韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 19집 제3호. 2005. 9. 543-556

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 19 No 3, Sep. 2005. 543-556

수학적 유망성이 있는 학생을 위한 프로그램 개발

남 승 인 (대구교육대학교)

우리 주변에는 수학영재 교육 대상자로 선발되어 영재교육을 받지 않는 학생 중에는 수학적으로 유망한 학생들이 많이 있으며, 이들에게 적절한 프로그램을 제공한다면 수학적 재능을 발휘할 수 있을 것이다. 본고에서는 수학적으로 유망성이 있는 학생들을 위한 프로그램 구성 및 운영 모델의 하나로 개방형 접근법(Open-approach heuristic)모델에 따른 구체적인 지도 방안과 프로그램에 대해서 살펴보고자 한다.

I. 들어가면서

과거 농경시대로부터 산업화 시대를 거쳐 정보화의 시대라고 일컫는 요즘의 사회에 이르기까지는 사회 구조의 변화는 인간의 창조적인 활동의 산물인 과학기술의 뒷받침이 원동력이 되었으며, 과학기술 발전의 기저에는 수학과 과학분야에서 돋보이는 재능있는 사람들의 기여가 있었다. Willoughby(2000)는 '인류 역사와 함께 시작된 수학은 예전부터 현재에 이르기까지 사회발전에 중요한 역할을 해 왔으며, 그 역할은 이전보다 중요해졌고 미래에는 훨씬 더 중요하게 될 것'이라고 수학의 중요성을 강조하고 있다. 또 NCTM(2000)에서도 지금까지의 사회구조의 변천 과정에 비추어 볼 때, '정보화 시대'라고 일컫는 요즈음의 사회뿐만 아니라 앞의로의 사회는 점진적으로 과학기술이 지배하는 현상이 두드러질 것이며, 과학기술 및 사회 발전의 원동력인 수학분야에서 두드러진 재능을 가진 구성원들이 사회적 역할의 중심에 서게 될 것이라고 예견하고 있다. 이러한 사회적 변화와 요구에 부응하기 위한 학교수학의 역할은 모든 사람들에게 일정한 수준의 수학적 소양을 갖추도록 교육하는 일뿐만 아니라 수학분야에 재능을 가진 학생들의 잠재적 능력을 개발・육성하기 위한 의도적이고 계획적으로 학습 프로그램을 제공해야 할 것이다.

학교 교육의 중요한 목표 중의 하는 학습자 개개인이 타고 난 잠재된 자기 교육력을 자극하여 내적으로는 급속히 변화하는 미래 사회에 대처할 수 있는 자질과 능력을 기르며, 외적으로는 국가・사회 및 인류 발전에 기여할 수 있는 유능한 인재를 육성하는데 있다. 이러한 취지에서 우리나라에서도 영재교육진흥법의 제정(2000)과 그 시행(2002)이 공포됨에 따라 2005년 5월 현재 수학분야에서 영재교육을 받고 있는 초등학생 수는 약 6876명(전체학생의 약 0.17%)에 이르고 있으며, 2010년까지 전체 학생의 1%수준까지 영재교육을 확대할 계획인데 이는 현재 선진국에서는 일반적으로 전체 학생의 3-5%비해 매우 낮은 수준이다. 물론 영재교육을 보완・확대하기 위해 2010년까지 초・중・고생의 5%인 40만명을 대상으로 "수월성(준영재)교육"이 실시할 계획은 있으나 그 실현에 대해서 주목하여 대비할 필요가 있다.

현재 우리나라에서는 극소수의 영재교육을 받는 학생들에 대한 관심과 교육적 투자는 어느 정도 이루어지고 있으나 수학적으로 유망한 학생(*Promising Students*)[1]. 즉 잠재적으로 발달가능성이 있는 학생들에 대한 배려는 매우 미약한 실정이다. NCTM(1995)에서도 '수학적으로 유망한 학생들을 대한 과제(Task Force on Mathematically Promising Students)'라는 보고서(Sheffield, Bennett, Beriozabal, DeArmond, & Wertheimer, 1995)에서 수학영재에 대한 전통적인 정의(전체 학생 수의 3-5%)를 재고할 것을 지적하면서 수학분야에서 잠재적 발달 가능성을 지닌 학생들을 포함하는 보다 포괄적인 개념으로 확장할 것을 권고하고 있다(Sheffield.2003). 본고에서는 현재 영재교육 수혜자는 아니지만 앞으로 영재교육을 받을 잠재적 재능을 가진 학생. 또는 수학 영재에 준하는 수학적으로 유망성이 있는 학생들의 지도 방안과 프로그램에 대해서 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 수학적으로 유망한 학생들은 어떤 특성을 가지고 있는가?

수학적으로 유망한 학생 수를 계속적으로 늘여가려면 그러한 학생들을 입증할 수 있는 몇 가지 특성에 대해서 알 필요가 있다. Kruteski(1976)를 비롯한 많은 연구자들은 수학적 재능을 가진 학생들은 종종 어려서(7-8세)부터 수학적으로 사고하는 방식(frame of mind)이 엿보이며, 이후 점차 논리적으로 사고하고, 추상적인 것을 다룰 수 있으며, 수학적 상징(기호)을 통한 사고와 빠른 추론 및 익숙하지 않는 문제를 능숙하게 해결 할 수 있다고 주장하고 있다. 그리고 그들은 수학적인 창의성과 창의력을 가지고 있는 것은 사실이지만 일반적으로 생각하는 비범할 정도로 뛰어난 재능을 갖고 있는 것으로 오해하는 경향이 있는 데, 실제적으로는 다음의 몇 가지의 항목에서 평범한 학생들에 비해 약간의 차이점만 있는 경우가 대부분이다. 다음의 항목들은 수학적으로 유망한 학생들이 갖고 있는 일반적인 특성으로 수학적으로 유망한 학생들 확인하는 지표가 될 수 있을 것이다.

