韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 19집 제 2호, 2005. 7. 379-388

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 19, No. 2, Jul. 2005. 379-388

선형대수에서의 학생들의 오개념

- 일차변환을 중심으로 -

신 경 희 (이화여자대학교)

일차변환은 선형대수에서 가장 중요한 개념 중 하나이다. 그럼에도 많은 학생들에게서 나타나는 이 개념에 대한 오류는 무엇이며 또 어디에 근거하는가? 이 논문은 효과적인 선형대수 교수학습 연구의 일부로, 주어진 여러 함수 중에서 일차변환인 것을 찾는 과정 중에 나타난 학생들의 오류와 그 근거를 알아보았다. 본 연구 결과는 선형대수 학습에 어려움을 겪는 학생들에게 보다 효율적인 교수디자인 설계를 위한 기초 자료의 의미를 갖는다.

I. 서 론

선형대수에서 나타나는 형식적인 공리적 구조의 특징은 그것을 학습하려는 많은 학생들에게 학문적 장벽을 만들게 한다. 선형대수는 공학, 역학 컴퓨터과학, 삼림학, 경제학, 통계학 등의 여러 학문 영역에서 문제해결의 수단으로 쓰이기 때문에 일단은 학생들에게 쉽게 다가갈 수 있어야 되고 수학을 전공하는 학생들에게는 이미 학습한 미분적분학의 직관적인 것에서 앞으로 다루게 될 좀 더 엄밀한 추상대수나 고등 해석학의 가교 역할을 할 수 있어야 한다.

그럼에도 불구하고 대부분의 학생들은 선형대수 학습에서 어려운 장벽에 부딪치고 있고, 심지어는 새롭고 낯선 행성에 내려 갈 길을 몰라 헤매는 것에 어려움이 비유되기도 한다(Dorier, 2000). 선형대수의 어떤 특징들이 이러한 상황을 만드는 것일까? 많은 수학자들은 이러한 어려움의 이유를 선형대수가 가지고 있는 과도기적 교육과정에서 찾는다. 고등학교를 졸업하고 대학에서 미분적분학을 한 두 학기 수료하고 때로는 논리와 집합을 학습한 상태에서 선형대수의 학습을 시작하는 것은 처음으로 추상적 개념에 발을 들여놓는 것과 같다. 수많은 새로운 정의, 중등학교 교육과정과 동떨어진 내용, 개념 학습의 형식적 접근등은 학생들로 하여금 심각한 학습 장애를 가져다 줄 수 있는 요인이 된다. 또한 선형대수에서 나타나는 개념의 상호의존성을 들 수 있다. 수학의 모든 내용은 구조적인 특징을 갖고 있어서 한 개념을 인지하지 못했거나 오개념을 가지고 있으면 그것에서 파생되는 모든 수학적 명제들의 이해는 불가능하다. 한 예로 행렬의 가역(invertible)성과 그 행렬을 계수 행렬로 갖는 동차방정식의 근의 존재성의 필요충분조건으로 시작한 정리는 행 사다리꼴(row-echelon form) 행렬과 기본행렬을 학습한 후 네 개의 필요충분조건 명제의 새로운 정리를 만든다. 또한 비 동차 방정식과의 관계, 행렬식과의 관계에서 일곱 개의 필요충분조건을 갖는 정리가 되고 일차변환과 연결된 또 다른 조건으로 두 개의 필요충분조건을 추가하게 된다. 일반적인 벡터공간의 개념 학습 뒤에는

무려 여덟 개의 명제가 추가되고 다시 내적 공간의 학습 후에는 두 개가, 최소 제곱의 근사치의 응용을 학습한 뒤에 한 개, 고유치(eigen value)와 관련된 내용을 추가해 모두 스물 한 개의 필요충분조건을 제시하게 된다(Anton, 2003). 각 명제마다 새로운 개념이 포함되어있고 이는 서로 가정과 결론이 되어 연결되어 있다. 이는 제 1장에서 시작된 명제가 한 학기를 마무리하는 마지막 장까지 개념이 연결되어 있음을 의미하고, 학생의 입장에서는 어느 한 부분에서 개념 학습이 이루어지지 않으면 그 뒤의 연결에서 맥이 끊기고 마는 결과를 초래할 수 있다. 개념의 상호 의존성은 행렬, 동형사상등 기타 여러 부분에서도 나타난다.

