韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 19집 제3호. 2005. 9. 471-484

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 19 No 3, Sep. 2005. 471-484

삼각형판과 사각형판의 무게중심에 관한 연구

한 인 기 (경상대학교)

무게중심에 관련된 연구는 수학과 물리, 수학과 공학 분야에서 폭넓은 활용을 가지는 간학문적 접근의 한 예이며, 실생활에서의 경험을 수학적 개념 및 방법에 관련시킬 수 있는 흥미로운 영역이라 할 수 있다. 본 연구에서는 문헌연구를 통해 균일한 다각형판의 무게중심 개념을 소개하고, 삼각형판과 볼록사각형판의 무게중심의 위치 및 성질을 조사하고, 이를 확장하여 볼록n각형판에서 무게중심의 위치를 탐구하였다.

1. 서 론

제 7차 수학과 교육과정(교육부, 1998, p.29)에 수학교육의 목표들 중의 하나로 '수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결할 수 있다'는 것을 규정하여, 실제 생활이나 다른 학문 영역의 현상들에 대한 수학적 해석 및 수학적 탐구 활동을 강조하고 있다. 특히, 한국교육개발원(2000)에서는 수학과 영재교육과정 시안 개발의 기본 방향을 기술하면서 다양한 학문영역들 사이의 통합적/간학문적 접근이 가능한 교육과정 개발을 강조하였다. 결국, 수학과 정규 교육과정, 수학 영재교육을 위한 교육과정 모두에서 실생활의 문제상황을 다양한 관점에서 분석하고, 수학과 다른 학문 영역 사이의 관련성을 탐구하며, 간학문적인 통합적 접근을 통한 문제해결 능력의 계발 및 육성하는 것이 강조되고 있음을 알 수 있다.

무게중심에 관련된 연구는 수학과 물리, 수학과 공학 분야에서 폭넓은 활용을 가지는 간학문적 접근의 중요한 부분이며, 실생활에서 다양한 실제적인 예를 수학적 개념 및 방법에 관련시킬 수 있는 흥미로운 영역이라 할 수 있다. 특히, 수학사에서 보면, 아르키메데스는 무게중심의 개념을 이용하여 구의 부피를 구하였는데, 이것은 수학적 사실의 발명이라는 측면에서 뿐만 아니라, 공학의 개념을 수학 문제해결에 적용하여 수학 연구의 방법을 풍부하게 했다.

무게중심에 관련된 국내의 수학교육학 연구를 분석하면, 첫째 삼각형의 무게중심에 대한 다양한 증명 및 확장에 관한 연구(한인기・강인주, 2000; 한인기, 2001, 2002; 에르든예프・한인기, 2005; 한인기・신현용, 2002; 한인기・김기수, 2004; 김기수, 2005), 둘째 도형의 꼭지점에 놓인 질량점들의 무게중심에 관련된 연구(한인기, 2003, 2005)를 들 수 있다. 첫 번째 방향의 연구에서는 수학교과서에 제시된 삼각형의 무게중심에 대한 정리의 다양한 증명방법이 제시되었으며, 닮음 및 벡터의 개념을 이용하여 삼각형의 무게중심을 확장하여 볼록n각형의 무게중심을 탐구하였다. 두 번째 방향의 연구에서는 도형의 꼭지점에 놓인 질량점들에 대한 무게중심을 지렛대의 원리를 이용하여 탐구하였다. 이

들 연구에서는 삼각형의 중선, 무게중심을 확장시켜 도형의 다양한 성질들을 밝히고, 중등학교 수학교육에서 활용할 수 있는 심화학습 자료를 제공하였다는 측면에서 교육적인 의미를 둘 수 있을 것이다. 그런데, 실생활에서 쉽게 접할 수 있는 다각형 모양의 균일한 판의 무게중심에 대한 연구는 없었다.

본 연구에서는 문헌연구를 통해 균일한 다각형판의 무게중심 개념을 소개하고, 삼각형판과 볼록사각형판의 무게중심의 위치 및 성질을 조사하고, 이를 확장하여 볼록n각형판에서 무게중심의 위치를 탐구할 것이다. 이를 통해, 중등학교의 심화학습에 활용할 수 있는 도형의 다양한 무게중심에 대한 교수-학습 자료를 개발하고, 주변에서 흔히 접할 수 있는 균일한 다각형판에 대한 수학적 분석 및 탐구를 위한 기초를 제공할 것이다.

2. 다각형판의 무게중심

다각형판의 무게중심이 가지는 실제적인 의미는 다각형 판의 무게중심 M을 실에 묶어서 매달면, 다각형판이 균형을 이루는 것이다. Balk(1959)는 균일한 판의 무게중심에 대해, 다음과 같은 성질을 증명하지 않고 약속으로 규정하였다.

(1) 각각의 판은 유일한 무게중심을 가진다.

(2) 만약, 판을 유한 개의 조각들로 분할하고 이들 조각 각각의 무게가 무게중심에 집중된다고 하면, 각 조각의 무게중심과 각 조각의 무게에 의해 얻어진 질량점들의 무게중심은 전체 판의 무게중심이다.

(3) 만약, 판에 대칭축이 존재하면, 판의 무게중심은 대칭축에 속한다.