◆ 수학적 사고의 특성(Mathematical Frame of Mind)
- 다양한 상황에서 수학을 인식하고 이를 구조화할 수 있다.
- 규칙성을 빨리 인지하고, 확장하고 새로운 규칙성을 창조할 수 있다.
- 정보를 조직하고 기준에 따라 범주화할 수 있다.
- 간단한 수학적 개념에 대해 깊이 이해하며, 풍부한 수학적 감각을 가지고 있다.

◆ 형식화하고 일반화는 특성(Mathematical Formalization and Generalization)
- 몇 개의 사례로부터 문제의 구조를 일반화하고 형식화할 수 있다.
- 주어진 정보로부터 적절한 추론을 할 수 있으며, 이를 문제해결에 활용할 수 있다.

---

1) 수학적으로 유망성(잠재적 발달가능성)이 있는 학생(Mathematically Promising Students) : 수학적 분야에서 성공할 잠재적 가능성을 가지고 있는 학생으로, 미래사회에 지도자가 되어 창의적인 문제 해결자가 될 수 있는 학생(Sheffield. 2003에서 재인용)들로 정의하고 있다. 이 의도는 전통적으로 몇 개의 표준화된 수학 능력 검사에 근거한 상위 3~5%라고 정의되어졌던 수학적 영재아에 대한 개념의 범위를 확대한 것이다.

- ◆ 양과 공간의 관계에 대해 논리적이고 상징적(추상적)으로 생각할 수 있다.
- ◆ 적절한 증거와 다른 설득력 있는 주장(논쟁)을 할 수 있다.

◆ 수학적 창의력(Mathematical Creativity)

- ◆ 정보를 융통성 있게 처리한다. 즉 문제해결 과정과 결과를 다양하게 표현하고 전환하고 처리할 수 있다.
- ◆ 독창적인 문제 해결력을 가지고 있다. 즉 남다른 방법과 전략을 이용하여 문제를 해결하려고 한다.
- ◆ 주어진 유창하게 다룰 수 있다. 즉 정보를 다양하게 해석하고 표현하고 활용할 수 있다
- ◆ 주어진 정보나 추론 결과를 간결·명료하게 표현하고 설명할 수 있는 정교성을 가지고 있다.

◆ 수학적 호기심과 인내심

- ◆ 수학적인 연결성에 대한 호기심으로 "왜", "만약~라면"이란 질문을 자주 한다.
- ◆ 어려운 문제를 해결하기 위한 노력과 끈기가 있다.
- ◆ 문제의 표면적인 것을 넘어서서 깊이 탐구하며, 처음 문제를 푼 후에도 계속 탐구하려고 한다.

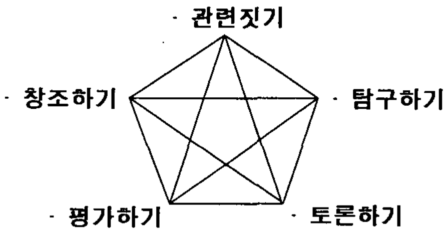
※ 그러나 다음과 같은 특성들은 수학수업에서는 유용할지도 모르나 수학적 유망성이 있는 학생들이 갖고 있는 특성이라고 할 수는 없다(sheffield, 2000에서 재인용).

◇ 계산의 정확성과 신속성. ◇ 공식과 사실의 기억력. ◇ 공간적 능력

Ⅲ. 수학적으로 유망성을 개발하기 위한 프로그램 모형

일반적으로 많은 학생들은 제시된 문제에 대해 단순히 답을 얻는데 만족하고 문제에 대해 좀더 발전적으로 생각하지 않으려는 경향이 있다. 이러한 방식은 수학적인 아이디어에 대해 깊게 생각하거나 새로운 개념이나 원리를 탐구하는데 흥미를 잃어버릴 가능성이 높다. 학생들은 주어진 문제를 해결했었을 때 즐거움을 느끼고 새로운 사실을 발견하도록 하기 위해서 문제를 탐구하는 방법을 배울 필요가 있다. 수학자들은 진정한 수학의 시작은 문제를 해결한 후부터 시작한다고 말하고 있다. 예컨대, 문제 해결 절차나 결과에 대해 왜 그렇게 되었는지를 반성·음미해 보고, 또다른 대안적인 알고리즘이나 전략을 구상해 보거나 문제 해결 경험을 확장·적용할 장면을 생각해 보는 등 문제 해결 이후에 활동이 수학적 유망성을 실현시키는 데 매우 중요하게 작용한다. 수학적으로 유망한 학생들을 위한 프로그램은 낮은 수준의 사고력이 요구되는 양적으로 풍부한 주제보다는 고차적인 사고력을 자극할 수 있는 질적으로 높은 수준의 주제를 다룸으로써 학생들은 도전 의식을 느끼게 할 필요가 있다. 즉 수학적으로 유망한 학생들에게는 속진학습을 통한 지식의 양적 증대도 필요하지만 심화학습을 통한 질적 증대에 더 초점을 둘 필요가 있다. 그것은 '간단한 것에 대해 깊이 생각하는 것이 복잡한 것에 대해 얕게 생각하는 것보다 더 가치가 있기 때문이다. 이들은 보통 수준의 학생들보다

추론력이나 창의적인 문제 해결력, 원리 · 법칙에 대한 일반화 · 형식화하는 능력 등 여러 가지 면에서 앞서기 때문이다. 학생들의 사고 수준을 고려하여 이전에 학습한 단순한 개념이나 원리 · 법칙으로부터 시작하여 점차 매우 복잡한 주제에 대해 탐구할 수 있는 경험과 기회를 제공함으로서 수학적 유망성은 발현될 것이다.



