German Sub-commission of the International Commission of Mathematics Instruction, Berlin 1988.

Internet

1. http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm034i.html
2. http://www.bildungsserver.de/index.html
3. http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/meg/
4. http://www.leu.bw.schule.de/allg/lp/bpg9.pdf

A Study on the Comparision of Middle School Mathematics Textbooks in Korea and Germany - Focused on the Area of Geometry-

Jung, Hwan Ok
Department of Mathematics, Hanshin University, Osan-shi, Gyeonggi-do, Korea, 447-791.
E-mail : jungok@hanshin.ac.kr

Lau, Jeung Hark
Department of Mathematics, Hanshin University, Osan-shi, Gyeonggi-do, Korea, 447-791.
E-mail : jhlau@hanshin.ac.kr

This study analyzed the differences in the contents as well as in the methods of development and presentation of learning contents in Korean and German mathematics textbooks for middle school students. For the research we investigated only the area of geometry, and in particular this study performed in-depth analysis concerning 4 subjects; namely congruences of triangles, special points in a triangle, similarity of figures and the theorem of Pythagoras.

* ZDM classification : D13
* MSC2000 classification : 97D10, 97U20
* Key Word : Comparison of mathematics textbook, German curriculum, comparison and analysis, area of geometry