

## 백그라운드 제거후 신호의 세기에 대하여 ON THE BACKGROUND-SUBTRACTED INTENSITY

선광일  
한국천문연구원

KWANG-IL SEON

Korea Astronomy and Space Science Institute, 61-1 Hwaam, Yusong, Taejon 305-348, Korea

E-mail: kiseon@kasi.re.kr

(Received November 15, 2005; Accepted December 19, 2005)

### ABSTRACT

When we measure a source signal in the presence of a background rate that has been independently measured, the usual approach is to obtain an estimate of the background rate by observing an empty part of the sky, and an estimate of the source signal plus background rate by observing the region where a source signal is expected. The source signal rate is then estimated by subtracting the background rate from the source signal plus background rate. However, when the rates or their observation times are small, this procedure can lead to negative estimates of the source signal rate, even when it should produce a positive value. By applying the Bayesian approach, we solve the problem and prove that the most probable value of source signal rate is zero when the observed total count is smaller than the expected background counts. It is also shown that the results from the conventional method is consistent with the most probable value obtained from the Bayesian approach when the source signal is large or the observation time is long enough.

*key words:* methods: data analysis — methods: statistical

### 1. 서론

우리는 천문학뿐만 아니라 대부분의 과학실험에서 어떤 광원(source)의 세기를 측정할 때 거의 항상 백그라운드(background)도 함께 포함하고 있는 신호를 측정하게 된다. 광원의 세기(source intensity) 또는 광원의 계수율(source count rate)을 구하는 전통적인 방법은 광원과 함께 백그라운드도 포함하고 있는 영역(편의를 위해 “백그라운드+광원”으로 표시하기로 한다)과 백그라운드만을 포함하는 영역을 따로 관측하고, “백그라운드+광원”의 신호 세기에서 백그라운드의 세기를 빼줌으로써 광원의 세기를 계산하는 것이다. 그러나, 광원 세기의 참값(true value)이 백그라운드의 세기와 비슷하거나 작다면 광원 세기의 추정값이 음수로 나오는 경우가 자주 발생한다. 특히, X-선 및 감마선 천문학 관측에서는 광원의 세기가 미약하여 광자의 계수(count)가 포아송 분포 (Poisson distribution)를 따르는 0 이상의 정수 값만을 갖을 수 있다. 이와 같은 경우 전통적인 방법을 따르게 되면 물리적으로 불가능한 광원의 세기를 얻게 될 수 있다. 또한, 광원의 세기에 대한 상한값(upper limit) 또는 신뢰구간(confidence limit)의 계산에도 오류가 생기게 된다.

이러한 문제점을 해결하기 위해 가우스(Gaussian) 분포함수를 사용하지 않고 포아송 분포함수로 부터 직접 상한값 및 신뢰구간을 구하기위한 연구가 진행되어 왔다. 천문관측과 관련된 연구를 예로 든다면 Gehrels (1986)은 백그라운드가 없을 때 광원의 세기에 대한 상한값 및 신뢰구간에 대한 연구를 수행하였다. Feldman & Cousins (1998)은 고에너지 입자물리와 관련하여 연구를 수행하였다. Kraft, Burrow, & Nousek (1991)은 백그라운드 세기의 참값을 정확히 알고 있다는 가정하에 상한값과 신뢰구간을 구하였다. 특히, 그들은 일반적으로 받아들여지고 있는 빈도주의 (frequentist) 또는 고전적 (classical) 접근 방법과 베이지안 (Bayesian) 접근 방법을 비교함으로써 미약한 신호를 연구할 때 베이지안 접근 방법을 이용하는 것이 유리함을 보였다. Loredo (1990, 1992)는 백그라운드의 세기와 “백그라운드+광원”의 세기를 독립적인 관측을 통해 얻었지만 백그라운드 세기의 참값을 알지 못 할 때, 광원의 세기를 추정하는 방법에 대해 베이지안 접근 방법을 통해 기술하였다.