두 번째 성질의 의미를 좀더 자세히 살펴보자. 판을 유한개의 조각 F_1, F_2, $\cdots$, F_n으로 분할하고, 이들 조각의 넓이를 각각 S_1, S_2, $\cdots$, S_n이라 하자. 한 변이 단위선분인 정사각형판의 무게를 δ라 하면, 조각들 각각의 무게는 $S_1\delta$, $S_2\delta$, $\cdots$, $S_n\delta$이다. 이제, 이들 각 조각의 무게중심을 M_1, M_2, $\cdots$, M_n이라 하고, 조각의 무게가 무게중심에 집중된다고 하자. 그러면, 주어진 판에서 n개의 질량점 $(M_1, S_1\delta)$, $(M_2, S_2\delta)$, $\cdots$, $(M_n, S_n\delta)$을 얻게 되는데, 두 번째 성질은 이들 질량점의 무게중심이 처음의 판의 무게중심이 된다는 것을 의미한다. 결국, 두 번째 성질에 의해, 균일한 다각형판의 무게중심에 대한 탐구를 질량점들의 무게중심의 문제로 귀착시킬 수 있다.

한편, 세 번째 성질로부터 정다각형판의 무게중심의 위치를 쉽게 찾을 수 있는데, 정다각형판의 무게중심은 정다각형의 중심이 된다. 특히, 세 번째 성질로부터 직사각형판의 무게중심은 대변의 중점을 연결한 선분들의 교점이며, 마름모판의 무게중심은 대각선의 교점임을 쉽게 알 수 있다.

3. 삼각형판의 무게중심

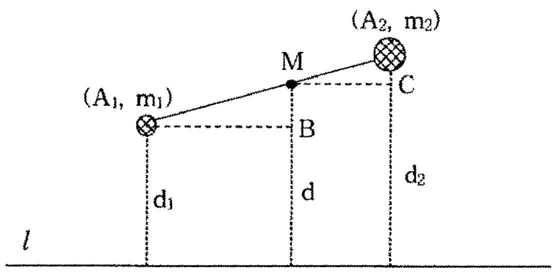
삼각형의 무게중심은 중학교 기하영역에서 다루는 삼각형의 중요한 성질들 중의 하나이다. 중학교 수학교과서에서는 삼각형의 무게중심에 관한 정리를 닮음을 이용하여 증명하고 있다. 그러나, 평면도형인 삼각형의 무게중심이 균일한 삼각형판의 무게중심인지, 삼각형의 각 꼭지점에 일정한 무게를 놓아 얻어진 세 질량점의 무게중심인지는 명확하게 기술되어 있지 않다. 이제, 삼각형판의 무게중심과 꼭지점에 놓인 세 질량점의 무게중심이 일치한다는 것을 살펴보자. 이를 위해, 무게중심에 관련된 몇몇 성질을 증명하자.

성질 1. 반직선에 질량점 (A_1, m_1), (A_2, m_2)이 시작점으로부터 각각 d_1, d_2만큼 떨어진 위치에 놓여있다. 이들 두 질량점의 무게중심 M은 반직선의 시작점으로부터 $\frac{m_1d_1+m_2d_2}{m_1+m_2}$만큼 떨어진 위치에 있다.

증명. 가령, $d_1<d_2$라 하고, 반직선의 시작점 O로부터 무게중심 M까지의 거리를 d라 하자. 그러면, 지렛대의 원리에 의해, $m_1:m_2=MA_2:MA_1$이다. 이로부터, $m_1:m_2=(d_2-d):(d-d_1)$이고, $d=\frac{m_1d_1+m_2d_2}{m_1+m_2}$임이 유도된다. □

성질 2. 두 질량점 (A_1, m_1), (A_2, m_2)이 직선 l의 같은쪽에 각각 d_1, d_2만큼 떨어져 놓여있다. 두 질량점의 무게중심 M은 직선 l로부터 $\frac{m_1d_1+m_2d_2}{m_1+m_2}$만큼 떨어진 위치에 있다.

증명. $d_1=d_2$인 경우와 $d_1<d_2$인 경우로 나누어 살펴보자. 우선, $d_1=d_2$이면, $d=d_1=d_2$이므로, $d=\frac{m_1d_1+m_2d_2}{m_1+m_2}$이 성립한다. 이제, $d_1<d_2$인 경우를 살펴보자(그림 1).



<그림 1>

점 A_1, M을 각각 지나며 l에 평행한 선분 A_1B, MC를 작도하면, 닮음인 삼각형 A_1BM, MCA_2를 얻을 수 있다. 이들 삼각형의 닮음으로부터 $A_1M:MA_2=MB:A_2C$가 성립한다. 한편, $MB=d-d_1$, $A_2C=d_2-d$이므로, $A_1M:MA_2=(d-d_1):(d_2-d)$가 성립한다. 그리고, 지렛대의 원리에 의해, $A_1M:MA_2=m_2:m_1$이다. 결국, $m_2:m_1=(d-d_1):(d_2-d)$을 얻을 수 있다. 얻어진 식을 정리하면, $d=\dfrac{m_1d_1+m_2d_2}{m_1+m_2}$임이 증명된다. 한편, 두 질량점 (A_1, m_1), (A_2, m_2)이 직선 l에 속하는 경우는 성질 1에서 이미 증명되었다. □

성질 3. 세 질량점 (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3)이 직선 l의 같은쪽에 각각 d_1, d_2, d_3만큼 떨어져 놓여있다. 세 질량점의 무게중심 M은 직선 l로부터 $\dfrac{m_1d_1+m_2d_2+m_3d_3}{m_1+m_2+m_3}$만큼 떨어진 위치에 있다.