선형대수가 갖는 이러한 특성은 학생들로 하여금 여러 가지 이유로 개념을 아예 인지하지 못하거나 자신들이 이미 갖고 있었던 선험지식과 함께 오개념을 갖게 되기도 한다. 이는 연이어 진행되어져야 할 부분에서 학습장애를 일으키고 문제풀이에서 오류를 범하는 결과를 초래할 수 있다.

일차변환은 선형대수의 가장 중요한 개념 중 하나이다. 본 논문은 일차변환의 학습에서 나타나는 학생들의 어려움과 오류를 분석 연구함으로써 보다 효과적인 교수학습의 장을 논하고자 한다.

II. 연구의 이론적 배경

수학교육에서 오류와 그의 분석에 대한 교육학적 관심은 1925년 Buswell 과 Judd(Radatz, 1979)의 연구에서 시작되었다. 처음에는 주로 학생들의 계산상의 오류를 지적했지만 형식적인 규준에만 맞추는 시험에 대한 회의론과 점차 커져가는 교수법에 대한 관심, 새로운 교육과정이나 내용을 개혁해서 생기는 또 다른 오류에 대한 분석이 나타났고 학습자의 개별화 교수과정 중에 나타나는 사회적이고 심리학적인 오류도 감지되었다. 경험적 연구에 대한 전통적 패러다임의 비판은 수학교육연구의 새로운 방법론을 필요하게 만드는 계기를 제공했다.

여러 가지 오류는 많은 부분 학생들의 오개념에서 비롯된다. 이러한 오개념은 여러 특성을 지니는데 학생들은 한 개념에 대하여 자신이 이미 가지고 있던 기존 구조에 새로운 상황을 맞추는 체계성을 가지고 있고, 옳다고 생각되는 것만을 받아들이는 나름대로의 타당성도 가지고 있다. 학생들이 가지고 있는 오류도 실제로는 조직적으로 잘 정돈되어 있어서 쉽게 없어지지 않는다. 이것은 실제 학생이 오개념을 가지고 있는 경우 교사에 의해 옳게 피드백이 주어졌더라도 학생 자신의 판단으로 원래 가지고 있던 생각에 더 신뢰를 느끼면 원래의 오개념에 대한 확신은 더욱 커지고 지속성도 높아질 수 있음을 의미한다(Bachelard, 1970: Brousseau, 2002).

이러한 오개념은 결국 학습 장애로 나타난다. 장애 발생 원인을 연구한 Cornu(1991)는 극한개념에 대한 교수학습 실험에서 복잡한 개념을 학생들에게 쉽게 이해시키려는 나머지 너무 단순화시켜 설명했기 때문에 인지적 장애가 생길 수 있음을 경고하였다. 또한 특별한 예를 들어 설명할 때 생기는 개념 이미지에서 발생할 수 있는 오개념은 정확한 개념 형성에 장애를 가져올 수 있음을 지적하고 있다(Davis & Vinner, 1986). 물리학 수업의 학습 장애를 분류했던 Bachelard는 처음 경험했던 학습

으로 부터의 장애, 일반적 지식으로부터의 장애, 언어적 장애, 익숙한 이미지의 오용에서 올수 있는 장애, 단순하거나 실제적인 지식에서 오는 장애, 애니미즘에서 오는 장애 그리고 양적인 지식에서 올 수 있는 장애를 지적하였다. 수학에서의 장애 분류도 이와 크게 다르지 않음을 많은 학자들은 주장하고 있다. 이러한 장애의 개념은 인식론적인 영역을 넘어서 교육학, 심리학과 정신 생리학까지 확대되었다(Brousseau, 2002).