<그림 1> 개방형 접근법

수학적 유망성을 개발하기 위한 모델의 하나로 <그림 1>과 같은 개방형 접근법(Open-approach heuristic)모델을 제안한다. 이 모델에서 학생들은 과제를 해결하기 위한 5가지 활동 중 어디에서든 시작할 수 있으며, 창조적으로 문제를 탐구할 수 있도록 하기 위한 정해진 활동 절차는 없다. 즉, 새로운 과제를 해결하는 데 필요한 개념 및 원리 · 법칙과 전략에 대해 이전에 학습한 내용과 어떤 관련성이 있는지를 조사하고, 문제를 탐구 · 해결하고, 해결과정과 결과에 대해 토론 및 평가 · 반성하고, 새로운 장면으로 확장하거나 새로운 문제를 창조할 수 있도록 한다. 이를 좀더 자세히 살펴보면 다음과 같다.

◆ ***관련짓기 :*** 수학과 교육과정에서 제시하는 학습목표와 학습내용을 관련짓는 단계이다. 과제 탐구에 따른 정신적 부담을 최소화하고 과제에 대한 친밀감과 자신감을 갖도록 하기 위해 정규교육과정에서 다루는 내용과 연계성을 고려해야 하다. 그리고 프로그램 내용과 관련된 개념적 지식이나 절차적 지식에 대해서 살펴보아야 한다. 따라서 교과서나 익힘책에 제시되었던 유사한 유형의 문제를 살펴 볼 필요가 있다.

◆ ***탐구하기 :*** 학생의 수준에 따라 적절한 탐구과제를 선택하여 탐구할 수 있는데 자신이 이해하고 해결할 수 있는 과제부터 시작하여 점차적으로 고차적인 사고력과 기능이 요구되는 과제로 이행(移行)하도록 한다. 탐구활동은 그 목적이나 필요성에 따라 과정 지향성(process-oriented)프로그램[2], 내용 지향성(Content-oriented)프로그램[3], 결과물 지향성(Product-oriented)프로그램[4]으로 구성할 수 있는 데 속진보다는 심화에 더 초점을 둔 내용이다.

---

2) 고차적인 사고과정(higher mental processes)을 계발. 또는 세련된 창조적인 산출물을 개발하기 위해 설계된 프로그램이다. 예컨대, 창의적으로 문제를 해결하는 능력, 세련된 추론능력이나 논리적으로 사고하고 증명하는 능력, 예리한 관찰력이나 다양한 표현력 등이 있다. 본 프로그램은 산출물에 초점을 두기보다는 사고과정에 초점을 둔 것으로 다른 내용 영역이나 일상적인 상황의 문제해결에 전이 · 활용되지 않을 가능성을 배재할 수 없다.

3) 특별한 내용 영역의 원리 · 법칙의 이해와 표현을 심화하는 것을 의미한다. 일반적으로 교육과정에서 요구하는 수준보다 그 내용의 폭이나 깊이가 더 깊을 수 있다. 또 수학의 실용성과 관련된 문제해결 및 어떤 내용의 수학이 어떻게 활용되는 직접적으로 체험할 수 있는 내용을 구성한다.

4) 궁극적으로 사고 과정이나 수학적 내용보다는 결과나 학습 후의 창의적인 산출물에 초점을 둔 프로그램을 의미한다. 산출물로서는 이전에 학습한 내용을 통합적으로 적용하여 작성한 보고서나 논문, 수학적 지식을 활용한 작품이나 문제 해결 성과 등 결과를 확인할 수 있는 것일 수도 있고, 눈에 보이지 않는 것일 수도 있다.

◆ ***평가와 토론하기 :*** 이 부분은 학생들의 탐구과정이나 결과에 대해 아이디어를 공유하도록 안내하거나 탐구과정과 결과를 평가하는 데 필요한 정보를 제공한다. 학생들은 개별, 또는 소집단별로 탐구활동을 통하여 얻어진 결과와 그 과정에 대하여 토론하면서 자신의 주장에 대한 합리적인 근거를 제시(증명)할 수 있어야 한다. 이 과정에서 학생들은 비판적 사고력을 신장시킴과 동시에 새로운 탐구를 위한 소재 및 아이디어를 고안할 수 있는 계기를 만들어야 할 것이다. 또 학생들에게 더 깊은 사고를 장려하기 위해 다음과 같은 질문에 대해 토론하도록 할 수 있도록 진행해야 한다.

◇ 간단한 질문에 깊게 생각해 보기

- 자신의 생각을 어떻게 설계하고, 이를 어떻게 수행하였는가?
- 왜 그렇게 생각하고 수행했는가?
- 이전 풀었던 문제와 같은 점과 다른 점은 무엇인가?
- 문제 해결 전략이나 방법은 정확하며, 다른 해결 전략이나 방법은 없는가?
- 적용할 원리 · 법칙은 무엇이며, 발견한 규칙은 무엇인가?
- 답은 얼마쯤이라고 예상했는가?. 왜 그렇게 생각하는가?
- 다른 사람들의 해결 방법과 같은 점과 다른 점은 각각 무엇인가?
- 실제로 구한 답은 얼마인가?. 예상한 것과 일치하는가?
- 또다른 전략이나 방법으로 해결할 생각은 없는가?
- 자신이 얻는 결과를 확신하는가? 그리고 그것을 간결 · 명료하게 설명할 수 있는가?

◆ ***창조하기 :*** 주어진 과제를 해결한 후 이를 확장하고 보다 깊이 탐구할 수 있는 아이디어를 제공한다. 아울러 이미 해결한 경험을 바탕으로 보다 고차적이고 발전적인 사고를 할 수 있도록 새로운 문제를 창조할 수 있는 방향을 안내한다.