증명. 세 질량점 (A_1, m_1), (A_2, m_2), (A_3, m_3)의 무게중심은 두 질량점 (A_1, m_1), (A_2, m_2)의 무게중심 M_1과 (A_3, m_3)의 무게중심과 일치한다. 이때, 무게중심 M_1에는 무게 (m_1+m_2)가 놓이게 된다. 우선, 두 질량점 (A_1, m_1), (A_2, m_2)의 무게중심 M_1으로부터 l까지의 거리 x를 구하자. 성질 2에 의해, $x=\dfrac{m_1d_1+m_2d_2}{m_1+m_2}$이다. 이제, (M_1, m_1+m_2)과 질량점 (A_3, m_3)의 무게중심 M으로부터 l까지의 거리 d를 구하자. 성질 2에 의해, $d=\dfrac{(m_1+m_2)x+m_3d_3}{(m_1+m_2)+m_3}$이다. 이제, $x=\dfrac{m_1d_1+m_2d_2}{m_1+m_2}$을 대입하면, $d=\dfrac{m_1d_1+m_2d_2+m_3d_3}{m_1+m_2+m_3}$임이 증명된다. □

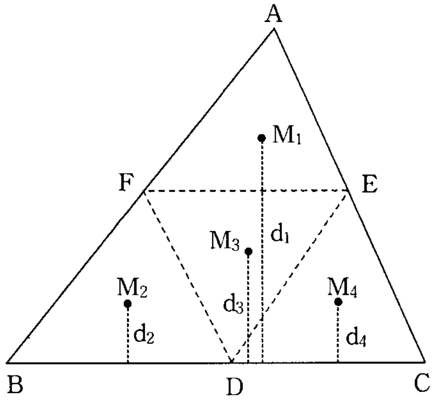
이제, 성질 3을 n개의 질량점 (A_1, m_1), (A_2, m_2), …, (A_n, m_n)이 직선 l의 같은쪽에 각각 d_1, d_2, …, d_n만큼 떨어져 있는 경우로 일반화시킬 수 있다. 성질 3에서와 같은 방법으로, n개의 질량점 (A_1, m_1), (A_2, m_2), …, (A_n, m_n)의 무게중심 M은 직선 l로부터 $\dfrac{m_1d_1+m_2d_2+\cdots+m_nd_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$만큼 떨어진 위치에 놓여있음을 알 수 있다.

한인기(2003)는 삼각형의 각 꼭지점에 균일한 무게를 놓아 얻어진 세 질량점의 무게중심이 중학교 수학교과서에 제시된 삼각형의 무게중심과 일치함을 보였다. 이제, 삼각형판의 무게중심이 수학교과서에 제시된 삼각형의 무게중심과 일치함을 증명하자.

성질 4. 삼각형판 ABC의 무게중심 M으로부터 변 BC까지의 거리를 d_a, 변 BC에 내린 높이를 h_A라 하면, $d_a:h_A=1:3$이다.

증명. 삼각형판 ABC의 무게중심 M으로부터 변 BC까지의 거리 d_a는 ABC를 조각들로 분할한 다

음, 이들 조각의 무게중심 및 무게중심에 집중된 무게를 이용하여 구할 수 있다. 이를 위해, 삼각형판 ABC의 각 변의 중점 D, E, F를 연결하여 서로 닮음인 네 개의 삼각형판을 만들고, 이들의 무게중심을 각각 M_1, M_2, M_3, M_4이라 하자(그림 2).



<그림 2>

이제, 이들 무게중심에 집중된 무게를 m_1, m_2, m_3, m_4라 하고, 이들 무게중심에서 변 BC까지의 거리를 d_1, d_2, d_3, d_4라 하자. 그런데, 삼각형판 ABC와 조각들은 닮음이며 닮음비가 2:1이므로, 삼각형판 ABC의 무게를 S라 하면, $m_1=m_2=m_3=m_4=\frac{1}{4}S$가 된다. 그러므로, $m_1+m_2+m_3+m_4=S$인 것과 성질 3을 이용하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$d_a=\frac{\frac{1}{4}Sd_1+\frac{1}{4}Sd_2+\frac{1}{4}Sd_3+\frac{1}{4}Sd_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}=\frac{d_1+d_2+d_3+d_4}{4}.$$

한편, 삼각형판 ABC와 FBD, EDC, AFE, DEF는 닮음이고, 닮음비가 2:1이다. 그러므로, 삼각형판 FBD, EDC의 무게중심 M_2, M_4로부터 변 BC까지의 거리는 $\frac{1}{2}d_a$이다. 그리고, 점 M_1으로부터 변 FE까지의 거리가 $\frac{1}{2}d_a$이므로, 점 M_1에서 변 BC까지의 거리는 $\frac{1}{2}d_a+\frac{1}{2}h_A$가 된다. 한편, 점 M_3에서 변 BC까지의 거리는 $\frac{1}{2}h_A-\frac{1}{2}d_a$이다. 이로부터, 다음을 얻을 수 있다.