학생들에게서 나타나는 오류는 결코 우연이 아니다. 이미 가지고 있었던 오개념과 장애의 결과가 오류로 나타난 것이다. 수학적 오개념의 형성 원인은 크게 인식론적인 원인과 교수학적인 원인으로 대별된다. 인식론적인 원인은 다시 학습자의 지각적 특성에 의한 것과 논리적 추론특성에 의한 것으로 구별될 수 있다. 교사가 갖고 있는 오개념이나 불충분한 설명이나 치우친 예제를 통해 각인된 것으로부터 생길 수 있는 오개념은 교수학적 변인에 해당한다. 테크놀로지의 발달은 교수학적 메타인지 이동을 가져올 수 있고 토파즈 효과, 죠르단 효과도 진정한 개념 형성에 장애를 가져다준다. 개념 도입에 지식의 내면화 보다는 형식적 접근을 꾀하는 교수법은 학생들의 유의미한 개념 이해의 기회를 원초적으로 박탈할 수밖에 없다. 이러한 형식적 고착은 선형대수의 학습에서 흔히 나타나는 교수학적인 폐해로 지적되어 왔다(Dorier, 2000: Dorier, Robert & Robinet, 2000: Brousseau, 2002: 최지선, 2003).

1989년부터 여러 해 동안의 Robert와 Robinet의 선형대수 학습에 대한 실험연구 결과는 교수 학습에 대한 많은 것을 생각하게 한다. 학생들이 선형대수 학습에서 가장 힘들어하는 세 가지 이유는 감당하기 어려울 만큼의 많은 양의 새로운 정의의 도입과 둘째로 이미 배운 수학, 즉 고등학교까지의 수학 대학에서의 미분적분학과 논리와 집합 등에서 학습한 개념과의 연계성 찾기의 어려움과 마지막으로 형식주의의 도입 등을 주된 어려움으로 지적하고 있다. 이 형식주의의 어려움을 피하고자 선형 연산자로서의 행렬의 여러 가지 연산 및 성질의 알고리즘만을 강조하다보니 또 다른 자가당착의 모순에 빠지게 되고 실제 중요한 핵심 개념의 학습은 뒤로한 채 한 학기가 가버리는 오류를 범하고 있음을 주장하고 있다. 9년여에 걸친 선형대수 교수 학습에 관한 프로젝트에서 다양한 실험과 이론을 이끌어내기도 했던 연구자들은 처음 발견되었던 문제점과 학생들의 오류는 그래도 여전히 존재한다고 결론짓고 있다(Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 2000).

III. 연구 방법

선형대수에서 효과적인 교수 학습의 장을 마련하기 위해서는 우선 학생들이 느끼고 있는 어려움과 오류를 발견하고 분석하는 일이 선행되어야한다. 연구자는 대학교 1학년 두 번째 학기에 벡터와 선형변환이라는 과목을 수강하는 학생들을 대상으로 4주간의 수업 후에 실시된 시험문제에 학생들이 반응한 답안지를 중심으로 오류를 찾고 이의 근원을 분석하였다. 이 실험을 위하여 특별한 교수 방법을 의도적으로 시도하지는 않았고 통상 행해지는 전통적이고 일반적인 교수 학습이 이루어졌다.

선형대수에서 기본적으로 다루는 대상은 일차변환과 벡터이다. 좀 더 정확히 말하면 선형대수는 벡터공간 상에서 일차 변환을 다루는 학문이라 해도 과언이 아니다. 그만큼 두 개념은 선형대수 수업에서 중요한 위치를 차지한다. 대표적인 개혁 선형대수의 교재로 분류되는 Uhlig 의 Transform Linear Algebra(2002)는 일차 변환을 다른 어떤 개념보다 상위에 놓는 전개방식을 택하고 있다. 많은 선형대수 교과서의 전개 방식이 행렬이나 방정식을 먼저 학습하게 하는 것과는 차이가 있다. 연구자가 느끼기에는 이러한 순서가 학생들에게 오히려 어려움을 가중시킬 수도 있다는 생각이 들었다. 일반적인 벡터공간의 성질에 대해서 학습을 하지는 않았지만 벡터공간의 여러 예와 일차변환, 행렬에 관한 4주간 학습 진도 후에 제 1차 시험을 치렀다.

다음은 한 학기 세 번 치른 시험 중 첫 번째 시험문제 내용의 일부분이다. 여러 학년이 섞인 이 학생들은 대부분 수학교육을 부전공이나 복수전공으로 택하고 있고 교육학, 교육공학, 과학교육, 보건교육 등 여러 전공의 학생들로 구성되어있다. 대부분 미분적분학과 집합론을 한 두 학기 수강했거나 수강하고 있는 학생이다.

다음 일차변환의 내용을 다룬 시험이다.