베이지안 방법을 이용하면 “백그라운드+광원” 세기의 측정값이 백그라운드 세기의 측정값보다 작을 때

도 음수는 나올 수 없다는 것은 자명하다. 따라서 광원 세기의 추정값은 0 이어야 한다는 것은 직관적으로 당연해 보인다. 베이저안 방법을 통해 광원 세기를 추론함에 있어서 가장 잦은 값 (most probable value) 또는 사후 확률분포함수의 평균값을 고려할 수 있다. 5절에서 보게 되겠지만 사후 확률분포함수의 평균값을 이용하여 광원 세기의 추정값을 얻게 되면 전통적인 방법으로 광원 세기를 계산한 방법과 불일치를 보이며, 또한 신호의 세기가 미약할 때는 물리적으로 적합하지 않은 결론에 도달하게 된다. 따라서 사후 확률분포함수의 평균값 대신 가장 잦은 값을 이용하여 광원 세기를 추론하는 것이 합리적으로 보인다. 그러나, 광원 세기의 가장 잦은 값 (most probable value)이 0 이어야 한다는 것은 증명되지 않았으며 직관만으로는 0 보다 큰 값이 될 수도 있다는 것을 완전히 배제할 수는 없다. 광원 세기의 가장 잦은 값이 0 이어야 한다는 것은 사후 확률분포함수 (posterior probability distribution function)로 부터 알 수 있다. 또한, 광원의 세기가 음수일 수 없다는 사실로 부터 직관적으로도 당연해 보인다. 하지만 모든 가능한 경우에 사후 확률분포함수를 그려본다는 것은 불가능하며, 직관이 옳다는 보장이 없으므로 엄밀한 의미에서 증명하는 것은 의미있는 일이다. 이 논문에서는 두 가지 경우로 나누어서 이러한 경우 광원의 세기를 0으로 추정해야 한다는 것을 보였다. 또한, 몇가지 예를 통하여 베이저안 방법으로 구한 결과와 전통적인 방법으로 구한 결과가 차이를 보인다는 것을 보였다.

## 2. 기호 정의

이 연구에서는 일반적으로 잘 알려져있는 빈도주의 접근 방법을 사용하지 않고 베이저안 방법을 적용한다. 베이저안 접근 방법에 대한 전통적인 설명은 Sivia (1996)와 D'Agostini (2003)에 자세하게 기술되어 있다. 또한, 베이저안 접근 방법의 장점은 Kraft, Burrows, & Nousek (1991)과 Loredó (1990, 1992) 등에 자세하게 설명되어 있으므로 베이저안 방법 자체에 대한 내용은 생략한다. 이 절에서는 이 논문에서 사용하게 될 기호를 정의하고 서론에서 제기된 문제점이 발생하는 이유를 예를 통하여 살펴본다.

백그라운드만을 따로 측정했을 때의 관측시간을  $T_b$ 라고 표시하고 “백그라운드+광원”을 관측한 시간을  $T_t$ 라고 표현하기로 한다. 백그라운드와 광원의 세기 또는 계수율 (count rate)의 참값(true value 또는 true count rate)은 각각  $\mu_b$ 와  $\mu_s$  (counts/s)라고 나타내기로 한다. 백그라운드와 광원의 측정값 또는 각각의 확률분포함수를 따르는 난수(random number)를 각각  $N_b$ 와  $N_s$  (계수, count)로 표시한다. 여기서 주의할 점은 기호  $N$ 은 관측 또는 측정된 광자의 갯수인 계

수를 나타내는 변수이고  $\mu$ 는 시간당 계수율을 표현하는 변수라는 점이다. 즉, 이 논문에서는 다소 번거롭지만 계수율의 참값( $\mu$ )에 관측시간( $T$ )을 곱한 값과 측정값( $N$ )을 비교하도록 한다. 이 논문에서는 백그라운드 관측을 위해 사용한 개구(aperture)의 크기 (또는 시야각의 크기)와 “백그라운드+광원” 관측을 위해 사용한 개구의 크기가 달라서 생기는 효과는 무시하였지만, 개구의 크기가 서로 다른 경우에도 개구의 크기에 의한 효과를 관측시간에 포함시킴으로서 어렵지 않게 동일한 분석을 수행할 수 있다. 이 경우는 관측시간  $T$ 는 s·sr의 단위를 갖게 될 것이며 계수율의 참값( $\mu$ )은 단위 시간당, 단위 개구의 크기당 계수 (counts/s/sr)의 단위를 갖게 된다. 개구의 크기외의 다른 요인에 의해 차이가 생길 때에도 동일한 방식으로 해결할 수 있다. 즉, 관측 시간의 차이에 의한 효과만을 고려해도 일반성을 잃지 않기 때문에 다른 요인들에 의한 효과는 고려하지 않도록 한다.