◇ 새로운 탐구 과제 만들기

- 해결한 문제에서 떠오르는 또다른 질문거리는 무엇인가?
- 문제의 일부 정보를 바꾼다면 어떻게 되겠는가?
- 문제의 일부 정보를 삭제하거나 첨가하면 어떻게 되겠는가?
- 해결한 문제를 다른 방법으로 해결할 수는 없는가?
- 알아낸 다른 규칙은 무엇인가?
- 만들어낸 법칙은 무엇인가? 이것은 항상 옳은가?
- 비슷한 방법으로 풀 수 있는 다른 문제는 어떤 것이 있는가?

Ⅳ. 수학적 유망성을 발현시키기 위한 과제의 성격

학생들을 유능한 문제 해결자가 되도록 하고, 창의적인 문제 출제자 혹은 새로운 수학을 창조할 수 있는 사람으로 육성하려면 흥미로운 탐구를 할 수 있는 다양한 기회를 제공해야 한다. 다음 몇 가지 항목은 이를 위한 과제의 성격에 대해서 살펴본다.

- 교사가 기대하는 것이 무엇인지를 단순히 추측하게 하는 질문할 것이 아니라 학생들이 생각할 수 있는 질문을 요구해야 한다.
- 학생들이 이전의 지식을 구조화하고, 이전에는 알지 못했던 원리와 개념들을 발견하고 깨닫게 할 수 있어야 한다.
- 학생들이 탐구하고, 이를 반영·확장하고, 그리고 관련된 새로운 영역으로 전이시킬 수 있도록 광범위하면서도 풍부한 기회를 제공해야 한다.
- 다양한 수준에 따라, 그리고 다양한 방법 —예컨대, 구두로, 기하학으로, 그래프로, 대수학으로, 숫자 등— 으로 증명할 수 있는 기회를 주어야만 한다.
- 학생 스스로 질문하고, 추론하고, 의사소통하고, 문제를 해결하고, 그리고 수학의 다른 영역뿐만 아니라 타교과 및 실생활 문제해결과 연결하는 데 그들의 능력을 사용할 수 있도록 해야 한다.
- 과제 해결을 위해서는 수학적 모델이나 조작교구뿐만 아니라 계산기와 컴퓨터 같은 기술공학의 적절한 사용이 허용해야 한다.
- 개인적인 탐구와 문제해결뿐만 아니라 집단별로 탐구하고 발견할 수 있는 기회를 제공해 주어야 한다.
- 과제는 흥미로워야 하고 학생들의 활동을 포함해야만 한다.
- 해에 이르는 길이나 정답은 유일한 것뿐만 아니라 다양한 해결방법이나 그에 따른 다양한 해가 존재하는 개방형 과제(Open-Task)이어야 한다.
- 해결했던 문제에 대해 계속해서 탐구하도록 장려해야 한다. 해결했던 문제는 또다른 장면의 문제해결로 전이가 이루어져야 하며, 여러 가지 또다른 해결 방법, 규칙성, 일반화, 그리고 관련성을 찾아냈는지 보도록 해야 한다.

Ⅴ. 프로그램 수행에 따른 평가

만약 학생들이 수학적 문제를 제기하고 수학의 창조자가 되기를 바란다면 전통적인 평가방법을 바꿔야만 한다. 수학적 능력은 객관식, 혹은 단답식 평가로는 측정할 수 없다. 평가의 궁극적인 목적은 수학적 능력을 향상시키고, 이들을 지도하기 위한 교수 정보를 얻는데 있으므로 수업과 평가는 통합되어야 하며, 따라서 학습 과정과 결과 모두에 대해 다양하면서도 지속적인 평가가 이루어져야 할 것이다. 또한 평가는 학생의 능력에 대한 평가뿐만 아니라 교수법이나 프로그램의 적절성, 그리고 학생의 수학적 능력에 대해 교사와 학생이 함께 참여하여 자기평가와 상호평가가 이루어져야 한다. 다음 표는 수학적 유망성이 있는 학생의 문제 해결력과 창의력을 평가할 수 있는 하나의 모델이 될 수 있을 것이다.

<표 1.1> 문제 설정과 창의성

평가 범주		점수 1	점수 2	점수 3	점수 4
이해력	교육과정과 관련된 핵심개념 및 원리·법칙의 이해정도	이해력이 약간 혹은 전혀 없음.	부분적으로 이해함; 사소한 수학적 오류 있음	좋은 이해력; 수학적으로 정확함	깊은 이해력; 잘 발달된 수학적 학생디어들
유창성	서로 다른 정답 수나 해결방법, 또는 새로운 질문	하나의 불완전하거나 쓸모없는 접근	최소한 하나의 적절한 접근 혹은 관련된 질문	최소한 두 가지의 적절한 접근 혹은 좋은 관련된 질문들	몇 개의 적절한 접근 혹은 새로운 관련된 질문들
융통성	수, 대수, 기하, 그래프와 같은 다양한 범주의 답의 수나 해결 방법, 또는 질문		동일한 방법을 사용한 모든 접근법 (예: 그래프, 대수 방정식 등)	최소한 2가지 방법의 해결책(예:기하, 그래프, 대수, 물리적인 모형화)	몇 개의 해결책 (예:기하, 그래프, 대수, 물리적인 모형화)
유창성	독특하고 통찰력을 보여주는 해결전략 및 방법, 또는 질문	방법은 다르지만 해결책에 도달하지 못함	해결책에 도달하는 방법이지만, 그저 그렇게 흔한 방법	흔하지 않음, 오직 소수의 학생들에 의해서 사용되어질 수 있는 방법	오직 한 명, 혹은 두 명의 학생에 의해서 사용되어지는 독특하고 통찰력 있는 방법
정교성	도표, 그래프, 그림, 모델, 그리고 간단·명료한 진술을 포함한 사고를 표현하는 질	주어진 설명이 짧거나 없음	설명이 이해할 수 있으나 몇 군데 불명확함	올바른 수학적 용어들을 사용한 명확한 설명	그래프, 도표, 모형 혹은 방정식을 능숙하게 사용한 명확하고, 간결, 정확한 설명
일반화	더 큰 범주에서 발견되고 가설되고, 입증 가능한 규칙성	일반화가 되지 않거나 또는 부정확하고 추론이 불명확함.	최소한 하나의 일반화가 만들어짐; 명확한 추론에 의해 잘 지지되지 않을 수 있음	최소한 하나의 일반화가 잘 만들어짐 혹은 하나 이상의 정답을 냈지만 일반화하기에는 부족.	몇 개의 잘 기반이 된 일반화들; 명확한 추론
확장	'왜', 그리고 '만약~라면'이 포함된 관련된 질문에 대한 탐구와 답	확장된 내용이 전혀 포함되지 않거나 수학적 확장이 전혀 없음	최소한 하나의 관련된 수학적 질문을 적절하게 탐구	하나의 관련된 질문을 깊이 있게 탐구 혹은 하나 이상의 질문들을 적절하게 탐구	하나 이상의 관련된 질문을 깊이 있게 탐구