다음 주어진 함수가 일차변환인지를 구별하고 그 이유를 말하시오.

(1) $T(x_{1,}\ x_2)=(x_1+2x_2,\ 3x_1-x_2)$

(2) $T(f(x))=f(x+1)$

(3) $T(a_0+a_1x+a_2x^2)=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2$

총 43명이 치른 이 시험의 정답률은 다음과 같다.

문항번호	3점(만점)	1-2점	0점
(1)	39명	3명	1명
(2)	6명	18명	29명
(3)	13명	4명	26명

(1)번의 문항은 대부분의 학생들이 정답을 쓰고 그에 맞는 증거를 제시했다. 같은 질문이지만 (2)번과 (3)번의 정답률은 현저히 떨어진다. 그렇다고 0점인 학생들의 시험지가 깨끗하게 비워져 있는 것이 아니다. (1)번에 대한 답안지를 가득 메워 자신의 정당성을 주장했듯이 (2)번과 (3)번의 답안지도 학생들 나름대로는 (1)번과 같은 아이디어로 열심히 풀었을 것이다. 한 학생이 쓴 (2)번의 내용을 보자.

$T(f(x))=f(x+1),\ \ T(f(y))=f(y+1)\quad\Rightarrow\quad T(f(x))+T(f(y))=f(x+1)+f(y+1)$
-----①

$T(f(x+y))=f(x+y+1)$ --- ②

①과 ②가 같지 않아 일차변환이 아니다.

이 학생은 정의구역의 벡터공간에서 임의의 두 원소를 선택하는 과정에서 그 원소를 잘못 선택한 오류를 범하고 있다. (1)번의 문제는 완벽하게 정답을 쓴 것으로 보아 일차변환의 충분조건을 추론하는 방법을 모른다기 보다는 벡터공간의 원소들의 생김새를 완전히 숙지하지 못한 결과라고 추측된다. 함수 하나 하나가 벡터가 되어 벡터공간을 이루고 그 벡터공간에서 원소를 끄집어 낼 때는 다시 함수 f와 g가 두 대표 벡터가 된다는 사실을 인지하지 못했다. 이러한 오류는 학생들의 벡터공간에 대한 장애를 갖고 있음을 의미한다. 많은 학생들은 3차원까지의 유클리드 공간에 대한 벡터공간에 대한 이해는 정확하다. 하지만 함수들의 벡터공간이나 행렬들의 공간 등 일반적인 벡터공간에 대한 인식은 약간의 연산에서조차도 오류를 나타내는 장애를 갖고 있다. 이것은 Dorier(2000)등의 연구에서 지적되었던 결과와 일치한다. 유클리드 벡터공간 R, R^2과 R^3에 대한 이해는 중등학교에서도 학습되어지고 벡터는 화살표라는 시각적 이미지가 확고히 자리 잡고 있어서 구체적 연산도 어렵지 않게 조작을 하지만 그와 동형인 또 다른 벡터공간에서조차도 학생들은 원소의 생김에서부터 혼란을 갖는다.

비슷한 오류는 다른 학생에게서도 나타났다. (2)번 문제에서 한 학생이 써내려간 답안지 내용의 일부분이다.

$$T(f(x)) = f(x+1) \quad \Rightarrow \quad T(f(ax)) = f(ax+1) \quad \neq af(x+1)$$

정의구역의 벡터공간에서 한 원소(f)를 택하고 그 벡터에 상수 배(af)를 해야 하는데 무조건 원소는 x라는 오개념이 잘못된 추론의 원인인 경우이다. 이 학생은 면담에서 자신의 답이 왜 틀렸는지를 설명을 듣고 나서야 인정했다. 이는 무의식적으로 나름대로의 오개념을 잠재적으로 자신도 인식하지 못한 채 갖고 있을 수 있음을 의미할 수 있다. 0점을 받았거나 부분점수를 받은 학생의 대부분이 비슷한 오류의 유형을 보이고 있었다.