계수율의 참값이  $\mu_s$ 인 광원으로 부터 측정되는 광자의 계수  $N_s$ 는 아래의 포아송 분포를 만족한다.

$$P(N_s|\mu_s) = \frac{(\mu_s T_s)^{N_s} e^{-\mu_s T_s}}{N_s!} \quad (1)$$

여기서  $P(N_s|\mu_s)$ 는 원칙적으로  $P(N_s|\mu_s, I)$  또는  $P(N_s|\mu_s, I)$ 로 표현해야 옳지만 많은 경우에 배경정보(background information)  $I$ 는 생략하고 표시하기도 하므로, 이 논문에서는 모든 확률분포에 대해 배경정보에 대한 기호를 생략하기로 한다. 이때,  $I$ 는 관측시간에 대한 정보 및 확률분포함수의 모양이 포아송 분포이어야 한다는 등의 기본적인 가정들을 포함하는 배경정보이며,  $P(N_s|\mu_s)$ 는  $\mu_s$ 와 배경정보  $I$ 가 주어졌을 때  $N_s$ 의 확률을 의미한다.

계수율의 참값과 관측시간의 곱(즉, 계수의 참값)이 매우 클 때 포아송 분포함수는 가우스 분포함수로 접근한다. 가우스 분포함수를 이용할 때는 베이저안 접근 방법으로 얻어진 결과와 전통적인 빈도주의 방법을 이용하여 얻은 결과가 동일하다는 것이 잘 알려져있다 (D'Agostini 2003; Loredó 1990, 1992). 그러나, 포아송 분포함수로 처리를 해야하는 경우는 전통적인 방법을 적용할 수 없으므로 이 논문에서는 포아송 분포함수로 처리해야 하는 경우만을 다루기로 한다.

실제 관측에서는 항상 백그라운드가 포함되어 있어서 “백그라운드+광원” 세기의 관측값  $N_t$ 는 알 수 있지만 백그라운드 및 광원 세기의 확률적인 무작위성(randomness)에 의해  $N_t$ 에  $N_b$ 와  $N_s$  값이 각각 얼마만큼 포함되어 있는지는 알 수 없다. “백그라운드+광원”의 계수  $N_t$ 가 만족하는 분포함수  $P(N_t|\mu_t)$ 는 서로 독립인 두 개의 포아송 분포의 합이므로 식 (1)에서 첨자  $s$  대신  $t$ 를 대입하여 얻어진다. 이때,  $\mu_t \equiv$