Ⅵ. 수학적 유망성이 있는 학생을 지원하기 위한 교사들이 관심

(1) 수학적인 유망성을 갖고 있는 학생들이 많다는 사실을 믿어야 한다.

수학적으로 유망한 학생 수가 늘어나고, 또 그들의 수준이 향상되기를 바란다면 우선 많은 수의 학생들은 수학적 재능을 갖고 있으며, 적절한 자극이 주어진다면 그들의 재능은 발현될 수 있다는

믿음을 갖는 것이 필요하다. 물론 수학적 재능과 관련하여 유전적인 요인을 무시할 수는 없으나 교사의 입장에서는 수학적 능력은 선천적으로 타고나는 것이 아니라 후천적 노력에 의하여 개발되어진다는 사실을 인식할 필요가 있다. 또한 많은 학생들은 수학적으로 성공할 수 있는 잠재적 능력을 갖고 있다는 교사의 믿음과 그들의 재능을 인정하고 사고를 자극할 수 있는 도전적인 과제에 대해 의미있게 반응하는 동안 학생들의 잠재적 재능은 점차 발현될 것이다.

(2) 학습에 대한 동기를 부여해야 한다.

학습에서 동기는 학습의 성패를 좌우하는 가장 중요한 요인 중의 하나이다. 학습 동기는 학습의욕을 자극할 뿐 아니라 적극적이고 능동적인 학습활동의 자원이다. 동기는 스스로 만들어지는 것이 아니라 학습되는 것이다(Middleton and Spaias. 2002).라고 볼 때, 학습동기는 타고난 수학적 재능에 영향을 받기보다 교육환경에 영향을 받는다. 학습동기를 부여하기 위해서는 우선 소재 자체가 학생들의 흥미나 호기심을 불러일으킬 수 있어야 한다. 예컨대, 학생 개인 및 지역에 관련된 소재나 학생 및 지명을 이용한 문제 진술, 그리고 기네스북, 신문, 상품 안내서 등 일상의 경험과 연결시킬 수 있는 자료를 이용할 수 있다. 또한 동기는 학습에 대한 성공과 실패에 영향을 받으므로 학생들의 사고 수준과 균형을 이룰 수 있는 과제, 그리고 보상은 외적인 것(물질이나 경쟁심 등)보다 내적인 것(기쁨과 만족 등)이 학습동기를 더 자극할 수 있을 것이다.

(3) 수학의 중요성에 대한 믿음과 개개인이 성공할 수 있다는 신념을 가져야 한다.

학생들의 수학에 대한 인식 및 수학관 형성에 가장 강력한 영향을 미치는 사람은 교사이다. 특히 인지적 구조가 미분화의 상태에 있으며, 호기심 및 주위 환경의 자극에 민감한 초등학생들의 경우 교사가 갖는 수학관은 그들의 수학에 대한 정의적, 인지적 발달에 미치는 영향이 크다. 따라서 학생뿐만 아니라 교사와 학부모와 학생 등 수학을 왜 배워야 하는지를 진정으로 이해한다면 수학에 대한 부정적인 생각이나 현상은 훨씬 줄어들 것이다. 수학은 정치, 경제, 문화 등 사회의 모든 분야에서 문제를 해결하는 유용한 도구이며 수단이다. 뿐만 아니라 학습 과정에서 길러지는 수학적 사고력은 모든 문제를 조리있고 합리적으로 예측하고 처리할 수 있는 능력을 길러준다는 사실을 인식하게 되면 학생들은 자기의 잠재적 능력을 개발하기 위하여 노력할 것이다.

(4) 수학적 유망성을 개발할 수 있는 학습경험과 기회를 제공되어야 한다.

유망성을 개발할 수 있는 학습경험과 기회는 학생들의 사고를 자극할 수 있는 프로그램과 관련된다. 정규교육과정의 운영은 수학적 원리·법칙에 대한 최소한의 이해에 초점을 두고 있으며, 최근 국내의 영재교육 프로그램의 수혜자들은 극히 제한적이다. 결국 우리의 교육현실은 수학적으로 유망한 학생들(전체 학생의 상위 10-15%)을 위한 프로그램은 사실상 전혀 제공되지 못하고 있는 실정이다. 이들의 잠재적 발달 가능성을 발현시키기 위해서는 정규교육과정 및 그 수준에 준하여 내용에 기초를 두고, 이를 보다 심화학습 프로그램을 개발·제공할 필요가 있다. 발아하여 성장을 시작하는 식물에게 적절한 영양소를 공급하듯이 학생들의 사고 수준을 고려하여 적절한 갈등과 호기심과 사고를 자극하고 계속해서 수학을 탐구할 수 있는 프로그램이 제공되지 않는다면 그들의 수학적 유망성은

자연스럽게 퇴화되거나 소멸될 수 밖에 없을 것이다. 그리고 수학적으로 유망성이 있는 학생들을 위한 프로그램의 내용은 얕고 광범위한 사고를 요구하는 내용보다는 좁지만 깊은 사고가 요구되는 내용으로 구성되어야 할 것이다. 즉 양보다는 질적인 측면에 보다 많은 관심을 기울려야 할 것이다.