(2)번 보다는 비교적 정답률이 높았던 (3)번의 풀이에서도 일차변환 자체의 오류보다는 정의구역의 벡터공간에서 벡터를 제대로 읽지 못한 경우가 대부분이었다. 정의구역의 벡터공간에서 임의의 원소를 $a_0+a_1x+a_2x^2$과 $b_0+b_1x+b_2x^2$을 택해야 할 것을 $a_0+a_1x+a_2x^2$과 $a_0+a_1y+a_2y^2$을 택함으로써 벡터의 생김새를 완전히 이해하지 못한 상황을 연출하고 있다. 벡터공간에서 그에 속한 원소에 대한 이해 없이 연산은 형식적이고 무의미하다. 이것은 벡터에 대한 이해부족일 수 있고 매개변수에 대한 오개념을 갖고 있을 수 있다. 여러 개의 변수로 이루어진 하나의 식에서 어느 문자가 고정된 것이고 어느 문자가 변해야 하는지에 대한 정확한 이해는 많은 학생들이 어려움을 호소하고 있는 부분이다. 우정호, 김남희(2002)등은 현직교사와 예비교사를 대상으로 조사를 실시한 결과 변수개념을 올바르게 파악하고 있지 못하며 학생들에게 지도 할 때에도 그다지 신중을 기하고 있지 않음을 지적한 바 있다. 변수를 단순히 '변하는 수'로 해석하고 변수의 본질인 대상에서의 의미를 고려하고 있지 않았으며 변수개념에 대한 지도에서 그 다양한 의미에 대한 고려

없이 몇 가지의 예를 통해 직접적으로 도입하고 있다. 가령 함수나 방정식에서 사용되는 x, y 따위의 문자들을 예로 들면서 '이와 같이 사용된 문자들을 변수라고 한다'라는 식의 설명에 그치고 있다. 변수 개념은 대수의 핵심이다. 대수는 관계를 다루는 중요한 수단이며 다른 것에 관련되는 대상을 다루는 것을 의미한다. 대수를 학습하면서 학생들은 처음 변수 개념에 접하게 되는데 대부분의 학생들은 변수를 단지 수를 대신하는 문자로 생각한다(민세영, 1998: Eisenberg, 1991). Heid(1996) 역시 컴퓨터를 이용한 함수 개념의 효과적인 학습방법을 제안하면서 대수적 사고의 핵심은 변수 개념이 가지는 함축성, 변수 개념의 사용, 변수사이의 연결성을 충분히 숙지하는데 있음을 주장하였다. 이렇듯 중요한 변수개념이 사실상 학생들에게는 명확한 학습이 이루어지지 않은 상황에서 문자 x 나 y 정도가 변수라는 오개념을 가진다. 이러한 상태에서 벡터공간의 원소들이 함수이고 그래서 함수가 벡터라는 상황을 이해하기가 어려울 수밖에 없다. 즉 일차변환을 논하기 이전에 정의구역의 원소들을 이해해야 하고 그 원소들의 속성을 이해하려면 변수 개념의 정확한 이해가 선행되어야 한다.

(2)번과 마찬가지로 (3)번에서 학생들이 제시한 답안에서의 오류는 일차변환에서의 오개념 보다는 정의구역의 벡터공간에서의 벡터들에 대한 이해 부족이 대부분을 차지하고 있었다. 이는 또한 앞에서 지적한대로 학생들의 변수 개념의 오개념에서 비롯되었음을 확인하였다.

다음은 수업시간에 학생들이 치렀던 간단한 시험문제이다.

(a) 다음 함수 T는 일차변환인가? 이유는?

$$T: R^3 \to R^3, \qquad T(x,\ y,\ z) = (y,\ 0,\ y-z)$$

(b) 다음 함수 $f:\ R \to R,\ f(x) = |x| - 3x$ 는 일차변환인가? 이유는?

문제 (a)는 위의 (1)번과 유사한 문제이다. 예상한 대로 대다수의 학생들이 정답을 제시했지만 (b)의 문제는 그렇지 못했다. 문제 (a)에서 정답을 제시한 학생들 중에는 문제 (b)의 풀이에서는 중등학교에서 학습하였던 함수 풀이 방법을 잠시 떠올린듯하다. 다음의 한 학생이 제시한 답안지의 예를 보자.