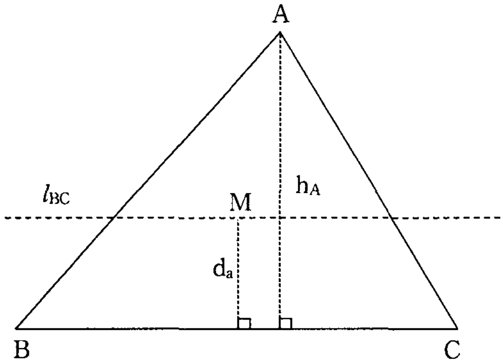
$$d_a=\frac{(\frac{1}{2}d_a+\frac{1}{2}h_A)+\frac{1}{2}d_a+(\frac{1}{2}h_A-\frac{1}{2}d_a)+\frac{1}{2}d_a}{4}=\frac{d_a+h_A}{4}.$$

얻어진 식을 정리하면, $3d_a=h_A$를 얻을 수 있다. □

성질 4와 같은 방법으로, 삼각형판 ABC의 무게중심 M으로부터 변 AC, AB까지의 거리를 d_b, d_c, 이들 변에 내린 높이를 h_B, h_C라 하면, d_b: h_B=1:3, d_c: h_C=1:3임을 알 있다. 즉, 삼각형판 ABC의 무게중심 M에서 각 변까지의 거리는 이들 변에 그은 높이의 $\frac{1}{3}$이다.

성질 5. 삼각형판의 무게중심은 삼각형의 무게중심과 일치한다.

증명[1]. 성질 4에 의해 d_a: h_A=1:3이므로, 삼각형판 ABC의 무게중심 M은 변 BC와 평행하며 $\frac{1}{3}h_A$만큼 떨어진 직선 l_{BC}에 속한다(그림 3). 그런데, 삼각형 ABC의 무게중심 G는 중선을 2:1로 나누므로, 삼각형 ABC의 무게중심도 직선 l_{BC}에 속한다.



<그림 3>

한편, d_b: h_B=1:3, d_c: h_C=1:3이므로, 삼각형판 ABC의 무게중심 M은 변 AC, AB와 각각 평행하며 $\frac{1}{3}h_B$, $\frac{1}{3}h_C$만큼 떨어진 직선 l_{AC}, l_{AB}에 각각 속한다. 그리고, 삼각형 ABC의 무게중심 G도 직선 l_{AC}, l_{AB}에 각각 속한다. 결국, 삼각형 ABC의 무게중심 G는 직선 l_{BC}, l_{AC}, l_{AB}의 교점이다.

한편, 삼각형판 ABC의 무게중심 M은 유일하므로, 무게중심 M은 직선 l_{BC}, l_{AC}, l_{AB}의 교점이 되며, 삼각형 ABC의 무게중심 G와 일치한다. □

살펴본 바와 같이, 삼각형판의 무게중심과 삼각형 꼭지점에서의 질량점들의 무게중심은 중학교 수학교과서에 닮음을 이용하여 증명된 삼각형의 무게중심과 일치한다. 그러므로, n각형판을 삼각형판들로 분할하여 삼각형에서 무게중심의 성질을 이용하면, n각형판의 무게중심을 다양하게 탐구할 수 있다. 삼각형에서 두 무게중심이 일치한다는 사실은 n각형으로 일반화되지는 못한다. 예를 들어, 사다리꼴판의 무게중심과 사다리꼴 꼭지점에서의 질량점들의 무게중심은 일치하지 않는다.

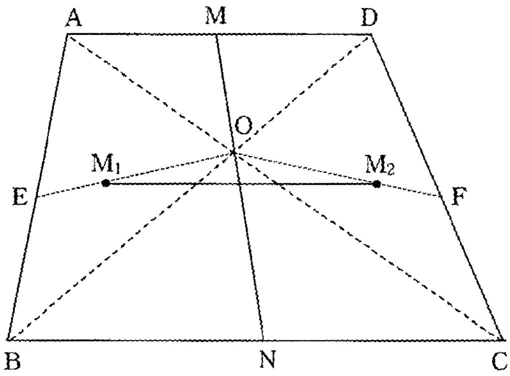
4. 사다리꼴판에서 무게중심

성질 6. 사다리꼴판의 무게중심은 두 밑변의 중점을 연결한 선분에 속한다.

1) 성질 5의 증명은 Balk(1959)에 제시되어 있는 아이디어를 바탕으로 구성하였음.

증명. 사다리꼴판 ABCD에서 두 밑변의 중점 M, N을 잡아 선분 MN을 작도하고, 대각선 AC, BD로 네 개의 삼각형판으로 분할하자(그림 4). 이때, 사다리꼴의 두 밑변의 중점을 연결한 선분은 대각선의 교점을 지난다[2]. 이제, 선분 OM은 삼각형 OAD의 중선이므로, 삼각형판 OAD의 무게중심은 OM에 속한다. 같은 이유로, 삼각형판 OBC의 무게중심도 선분 ON에 속한다.

이제, 삼각형판 OAB, ODC의 무게중심 M_1, M_2에 대해 생각하자. 점 M_1과 M_2는 삼각형판 OAB, ODC의 중선 OE, OF에 각각 속한다. 성질 6을 증명하기 위해, M_1과 M_2의 무게중심이 선분 MN에 속한다는 것을 보이면 된다.