(5) 교사의 지시나 간섭을 최소화해야 할 것이다.

학습에서의 가장 기본적인 원리 중의 하나는 자율성과 능동성이다. 다른 사람의 생각에 의존하거나 획일적인 기준에 얽매임이 없이 학생 스스로 탐구하고 새로운 아이디어를 발견하여 문제를 해결하는 경험은 성취감과 함께 내발적 동기가 한층 높아질 것이다. 탐구활동 과정에서 교사의 지시나 간섭이 증가할수록 학생의 활동은 감소한다고 볼 때, 탐구활동의 주체자로써 학생이 문제를 의식하고 해결 전략을 고안하고 이를 실행하고, 반성·음미하는 문제해결 과정에서 교사의 역할은 촉진자와 보조자의 역할에 만족해야 한다. 아울러 수업 방식도 학습 제재에 따라 강의식, 토론식, 실험·실습, 세미나 등 다양한 교수 기법을 통해 학습 참여의욕을 높이도록 해야 할 것이다.

Ⅶ. 결 론

2002년 영재교육 시행령이 공포되면서 전국적으로 영재교육이 매우 활발히 이루어지고 있다. 지역에 따라 차이는 있겠으나 전체 학생 중에서 극히 일부 학생만이 교육의 혜택을 받고 있는 실정이다. 정확한 통계적 자료는 없으나 현재 교육 대상자 중에는 영재성이 있다고 확신할 수 없는 학생이 있는가 하면 영재성이 있을 것 같다고 예상되는 학생이 교육을 받지 못하는 경우도 있으리라 예상된다. 또 영재성은 가변적이기 때문에 비록 선발 당시에는 영재교육 대상자로 선발되지 못하였지만 수학분야에서 탁월한 재능을 발현시킬 수 있는 잠재적 발달 가능성을 가진 학생들이 있다는 사실은 부인할 수 없을 것이다. 교육 현장에서는 이러한 수학적으로 유망한 학생들에 대한 교육에 좀더 관심을 가질 필요가 있다.

(1) 주변에는 수학적으로 유망한 학생들이 많이 있으며, 보통 수준의 학생도 개별적 특성을 고려한 적절한 프로그램을 제공한다면 수학적 재능을 발휘할 수 있다는 믿음을 가질 필요가 있다.

(2) 수학적으로 유망성이 있는 학생들을 위한 프로그램 구성 및 운영 모델의 하나로 개방형 접근법(Open-approach heuristic)모델을 제안한다.

(3) 프로그램의 내용 구성은 학생들의 사고 수준이나 이전의 학습 경험과 양에 근거하여 구성해야 한다고 볼 때, 교육과정과의 관련성을 충분히 고려해야 할 것이다.

참 고 문 헌

남승인 (2002). 영재교육활성화 방안. 한국수학교육학회지 시리즈 F <수학교육 학술지> **Vol 7,** pp.75-88.

_____ (2002). 초등 수학영재아 지도를 위한 학습자료 개발. 한국수학교육학회지 시리즈 F <수학교육 학술지> Vol 7, pp.55-73.

California Assocation for the Gifted (1998). *The Challenge of Raising your Gifted Child.* 5777W. Century Blvd., Suite 1670

Middleton, J. A. & Spaias, A. S. (2002). *Findings from Reseacch on the Motivation in Mathematics Education; What Matters in Coming to Value Mathematics*, Lessons Learned from Research. NCTM

NCTM. (1987). *Providing Oppertunities for the Mathematically.* Gifted, K-12. NCTM.

Sheffield, L. J. (2000). *Extending the Challenge in Mathematics.* Corwin press, Inc

Willoughby, S. S. (2000). *Learning Mathematics for a new Century.* 2000 Yearbook. NCTM

수학적 유망성이 있는 학생을 위한 프로그램의 예

◆ 주제 : 얼마나 많은 방법이 있을까?

◆ **주제 설정 목적** : 본 주제는 한 수는 몇 개의 수로 합성·분해될 수 있음을 알게 함으로써 풍부한 수 감각과 유리수의 범위 안에서 연산에 대한 감각을 개발하고, 암산능력을 기르는 데 초점을 두고 있다. 또한 문제 해결을 위해 다양한 전략을 구상하고, 가설을 설정하고 이를 검증하는 기회를 통해 추론하는 능력과 자신의 전략이나 답의 정당성에 대해 이치에 맞고 조리있게 설명하는 기회를 통하여 논리적 사고력과 의사소통력을 기르며, 보다 발전적인 문제를 만들고 해결해 보는 경험과 기회를 통하여 창의적인 생각하는 힘을 기르는 데 있다.

◆ **주제 설정 배경** : 본 주제는 초등학교 수학교육의 핵심적인 내용인 동시에 가장 폭 넓게 다루는 수와 연산과 관련된 주제로서 수렴적 사고를 요구하는 교과서나 익힘책의 한계를 극복하는 데 있다. 예컨대 3+4=□, 5+□=8, □+⅓=1과 같은 유일한 답을 요구하거나 '한 수를 두 수의 합으로 나타내시오.'와 같은 한정된 범위의 답을 요구하는 수렴적 사고를 넘어서서 한 수를 몇 개의 수로 분해하거나 몇 개의 수를 합성하여 하나의 수를 만드는 경험을 통하여 확산적 사고와 수 감각을 풍부하게 할 필요가 있다.