$x \geq 0 \quad f(x) = -2x, \qquad x < 0 \quad f(x) = -4x$

만약 $x \geq 0$이라면 $f(x_1 + x_2) = -2(x_1 + x_2) = -2x_1 - 2x_2 = f(x_1) + f(x_2)$

$$f(cx_1) = -2(cx_1) = c(-2x_1) = cf(x_1)$$

$x < 0$ 일때는 $f(x_1 + x_2) = -4(x_1 + x_2) = -4x_1 - 4x_2 = f(x_1) + f(x_2)$

$$f(cx_1) = -4(cx_1) = c(-4x_1) = cf(x_1)$$

그러므로 $f(x)$는 일차변환이다.

나름대로 맞는 답안을 작성했다고 생각한 이 학생은 자신이 틀린 이유에 대해서 수긍하기 어려워 했고 면담을 통해서 틀린 부분을 인정한 경우이다. 이 경우는 정의구역에서 선택한 두 벡터 x_1과 x_2의 일반성을 놓친 경우이다. 임의의 두 실수는 부호가 다를 수도 있다는 사실을 간과하고 미리 양수와 음수 끼리로 분류해놓는 오류를 범하고 있다. Bachelard(1970)나 Brousseau(2002)가 분류했던 대로 학생들이 어떤 개념의 과정과 효능을 확신할 때 변화가 어렵고 그것에 대한 나름대로의 확신은 다른 사고를 방해할 수 있고 그 결과 오류로 나타난 경우이다. 또 다른 학생은 좌표평면에 $f(x)=|x|-3x$의 그래프(꺾인 직선)를 그리고 원점을 지나는 직선이므로 일차 변환임을 주장하기도 했다. '일차변환'이라는 용어에서 '일차'는 이미 학생들이 익히 알고 있는 일차함수와 연결되고 이는 모두 중등학교에서 배운 내용과의 연결성에서 오는 오류를 극복하지 못하고 있는 경우이다. 물론 이 학생이 중등학교에서 학습한 일차함수에서 오개념을 갖고 있다고 생각할 수는 없다. 결국 선형대수에서 학습한 일차변환에 대해 완전한 이해를 하지 못하고 있고, 위의 문제 (1)과 (a)를 대다수의 학생들이 어렵지 않게 정답과 자신의 답에 대한 정당성을 진술한 결과를 보더라도 이유는 명백하다. 일차변환에 대한 형식적 정의를 그대로 조건에 맞게 진술했을 뿐이다. 물론 이 시험의 결과만으로 일차변환에 대한 학생들의 모든 오개념을 진단하기는 쉽지 않다. 하지만 Tall과 Cornu(1991)가 주장한 개념이미지에서 오는 오개념과 함수개념의 장애에 대한 인식론적 연구에서 Eisenberg(1991)의 주장은 시사하는 바가 크다. 선형변환도 일종의 함수이다. 함수는 일반적으로 그래프를 그려서 개념을 파악하려는 행위가 자연스러워 보이지만 역사적으로 함수에 대한 시각적 이미지는 점차 사라지고 있다. 이것은 많은 학생들에게 해석적이고 형식적인 개념이해와 추상성을 일차변환에서도 요구하고 있는 것이다.

IV. 결론 및 논의

선형대수는 중등학교에서의 교육과정과 대학의 미분적분학 교육과정 이후 추상대수 등 고등 수학으로의 연계선 상에 있는 과도기적 과목이라 할 수 있다. 추상적이고 형식적인 개념이 시작되는 과목이다. 1960년대 이후 필수 교과목으로 자리 잡은 선형대수는 컴퓨터의 폭발적인 발달과 더불어 계산을 쉽게 할 수 있다는 장점과 함께 현대 과학의 많은 부분에서 쓰임이 더욱 다양해졌다. 선형의 문제는 물론이고 자연계의 비선형 문제들까지 거의 선형의 문제로 수정이 가능해짐에 따라 벡터공간과 함께 선형 연산자는 대부분의 수학에서 핵심적인 주제이다.