<그림 4>

삼각형 OAB와 ODC의 넓이는 무게중심 M_1과 M_2에 같은 무게가 집중된다. 그러므로, M_1과 M_2의 무게중심이 선분 MN에 속한다는 것을 보이려면, 선분 M_1M_2의 중점이 선분 MN에 속함을 보이면 된다.

점 E, F는 각각 사다리꼴의 변 AB, CD의 중점이므로, 선분 EF는 밑변 AD, BC와 평행이며, 그 길이는 두 밑변의 합의 절반과 같다. 이제, 선분 EF와 MN의 교점을 Q라 하고, 사다리꼴 ABNM, MNCD를 보자. 선분 EQ는 선분 AM, BN의 합의 절반과 같고, QF는 선분 MD, NC의 합의 절반과 같다. 그런데, 선분 AM와 MD는 같고, 선분 BN와 NC는 같으므로, 선분 EQ와 QF는 같다.

한편, $OM_1: M_1E=OM_2:M_2F$이므로, 삼각형 OM_1M_2와 OEF는 닮음이고, 선분 EQ와 QF가 같다는 것으로부터 선분 M_1M_2의 중점이 선분 OQ에 속한다는 것을 알 수 있다. □

성질 7. 사다리꼴에서 사다리꼴판의 무게중심, 사다리꼴의 꼭지점에 놓인 질량점들의 무게중심은 밑변의 중점을 연결한 선분에 속한다.

2) <그림 4>에서 삼각형 ONB와 OMD가 닮음이고, 삼각형 ONC와 OMA가 닮음이다. 그리고, 점 N이 중점이므로, 선분 AD의 중점 M은 ON의 연장선에 속한다.

증명. 사다리꼴 ABCD의 각 꼭지점에서 질량점 (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)을 생각하자. 그리고, 선분 AD, BC를 사다리꼴의 밑변이라 하자. 이때, 질량점 (A, 1)과 (D, 1)의 무게중심은 선분 AD의 중점이고, 질량점 (B, 1)과 (C, 1)의 무게중심은 선분 BC의 중점이다. 결국, 사다리꼴 ABCD의 각 꼭지점에서의 질량점들의 무게중심은 사다리꼴의 밑변의 중점을 연결한 선분에 속한다. 그리고, 성질 6에 의해, 사다리꼴판 ABCD의 무게중심도 밑변의 중점을 연결한 선분에 속한다. □

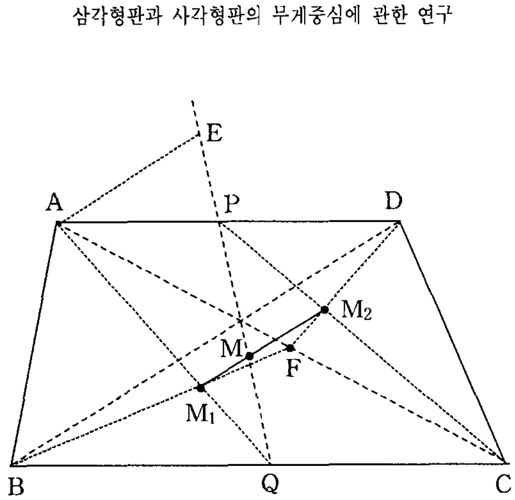
성질 8. 평행사변형판, 직사각형판, 정사각형판, 마름모판의 무게중심은 대변의 중점을 연결한 선분들의 교점이다.

증명. 성질 6으로부터, 사다리꼴판의 무게중심은 평행한 대변의 중점을 연결한 선분에 속한다는 것을 알 수 있다. 평행사변형은 사다리꼴이므로, 평행사변형판의 무게중심은 평행한 대변의 중점을 연결한 선분에 속한다. 평행사변형판에는 그러한 대변이 두 쌍 존재한다. 그런데, 평행사변형판의 무게중심은 유일하므로, 두 쌍의 평행한 대변의 중점을 연결한 선분들의 교점이 평행사변형판의 무게중심이 된다. 직사각형판, 정사각형판, 마름모판도 같은 방법으로 생각할 수 있다. □

성질 7, 8로부터, 평행사변형판, 직사각형편, 정사각형판, 마름모판의 무게중심은 이들 도형의 각 꼭지점에 균일한 무게를 놓아 얻어진 질량점들의 무게중심과 일치함을 알 수 있다. 그러나, 사다리꼴에서는 이러한 성질이 성립되지 않는다. 이를 자세히 살펴보자.

성질 9. 사다리꼴판 ABCD에서 밑변 AD, BC의 중점을 P, Q이라 하고, 대각선 BD와 평행하며 직선 PQ과 점 E에서 교차하는 선분 AE를 작도하자. 그러면, 사다리꼴판 ABCD의 무게중심 M에 대해 3QM=QE이 성립한다.

증명. 사다리꼴판 ABCD를 대각선 AC에 의해 두 삼각형판으로 나누고, 이들 삼각형판의 무게중심, 성질 6을 이용하여 사다리꼴판의 무게중심 위치를 찾자. 삼각형판 ABC의 무게중심을 M_1, 삼각형판 ACD의 무게중심을 M_2라 하자. M_1과 M_2의 위치를 정하기 위해, 대각선 AC의 중점 F를 잡자(그림 5). 그러면, 선분 M_1M_2와 선분 PQ의 교점이 사다리꼴판 ABCD의 무게중심 M이 된다.