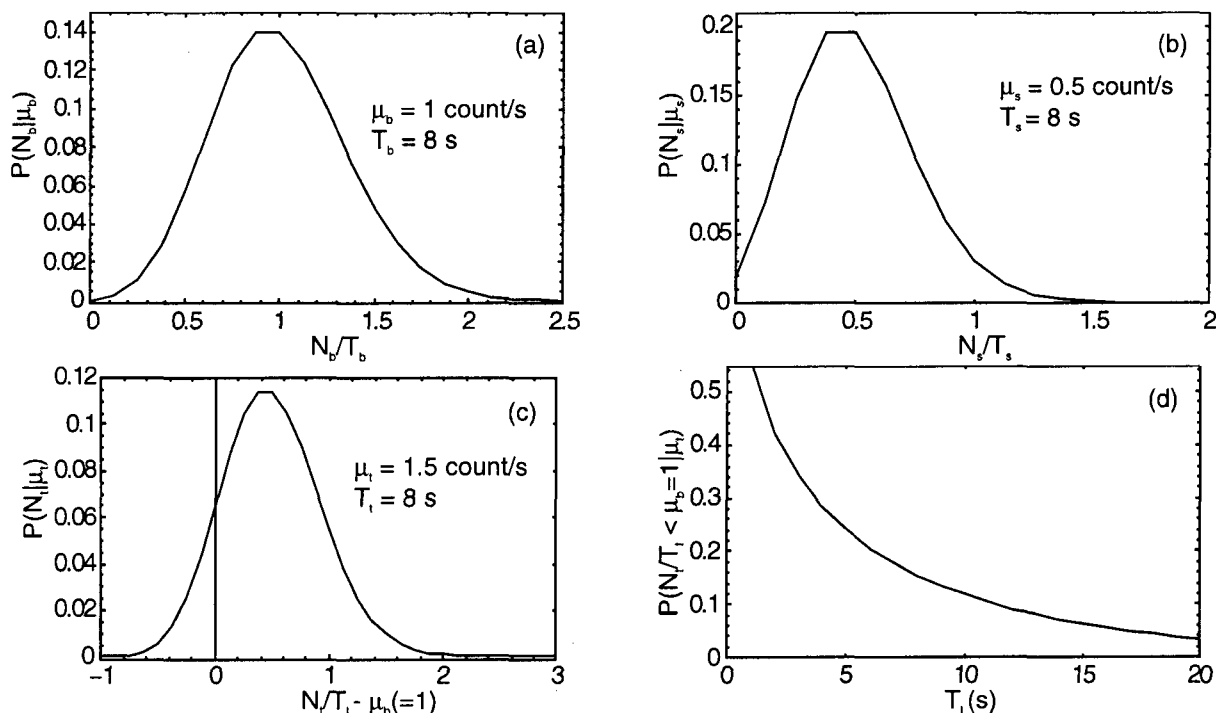


그림 1.— 전통적인 방법을 사용하여 광원 세기를 계산했을 때, 음수의 광원 세기를 얻을 수 있는 확률이 있음을 보여주는 예. 이 예에서는 백그라운드 계수율의 참값을 정확히 알고 있을 때를 가정하였다. (a) 백그라운드 계수율의 참값이  $\mu_b = 1$  counts/s 이고 관측시간이  $T_b = 8$  s 일 때 백그라운드 측정값(계수, count)의 확률분포, (b) 광원 계수율의 참값이  $\mu_s = 0.5$  counts/s 이고 관측시간이  $T_s = 8$  s 일 때 광원 측정값(계수)의 확률분포, (c) 전통적인 방법에 따라 “백그라운드+광원”의 관측 계수율로부터 백그라운드의 참값을 빼준 후에 얻어지는 광원 계수율( $N_t/T_t - \mu_b$ )의 확률분포, (d) “백그라운드+광원” 계수율의 참값을  $\mu_t = 1.5$  count/s 로 고정하고 관측시간만을 변화시킬 때 음수의 광원 계수율을 얻게 될 확률.

$\mu_s + \mu_b$ 이다. 백그라운드의 계수  $N_b$ 가 따르는 분포함수  $P(N_b|\mu_b)$ 도 식 (1)과 동일한 모양을 갖는다.

그림 1은 백그라운드 계수율의 참값( $\mu_b$ )을 미리 알고 있을 때, 전통적인 방법에 따라 광원의 계수율을 계산하여 얻어지는 값이 확률적으로 얼마든지 음수값을 가질 수 있음을 예를 통해 보여준다. 그림 1(a)는 백그라운드 계수율의 참값이  $\mu_b = 1$  counts/s이고 8초 동안 관측할 때 얻을 수 있는 백그라운드 광자 계수의 확률분포를 보여준다. 그림 1(b)는 광원 계수율의 참값이  $\mu_s = 0.5$  counts/s이고 8초 동안 관측할 때 광원으로부터 얻을 수 있는 광자 계수의 확률분포를 보여준다. 이 때 “백그라운드+광원”의 참값은  $\mu_t = 1.5$  counts/s가 되며 “백그라운드+광원”을 8초 동안 관측하여 얻을 수 있는 계수( $N_t$ )로부터 전통적인 방법으로 얻어지는 광원 계수율( $N_t/T_t - \mu_b$ )의 확률분포는 그림 1(c)에서 볼 수 있다. 그림 1(c)에서 볼 수 있듯이 백그라운드 계수율의 참값이 “백그라운드+광원” 계수율의 참값보다 작지만 “백그라운드+광원”의 관측값에 포함된 백그라운드의 계수( $N_b$ )는 참값( $\mu_b T_b$ )보다 클 수 있고, 광원의

계수( $N_s$ )는 참값( $\mu_s T_s$ )보다 작을 수 있는 확률이 얼마든지 존재하므로 전통적인 방법을 이용하여 추정된 광원의 세기는 음수가 될 수 있다. 즉 그림 1(c)에서 수직선 왼쪽의 확률만큼 음수를 측정할 가능성이 있게된다. 그림 1(d)는 “백그라운드+광원” 계수율의 참값은 고정시키고 관측시간  $T_t$ 가 증가할 때 전통적인 방법으로 구한 광원 계수율이 음수가 될 확률이 얼마나 줄어드는가를 보여준다. 그림과 같이 관측시간  $T_t$ 를 증가시키면 음수를 측정할 확률은 줄어들게 되고 무한한 시간동안 관측을 수행하게 되면 음수를 측정할 확률은 0이 되므로 광원 세기가 음수가 나오는 문제점은 없어지게 된다.