고등학교를 이수한 학생들은 유클리드 공간에 대한 지식을 갖고 그에 대한 기하적인 직관으로 벡터공간에 대한 추상개념을 형상화 하게 된다. 벡터 공간에서의 일차 변환 역시 행렬이라는 구체적인 표현 방법을 사용함으로써 고등학교에서 학습한 2×2와 3×3크기의 행렬과의 연계성을 갖고 선형대수의 내용과 익숙해 질 수 있다. 하지만 함수 벡터나 행렬 벡터 등 일반화된 벡터공간과 시각적이고 구체적인 형상 없는 추상화된 개념은 경험이 부족한 학습자에게는 커다란 장애를 불러올 소지가

충분하다. 선형대수가 가지는 특성, 즉 많은 새로운 정의, 중등학교와의 연계성 부족, 형식주의적인 개념접근과 그리고 상호 의존적 개념 등은 다양한 인식론적인 장애와 함께 오개념을 갖게 하고 그 결과 문제풀이 과정에서 예기치 못한 오류가 발생한다(Dorier, 2000).

이러한 선형대수의 특성과 그에 따른 어려움 및 중요성에 공감한 수학자 및 수학교육학자들은 1990년 선형대수 교과과정 연구단체의 출범식을 갖고 새로운 선형대수 교수학습에 공감대를 갖고 다섯 가지의 추천 목록을 발표하기에 이르렀고 내용의 실용성, 행렬 중심의 교육과정의 설계, 적당한 테크놀로지의 활용과 좀 더 엄밀한 이론적인 행렬론을 한 강좌 정도 후속 과목으로 하자는 내용을 담았다. 이후 많은 대학에서 기존의 벡터공간 중심에서 행렬 중심의 선형대수 교육과정을 선택했고 보다 실용적인 내용의 교재와 교수학습의 장을 제공하려는 노력이 이어졌다(Carlson, 1997: Tucker, 1993: 신경희, 2004).

본 연구는 여러 함수 중 일차변환의 조건을 만족하는 함수를 찾고 그의 근거를 밝히는 문제에 대한 학생들의 반응에서 나타난 오류는 무엇이며 그 오류의 근원은 무엇인가에 초점을 두었다. 학생들은 일차변환의 충분조건을 추론하는 방법을 모른다기 보다는 일차변환의 정의구역인 벡터공간의 원소들을 완전히 숙지하지 못하고 있었다. 벡터공간의 원소인 벡터가 어떻게 생겼으며 임의의 벡터를 택하는 방법, 벡터들끼리의 연산에 대한 인식의 부족에서 오는 오류를 보였다. 일반화된 벡터공간에 대한 인식론적 장애는 그것을 정의구역으로 했을 때의 일차변환의 학습에 또 다른 장애를 만들고, 관계적 이해가 되지 않은 상황에서의 학습은 오개념이 만들어지고 있음을 알 수 있었다. 중등학교 때에 다루었던 함수들이 수학적 대상이 되어 하나의 벡터공간을 만들고 다시 또 다른 벡터공간으로의 함수를 생각하는 수학적 구조를 이해하기는 분명 쉬운 작업이 아니다. 벡터로서의 함수는 다시 변수 개념과 맞물리면서 변수의 본질인 대상으로서의 의미를 고려하고 있지 않았다. 일차 변환은 일종의 함수임을 감안할 때 Vinner 와 Dreyfus(1989)의 연구는 일차 변환의 교수학습에서 나타날 수 있는 또 다른 오류의 가능성을 시사한다. 많은 노력에도 불구하고 학생들이 가장 어려워하는 개념은 여전히 함수임을 밝힌바 있다. '함수'라는 익숙한 용어 때문에 명백한 학습상황을 가정하고 형식적인 일차변환 개념을 시도하지만 상황이 바뀌면 그 아이디어를 어떻게 적용해야 할지 모르는 경우가 많다. 이것은 어떤 개념이 한 상황에서 잘 이해된다고 해도 다른 상황으로 항상 전이되지는 않음을 염두에 두어야함을 의미한다(Eisenberg, 1991). 일차 변환에 대한 교수디자인을 계획할 때 고려해야할 대목이다.

대학수학교육에서 효과적인 교수학습에 관한 많은 연구가 진행되고 있지만 학생들이 갖고 있는 오개념은 줄어들고 있는 것 같아 보이지 않는다. 요즈음 활발히 연구되고 있는 멀티미디어를 이용한 교수학습은 선형대수를 비롯한 대학수학교육에 새 바람을 일으키고 있다(Hazzan & Zazkis, 2003: Siew, 2003). 하지만 그것만이 대안이 될 수는 없다. 학생들이 오류를 범한다는 것은 장애가 있음을 의미한다. 수업을 디자인할 때 당연히 학생들의 장애를 염두에 두어야한다. 장애를 새롭게 배워야할 수학 개념의 구성 요소로 보고 그것을 극복하도록 해야 한다. 이번 연구에서 학생들의 오류 발견과 분석은 차후 선형대수 수업의 효율적인 교수디자인 설계를 위한 기초자료로 쓰일 것이다.