<그림 5>

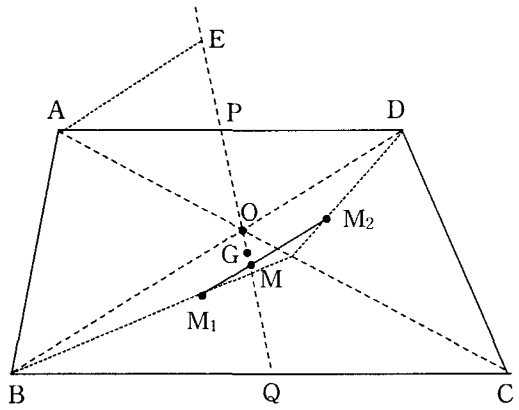
이제, QM:QE=1:3임을 보이자. 이를 위해, $QM_1:QA=1:3$이므로, 선분 M_1M_2가 AE 또는 BD와 평행하다는 것을 보이면 된다. 삼각형 FM_1M_2와 삼각형 FBD를 보자. 이들 삼각형에서 $FM_1:FD=FM_2:FD=1:3$이므로, 닮음이고, 선분 M_1M_2는 선분 BD와 평행이 된다. 이로부터, 성질이 증명된다. □

사다리꼴판의 무게중심은 유일하며, 선분 QE에서 3QM=QE인 점도 유일하므로, 성질 9의 역인 '3QM=QE인 점 M은 사다리꼴판의 무게중심이다'가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

성질 10. 사다리꼴 ABCD에서 사다리꼴판의 무게중심을 M, 사다리꼴의 꼭지점들에서 질량점들의 무게중심을 G, 대각선의 교점을 O라 하자. 그러면, OG=3MG이다.

증명. 사다리꼴 ABCD의 밑변 AD, BC의 중점 P, Q를 연결하는 선분을 긋자. 편의상 AD<BC인 경우를 증명하자. 이제, 사다리꼴의 질량점들의 무게중심은 선분 PQ의 중점이므로, PG=GQ인 점 G를 잡자. 그리고, 대각선의 교점 O를 표시하자(그림 6).

이제, 점 M의 위치를 결정하자. 성질 9에 의해, $QM=\frac{1}{3}QE=\frac{1}{3}(QP+PE)$이다. 이때, 삼각형 PAE와 PDO가 합동이므로, PE=PO이고, $QM=\frac{1}{3}(QP+OP)$가 된다. <그림 6>에서 $OP < \frac{1}{2}PQ$이므로, $QM < \frac{1}{3}(QP+\frac{1}{2}PQ)$이다. 이때, $\frac{1}{3}(QP+\frac{1}{2}PQ)$을 계산하면, $\frac{1}{3}(QP+\frac{1}{2}PQ)=\frac{1}{2}PQ$이다. 그러므로, $QM < \frac{1}{2}PQ(=QG)$이다. 결국, 선분 QP에 점 M, G, O은 Q-M-G-O-P와 같은 순서로 놓이게 된다(그림 6).



<그림 6>

한편, $GM = GQ - MQ = \frac{1}{2}PQ - \frac{1}{3}(QP + OP)$이다. 그러므로, $3GM = \frac{1}{2}PQ - OP$이다. 이때, $\frac{1}{2}PQ = GP$이므로, $3GM = \frac{1}{2}PQ - OP = OG$가 증명된다. □

살펴본 바와 같이, 사다리꼴에서는 각 꼭지점에 균일한 무게를 놓아 얻어진 질량점들의 무게중심 G와 사다리꼴판의 무게중심 M은 일치하지 않는다. 특히, 성질 10의 결과를 통해, 사다리꼴에서 이들 무게중심의 위치 사이의 관계를 알 수 있다.

5. 볼록다각형판에서 무게중심의 위치

(1) 볼록사각형판의 무게중심

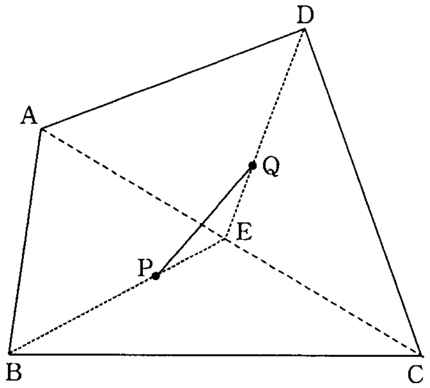
볼록사각형판을 삼각형판들로 분할하면, 볼록사각형판의 무게중심의 위치를 결정할 수 있다. 이를 결정하는 몇 가지 방법을 살펴보자.

방법 1. 볼록사각형판 ABCD에서 무게중심의 위치를 결정하기 위해, 볼록사각형판 ABCD를 대각선 AC로 분할하여 삼각형판 ABC, ACD를 얻었다고 하자(그림 7). 삼각형판 ABC, ACD의 무게중심은 중선 BE, DE를 각각 2:1로 나누는 점 P, Q이므로, 사각형판 ABCD의 무게중심은 선분 PQ에 속한다.