정리하자면 전통적인 방법으로 계산했을 때 광원 세기의 추정값이 음수가 나올 수 있는 이유는 신호의 관측값이 확률적으로 신호의 참값보다 작거나 같은 값을 얼마든지 가질 수 있기 때문이다. 백그라운드 계수율의 참값을 모르고 관측값만 아는 경우에도 앞에서와 비슷한 방법으로 전통적인 방법으로 구해진 광원 세기( $N_t/T_t - N_b/T_b$ )가 음수가 될 확률을 계산할 수 있

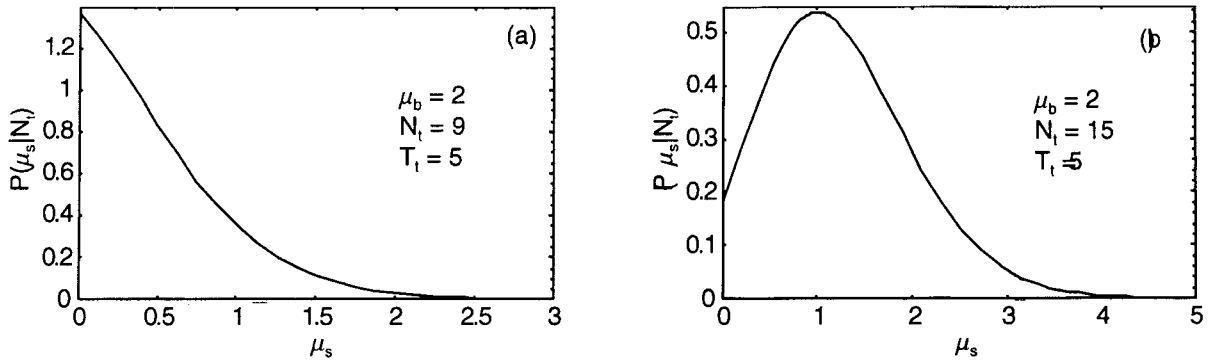


그림 2.— 백그라운드 계수율의 참값( $\mu_b$ )를 정확히 알고 있을 때 광원 계수율의 참값( $\mu_s$ )에 대한 사후 확률분포함수  $P(\mu_s|N_t)$ . 백그라운드 계수율의 참값이  $\mu_b = 2$  counts/s 이고 “백그라운드+광원”을  $T_t = 5$  s 동안 관측하여 (a) 관측값  $N_t = 9$ 를 얻었을 때와 (b) 관측값  $N_t = 15$ 를 얻었을 때의  $\mu_s$ 에 대한 사후 확률분포함수.

다. 이 경우도 앞의 예에서와 같이 충분한 시간동안 관측을 수행하게 되면 음수를 측정할 확률은 0이 되며 전통적인 방법으로 계산했을 때 생기는 문제는 사라지게 된다.

다음 절에서는 백그라운드 세기의 참값( $\mu_b$ )을 미리 정확히 알고 있을 때와 백그라운드 세기의 참값을 모를 때로 나누어서 전통적인 방법으로 광원 세기를 추정했을 때 음수가 나오는 경우 베이저안 방법에 의하면 추정값이 0 이어야 함을 보여준다.

### 3. 백그라운드 세기의 참값을 알고 있을 때

백그라운드만을 포함하고 있는 영역을 충분히 긴 시간 동안 관측함으로써 백그라운드 세기의 참값을 매우 정확히 알 수 있다. 따라서 백그라운드 세기의 참값을 알고 있는 경우에 베이저안 방법으로 광원의 세기를 구해 보는 것도 의미가 있다. 베이저 정리(Bayes' Theorem)로부터 측정값  $N_t$ 가 주어졌을 때 참값  $\mu_s$ 의 사후 확률분포함수  $P(\mu_s|N_t)$ 는