◆ **교육과정과 관련성**

◆ 제 7차 수학과 교육과정	◆ 수학적 개념 및 절차	◆ 교과서 및 익힘책 문제 유형
·수의 합성과 분해(1-가) ·자리값의 원리를 이해(1-가,···, 4-나) ·자연수의 덧셈과 뺄셈(1-가,···, 4-나) ·유리수의 덧셈과 뺄셈(4-가,···, 5-가)	·십진기수법의 개념과 자리값의 원리 ·자연수의 덧셈과 뺄셈 원리 ·분수의 개념 및 성질 ·약수와 배수, 공약수와 공배수 ·약분과 통분, ·분수의 덧셈과 뺄셈 원리	·7+3 = □ ·47 = 십이 □, 일이 □인 수 ·$\frac{1}{2}$+□=$\frac{3}{4}$

저학년 수준

◆ **활동 주제** : 자리값의 개념을 이해하기

◆ **활동 목적** : 자리값의 개념을 알고, 수 감각과 암산력을 발달시킨다.

◆ **준비물** : 동전이나 모의화폐. 활동지

◆ **활동안내** : 동전이나 모의화폐 등을 이용하여 자리값의 개념을 명확히 하고, 동전을 교환하는 활동을 통하여 받아올림과 받아내림의 원리를 명확히 이해하도록 한다. 아울러 한 수는 다른 두 수의 합이나 다른 두 수로 분해됨을 통해 수 감각과 암산능력을 기르도록 한다.

[활동 1] (1) 10원짜리와 1원짜리 동전을 이용하여 21원을 만들어 보자.

·십원짜리 __(개) + 일원짜리 ___(개) =21(원)

(2) 두 가지 동전을 이용하여 또다른 방법으로 21(원)이 되도록 해 보자.

십원짜리 __(개) + 일원짜리 ___(개) =21(원)

(3) 두 가지 동전을 이용하여 여러 가지 방법으로 21(원)이 되도록 목록표를 만들어 보자.

[활동 2] 다음 표에 두 종류위 동전의 합이 56원이 되도록 알맞은 수를 써 넣어라.

10원짜리	1원짜리	합
5	6	56

(1) 합이 56원이 되는 서로 다른 방법을 몇 가지인가?
(2) 합이 57원이 되는 서로 다른 방법을 예상해 보자
① 모두 몇 가지라고 예상할 수 있는가?
② 스스로 표로 나타내고, 그것이 정확한지 확인하라.
(3) 합이 92원이 되는 서로 다른 방법을 예상해 보자.
① 모두 몇 가지라고 예상할 수 있는가?
② 스스로 표로 나타내고, 그것이 정확한지 확인하라.

[활동 3] 위 문제를 해결한 후, 탐구하고 싶은 새로운 문제를 2개를 만들어 보아라.
(1) 답은 얼마라고 예상하는가?
(2) 자신의 예상이 정확하다면 친구들과 함께 확인해 보아라.

◆ 토론과 평가하기(참고 사항)

본 탐구는 십의 자리와 일의 자리의 자리값의 개념을 강화하기 위해 동전을 사용한다. 십의 자리와 일의 자리에 동전의 수를 표로 나타내고, 이를 다시 추상적인 수로 나타내는 것은 십진법에서 자리값의 개념을 명확히 하는 활동이다. 이 활동에서 학생들은 10원짜리 동전의 수가 1개씩 증가하거나 감소함에 따라 1원짜리 동전의 수는 어떻게 변하며, 그 역으로 1원짜리 동전의 수가 몇 개를 단위로 변할 때 10원짜리 동전의 수는 몇 개씩 변하는지에 대해 토론하도록 한다. 이 단계의 활동은 이 전 단계의 활동이 많은 도움을 줄 것이다. 예컨대, 10원짜리와 1원짜리로 56원을 만드는 방법의 수를 찾는 학생들은 10원짜리 동전의 수를 가능한 수인 가장 작은 수 0개나 가장 큰 수 5개로 시작하는 것이 가장 쉽다는 것을 발견할 것이다. 만일 10원짜리 동전 5개와 1원짜리 동전 6개에서 시작한 학생은 10원짜리 동전 1개를 1원짜리 동전 10개와 바꾸고, 다음은 차례대로 10원짜리 동전의 수가 4개, 3개, 2개, 1개, 0개로 변함에 따라 1원짜리 동전의 수는 16개, 26개, …, 56개로 변하는 것을 발견할 것이다. 이 활동에서 학생들은 교환할 수 있는 가능성의 수는 10원짜리 동전 수보다 1가지가 더 많은 6가지임을 알 것이다.

◆ 창조하기(참고 사항)

학생들은 10과 99사이의 수를 사용하여 교환할 수 있는 수를 발견하면 더 큰 수에 대해서 동일한 원리를 적용해 보고싶은 것은 자연스러운 일이다. 수가 100을 넘으면 학생들은 100원짜리 동전을 사용하는 것을 포함시켜야 한다고 제안할지도 모른다. 만약 교사가 100원짜리 동전, 10원짜리 동전, 1원짜리 동전을 사용하여 123을 만들 수 있는 가짓수를 알기를 원한다면 먼저 총 16가지 가능성에 대해서 100원짜리 동전을 사용할 경우, 10원짜리 동전 2개, 1개, 0개를 사용하여 3가지 방법이 있고, 오직 10원짜리 동전과 1원짜리 동전을 사용하는 경우는 1원짜리 동전을 12개, 11개, 10개,…, 3개, 2개, 1개, 0개를 사용하는 13가지 방법이 있다. 일반적으로 100과 199사이의 어떤 수에 대한 가능성의 수는 10원짜리 동전의 수(100원짜리 동전을 사용)보다 1더 큰 수에 10을 더하기 총 12가지에 대한 10원짜리 동전의 수(100원짜리 동전 사용 안함)보다 1 더 큰 수 더하기 10원짜리 동전 수의 수 2배를 더한 값이다. 학생들은 다양한 방법에서 이러한 일반화를 찾고 더 큰 금액으로 계속하길 원한다. 이러한 활동은 딘즈가 고안한 십진수블럭을 이용하여 탐구할 수도 있을 것이다.