McDermott(2001)의 지적대로 학생들이 어떻게 생각하고 어떻게 학습하는가에 교수들이 좀 더 적극적인 관심을 갖고 학생들이 겪는 어려움에 귀 기울여야 한다. 학생들에 대한 이러한 정보는 성공적인 학습을 위한 교수 디자인에 효과적으로 쓰일 것이고 그 연구 결과는 좀 더 일반적인 지식 전달의 방법론 연구에 또 다른 통찰력을 제공할 수 있다.

참 고 문 헌

민세영 (1998). Piaget의 개념발달의 메커니즘과 대수의 역사, 대한수학교육학회 논문집, **제8권 제2호**, 485-494

신경희 (2004). 선형대수 교육과정과 교과서의 변천, 한국수학교육논문집, **19권 18(2)**, 133-142

우정호 · 김남희 (2002). 변수개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색, 수학교육학의 지평, 경문사, 303-316

최지선 (2003). 중등학교 수학학습에서 나타나는 오개념에 관한 고찰, 서울대학교 대학원 석사 논문

Anton, H. (2003). *Elementary Linear Algebra*, John Wiley & Sons, Inc.

Bachelard, G. (1970). *la Philosophie du Nom.* Paris, Presses Universitaires de France. 김용선 역 (1991). 부정의 철학, 인간사랑

Brousseau, G. (2002). Theory of Didactical Situations in Mathematics, *Didactique des Mathematique 1970-1990*, Kluwer Academic Publishers

Carlson, D. (1997). *Resources for Teaching Linear Algebra*, MAA Notes, Vol. 42

Cornu, B. (1991). Limit, In *Advanced Mathematical Thinking*(Eds by Tall), Kluwer Academic Publishers, pp.153-166

Davis, R. B. & Vinner, S. (1986). The Notion of Limit: Some Seeming Unavoidable Misconception Stages, *Journal of Mathematical Behavior,* **5(3)**, pp.281-303

Dorier, J-L. (2000). Use of History in a Research Work on the Teaching of Linear Algebra. In Katz, V. J.(Ed), *Using History to Teach Mathematics*, MAA, pp.99-110

Dorier J., Robert A., Robinet J. & Rogalski M. (2000). On a Research Programme Concerning the Teaching and Learning of Linear Algebra in the Five-year of a French Science University, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.* **Vol. 31(1)**, pp.27-35

Eisenberg, T. (1991). Functions and Associated Learning Difficultes. In Tall, D.(Ed), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers pp.140-152

Hazzan O. & Zazkis R. (2003). Mimicry of proofs with computers: the case of Linear Algebra, *INT. J. MATH. EDUC. SCI. TECHNOL.*, **vol.34(3)**, pp.385-402

Heid, M. K. (1996). A Technology-Intensive Functional Approach to the Emergence of Algebraic Thinking. In Bednarz N., Kieran, C. & Lee, L.(Ed), *Approaches to Algebra*, Kluwer Academic Publishers, pp.239-256

McDermott L. C. (2001). Oersted Medal Lecture 2001: "Physics Education Research- The Key to Student Learning" *Am. J. Phys.* **69(1)**, pp.1127-1137

Radatz, H. (1979). Error Analysis in Mathematics Education, *Journal for Research in Mathematics Education*, **Vol. 10, No.3**, pp.163-172

Siew P-F. (2003). Flexible on-line assessment and feedback for teaching linear algebra, *INT. J. MATH. EDUC. SCI. TECHNOL.*, **vol. 34(1)**, pp.43-51

Tucker, A. (1993), The Growing Importance of Linear Algebra in Undergraduate Mathematics, *The College Mathematics Journal*, **Vol. 24, No. 1**, pp.3-9

Uhlig, F. (2002). *Transform Linear Algebra*, Prentice Hall

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for Concept of Function, *Journal for Research in Mathematics Education*, **Vol. 20, No. 4**, pp.356-366