한편, 삼각형 ABC, ACD의 넓이를 각각 S_1, S_2, 한 변이 단위선분인 정사각형판의 무게를 δ라 하면, 삼각형 ABC의 무게는 $S_1\delta$, 삼각형 ACD의 무게는 $S_2\delta$가 된다. 변 BC로부터 점 P, Q까지의 거리를 d_1, d_2라 하면, 성질 2에 의해 사각형판 ABCD의 무게중심인 질량점 $(P, S_1\delta)$, $(Q, S_2\delta)$의 무

게중심은 변 BC로부터 $d=\frac{S_1\delta d_1+S_2\delta d_2}{S_1\delta+S_2\delta}=\frac{S_1d_1+S_2d_2}{S_1+S_2}$ 만큼 떨어져 있게 된다.

결국, 변 BC로부터 d만큼 떨어진 직선과 선분 PQ의 교점 M이 볼록사각형판 ABCD의 무게중심이 된다.



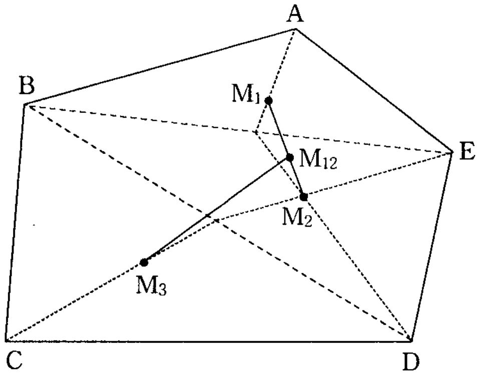
<그림 7>

방법 2. 볼록사각형판의 무게중심 M, 질량점 (P, $S_1\delta$), (Q, $S_2\delta$)에 지렛대의 원리를 사용하면, MP:MQ= $S_2\delta$: $S_1\delta=S_2:S_1$이 성립한다. 그러므로, 선분 PQ를 $S_2:S_1$로 분할하는 점 M이 볼록사각형판의 무게중심이 된다.

방법 3. 볼록사각형판의 대각선 BD를 그으면, 삼각형 ABD, BCD를 얻게 된다. 이들 삼각형의 무게중심을 P_1, Q_1이라 하면, 선분 P_1Q_1과 선분 PQ의 교점 M이 볼록사각형판의 무게중심이다.

(2) 볼록n각형판의 무게중심

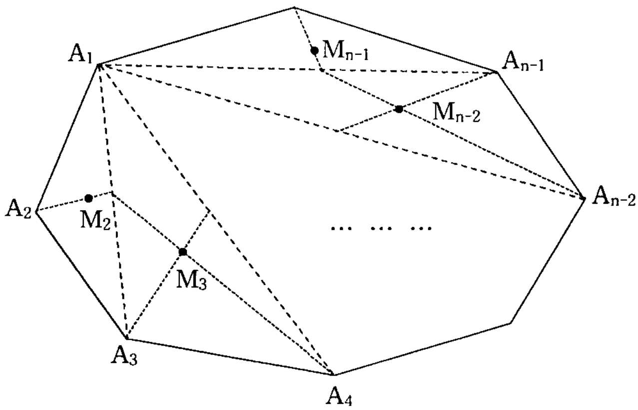
볼록오각형판 ABCDE를 대각선 BD, BE를 이용하여 삼각형판 ABE, BDE, BCD로 나누자. 삼각형 ABE, BDE, BCD의 무게중심을 각각 M_1, M_2, M_3라 하고, 이들의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3라 하자(그림 8). 그러면, 질량점 (M_1, $S_1\delta$), (M_2, $S_2\delta$), (M_3, $S_3\delta$)를 얻게 되며, 이들 점의 무게중심을 구하면, 볼록오각형판의 무게중심을 찾을 수 있다. 이를 위해, 선분 M_1M_2를 $S_2:S_1$으로 나누는 점 M_{12}를 잡으면, M_{12}는 사각형판 ABDE의 무게중심이고, ($S_1\delta+S_2\delta$)의 무게가 집중된다. 이제, 질량점 (M_3, $S_3\delta$), (M_{12}, $S_1\delta+S_2\delta$)의 무게중심 M을 구하면, M이 볼록오각형판 ABCDE의 무게중심이 된다. 이러한 점 M은 선분 M_3M_{12}를 $M_3:M_{12}=(S_1+S_2):S_3$으로 나누는 점이다.



<그림 8>

볼록오각형판의 무게중심을 다른 방법으로, 볼록사각형에서와 같이 M_1, M_2, M_3로부터 선분 CD까지의 거리 d_1, d_2, d_3를 이용하자. 볼록오각형의 무게중심 M으로부터 선분 CD까지의 거리 d를 구할 수 있다. 이제, CD로부터 d만큼 떨어진 직선과 선분 M_3M_{12}의 교점 M을 구하면, 점 M이 볼록오각형판의 무게중심이 된다.

이제, 볼록n각형판 $A_1A_2\cdots A_n$에서 무게중심의 위치를 결정하자. 이를 위해, 대각선 A_1A_3, A_1A_4, $\cdots$, A_1A_{n-1}을 작도하면, 삼각형판 $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_5$, $\cdots$, $A_1A_{n-1}A_n$을 얻는다(그림 9). 이들 삼각형판의 무게중심을 각각 M_2, M_3, $\cdots$, M_{n-1}이라 하고, 넓이를 S_2, S_3, $\cdots$, S_{n-1}이라 하자. 그러면, (n-2)개의 질량점 $(M_2,\ S_2\delta)$, $(M_3,\ S_3\delta)$, $(M_4,\ S_4\delta)$, $\cdots$, $(M_{n-1},\ S_{n-1}\delta)$을 얻게 된다. 이들 질량점의 무게중심 M을 구하면, 점 M은 볼록n각형판의 무게중심이 된다.