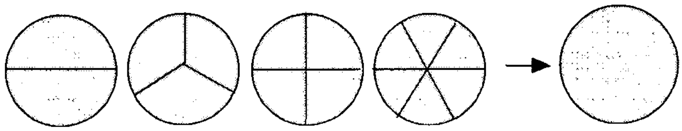
고학년 수준

◆ **활동 주제** : 단위분수의 합으로 수 1 만들기

◆ **활동 목적** : 두 수 이상의 단위분수를 합하여 1을 만드는 활동을 통하여 수 감각과 암산력을 발달시킨다.

◆ **준비물** : 분수 막대 및 분수 모형

◆ **활동안내** : 구체적 조작을 통하여 <그림 2>의 단위분수 모형을 이용하여 1을 만드는 과정에서 사고의 유창성과 분수에 대한 수 감각 및 암산능력을 기르도록 한다.



<그림 2>

[활동 1] $\frac{1}{2}$모형과 $\frac{1}{4}$모형을 여러 가지 방법으로 결합하여 합이 1이 되도록 해 봅시다. 그리고 이것을 식으로 나타내어 봅시다.

____________. ____________. ____________. ____________.

[활동 2] $\frac{1}{2}$ 모형, $\frac{1}{3}$ 모형, $\frac{1}{4}$ 모형, $\frac{1}{6}$ 모형을 여러 가지 방법으로 결합하여 합이 1이 되도록 해 봅시다

(1) 그 방법을 다음 표에 나타내어 봅시다.

(2) 합이 1이 되도록 하는 서로 다른 방법을 몇 가지 찾아냈는가? ________

(3) 또, $\frac{1}{8}$ 모형을 포함하여 여러 가지 방법으로 결합하여 합이 1이 되도록 다음 표에 나타내어 봅시다.

(4) 합이 1이 되도록 하는 서로 다른 방법을 몇 가지 찾아냈는가? ________

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	합
2	0	0	0	1

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	합
2	0	0	0	1	

[활동 3] 위 문제를 해결한 후, 탐구하고 싶은 새로운 문제를 2개를 만들어 보아라.

(1) 답은 얼마라고 예상하는가?

(2) 자신의 예상이 정확하다면 친구들과 함께 확인해 보아라.

◆ 토론과 평가하기(참고 사항)

만약 학생들이 가능한 모든 결합을 발견했다면, 표는 학생들의 생각과 결정을 일목요연하게 정리하는 데 도움을 줄 것이다. 학생들에게 1을 만들기 위해 알아야 할 개념적 지식과 절차적 지식에는 어떤 것이 있는지에 대해 토론하도록 한다. 예컨대, 공배수와 최소공배수, 동치분수, 공통분모와 통분 등의 개념을 명확히 정의하도록

하는 일, 공배수와 최소공배수 구하는 방법, 분수의 성질 및 동치분수를 만드는 방법, 통분하는 방법, 분수의 덧셈 원리 등 절차에 대해서 서로의 방법에 대해 정보를 교류하도록 한다. 그리고 정답을 보다 빠르고 정확하게 구하기 위한 방법에 대해서도 토의하도록 할 필요가 있다. 많은 학생들은 모든 분수의 공통분모를 12로 하는 것이 유용하다는 것을 발견할 것이다.

<표 2.1>

1/2	1/3	1/4	1/6	합계
2	0	0	0	1
1	1	0	1	1
1	0	2	0	1
0	3	0	0	1
0	2	0	2	1
....				
0	0	2	3	1
0	0	0	6	1

◆ 창조하기(참고 사항)

학생들이 연구하길 원하는 가장 공통된 질문 중 하나는 추가적인 분수 조각을 더하거나 원하는 합을 바꿈으로써 영향을 받는 가능한 결합의 수는 얼마나 되는가?이다. 원래의 표에 ⅛을 더한 가능성의 수는 원래의 모든 대답을 유지하고 <표 2.2>에서 제시된 답보다 더 여러 가지가 나올 것이다. 이 과제는 학생들이 연구하기 위해 새로운 질문을 찾아내기 때문에 오랫동안 계속될 수 있었다. 이 연구를 완성한 학생들은 분수, 공통분모, 등치 분수의 명명, 분수의 덧셈과 뺄셈에 매우 강한 감각을 갖게 될 것이다. 이런 방법으로 학생들은 다양한 풀이 방법을 평가하는 것을 발달시키고 문제에 대한 그들의 생각을 확장시킨다. 이러한 활동은 또한 정보를 구성하고 해석하고, 규칙을 찾고, 추측을 공식화하고, 결과로부터 일반화를 만드는 등의 학생들의 능력을 발전시키기 위해 설계되었다. 이러한 능력들은 수학적 요소들을 통해 수학적 힘의 발달을 도울 것이다.

<표 2.2>

1/2	1/3	1/4	1/6	1/8	합
2	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	0	2	0	0	1
1	0	1	0	2	1
1	0	0	0	4	1
....					
0	0	0	3	4	1
0	0	0	0	8	1