<그림 9>

6. 결 론

무게중심에 관련된 연구는 수학과 물리, 수학과 공학 분야에서 폭넓은 활용을 가지는 간학문적 접근의 중요한 부분이며, 실생활에서 다양한 상황을 수학적 개념 및 방법을 이용하여 해석할 수 있는 흥미로운 영역이라 할 수 있다. 특히, 수학사에서 보면, 아르키메데스는 무게중심의 개념을 이용하여 구의 부피를 구하였는데, 이것은 수학적 사실의 발명이라는 측면에서 뿐만 아니라, 공학의 개념을 수학 문제해결에 적용하여 수학 연구의 방법을 풍부하게 했다.

본 연구에서는 문헌연구를 통해 균일한 다각형판의 무게중심 개념을 소개하고, 삼각형판과 볼록사각형판의 무게중심의 위치 및 성질을 조사하고, 이를 확장하여 볼록n각형판에서 무게중심의 위치를 탐구하였다.

다각형판의 무게중심에 대해서는 Balk의 연구를 바탕으로, ① 각각의 판은 유일한 무게중심을 가진다; ② 판을 유한 개의 조각들로 분할하고 이들 조각의 무게가 무게중심에 집중되면, 얻어진 질량점들의 무게중심이 전체 판의 무게중심이 된다; ③ 판에 대칭축이 존재하면, 판의 무게중심은 대칭축에 속한다는 것을 증명없이 사용하였다. 본 연구에서는 삼각형판의 무게중심은 삼각형의 무게중심과 일치한다는 증명을 Balk의 아이디어를 이용하여 제시하였다. 특히, 삼각형의 무게중심은 삼각형의 각 꼭지점에 균일한 무게를 놓아 얻어진 질량점들의 무게중심과 일치하므로, 삼각형에서 삼각형판의 무게중심, 삼각형의 꼭지점들의 질량점은 중학교 수학교과서에 제시된 무게중심과 모두 일치한다.

한편, 평행사변형판, 직사각형판, 정사각형판, 마름모판의 무게중심은 이들 도형의 각 꼭지점에 균일한 무게를 놓아 얻어진 질량점들의 무게중심과 일치하지만, 사다리꼴에서는 이러한 성질은 성립하지 않았다. 특히, 밑변이 AD, BC(AD<BC)인 사다리꼴 ABCD에서 질량점들의 무게중심을 G, 대각선의 교점을 O, 사다리꼴판 ABCD의 무게중심을 M이라 하면, 밑변의 AD, BC의 중점 P, Q에 대해 Q-M-G-O-P의 순서로 놓인다.

볼록n각형판 $A_1A_2\cdots A_n$의 무게중심은 대각선을 작도하여 얻어진 삼각형판 $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_5$, $\cdots$, $A_1A_{n-1}A_n$의 무게중심 M_2, M_3, $\cdots$, M_{n-1}와 넓이 S_2, S_3, $\cdots$, S_{n-1}에 의한 질량점 $(M_2, S_2\delta)$, $(M_3, S_3\delta)$, $(M_4, S_4\delta)$, $\cdots$, $(M_{n-1}, S_{n-1}\delta)$의 무게중심 M을 구하여 위치를 결정할 수 있다.

본 연구의 결과는 중등학교의 심화학습에 활용할 수 있는 도형의 다양한 무게중심에 대한 교수-학습 자료를 제공하고, 주변에서 흔히 접할 수 있는 균일한 다각형판에 대한 수학적 분석 및 탐구를 위한 기초를 제공할 것이다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

김기수 (2005). 벡터를 이용한 중선에 관한 정리 탐구 및 비교, 경상대학교 석사학위논문.

에르든예프 · 한인기 (2005). 유추를 통한 수학탐구, 서울: 승산.

한국교육개발원 (2000). 영재교육과정 개발 연구[II], 서울: 장서원.

한인기 (2001). 유추를 활용한 무게중심 탐구에 관한 연구, 경상대학교 교육연구원 중등교육연구 **13**, pp.205-217.

한인기 (2002). 벡터를 이용한 삼각형의 무게중심에 관한 정리 증명에 관련된 탐구 능력 추출, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **13**, pp.305-316.

한인기 (2003). 수학 문제해결에서 아르키메데스의 공학적 방법에 관한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **17**, pp.115-126.

한인기 (2005). 교사를 위한 수학사, 서울: 교우사.

한인기 · 강인주 (2000). 삼각형의 무게중심에 관한 다양한 증명들과 수학교육적 의의, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **10**, pp.143-154.

한인기 · 김기수 (2004). 벡터를 활용한 볼록다각형의 무게중심 탐구, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **18(2)**, pp.289-294.

한인기 · 신현용 (2002). 삼각형의 접기 활동과 논증의 연계 가능성에 관한 연구, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **41(1)**, pp.79-90.

Balk M.B. (1959). *Geometricheskie prilozeniya ponyatiya o tsentre tyazesti*, Moskva: Fizmatgiz.