$$P(\mu_s|N_t) = \frac{P(N_t|\mu_s)P(\mu_s)}{P(N_t)} \quad (2)$$

으로 주어진다. 이때  $P(N_t|\mu_s)$ 는 가능도 (likelihood) 함수,  $P(\mu_s)$ 는 사전 확률분포함수,  $P(N_t)$ 는 증거 (evidence)이다. 이 때도 앞절과 같이 관측시간  $T_t$ 와  $T_b$ 를 포함하는 배경정보  $I$ 는 확률함수 기호에서 생략하였다. 가능도 함수  $P(N_t|\mu_s)$ 는 포아송 분포함수로 주어지며  $P(\mu_s)$ 에 대해서는  $\mu_s$ 가 0 이상일때만 1인 값을 갖도록 균등 사전분포 (uniform prior)를 가정한다. 여기서  $P(N_t)$ 는 규격화 상수(normalization constant)로 작용하고 다음과 같이 계산된다.

$$P(N_t) = \int_0^{\infty} d\mu_s P(N_t|\mu_s)P(\mu_s)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} d\mu_s \frac{[(\mu_s + \mu_b)T_t]^{N_t} e^{-(\mu_s + \mu_b)T_t}}{N_t!} \\ &= \frac{e^{-\mu_b T_t}}{T_t N_t!} \int_0^{\infty} dx e^{-x} (x + \mu_b T_b)^{N_t} \\ &= \frac{1}{T_t} \sum_{n=0}^{N_t} \frac{(\mu_b T_t)^n e^{-\mu_b T_t}}{n!} \\ &\equiv \frac{C}{T_t} \end{aligned} \quad (3)$$

위의 계산에서 적분을 계산하기 위해 이항정리 (binomial theorem)를 이용했다. 따라서 사후 확률분포함수  $P(\mu_s|N_t)$ 는

$$P(\mu_s|N_t) = \frac{T_t [(\mu_s + \mu_b)T_t]^{N_t} e^{-(\mu_s + \mu_b)T_t}}{C N_t!} \quad (4)$$

이 된다.

그림 2는 백그라운드 계수율의 참값( $\mu_b = 2$  counts/s)을 알고 있을 때 관측값  $N_t$ 가 각각 9 counts와 15 counts일 때의  $\mu_s$ 에 대한 사후 확률분포함수를 보여준다. 그림 2(a)의 경우는 서론에서 언급한 전통적인 방법에 따라 광원의 계수율을 추정하면  $-0.2$  counts/s의 음수값을 얻게된다. 그러나 그림 2(a)에서 알 수 있듯이 사후 확률분포함수의 가장 잦은 값은  $\mu_s = 0$ 이며 이 값을 베이저안 방법에 의한 광원 계수율의 추정값으로 생각한다면 직관적인 결과와 잘 일치하게 된다.

“백그라운드+광원”의 측정값  $N_t$ 가 백그라운드의 참값( $\mu_b T_t$ )보다 작은 경우에 그림 2(a)와 같이 사후 확률분포함수를 그려보고  $\mu_s = 0$ 에서 최대값을 갖는다는 것을 확인함으로써 가장 잦은 값이 0이 된다는 것을 알 수 있지만 모든 가능한 조합에 대해 확인할 수는 없다. 따라서 해석적인 방법을 통해 증명하는 것은 의미 있는 일이며, 이를 위해  $P(\mu_s|N_t)$ 를  $\mu_s$ 에 대해 미분해

본다.

$$\frac{dP(\mu_s|N_t)}{d\mu_s} \propto N_t - (\mu_s + \mu_b)T_t < 0 \text{ if } N_t < \mu_b T_t \quad (5)$$

즉, “백그라운드+광원”의 측정값( $N_t$ )보다 백그라운드의 예상값(또는 참값,  $\mu_b T_b$ )이 크면 사후 확률분포함수는 단조감소 함수가 되며 가장 낮은 값은 0이 된다. 이로써 백그라운드 세기의 참값을 정확히 알고 있을 때 전통적인 방법으로 추정된 광원 세기가 음수로 나오는 경우에는 베이저안 방법으로는 추정하면 0이 된다는 것을 증명하였다.

여기서 한가지 주목할 점은 “백그라운드+광원”의 측정값이 백그라운드의 예상값보다 크면 식 (5)로 부터 방정식  $dP(\mu_s|N_t, N_b)/d\mu_s = 0$ 의 해(가장 낮은 값)는 전통적인 방법으로 구한 값( $\mu_s = N_t/T_t - \mu_b$ )과 정확히 일치함을 알 수 있다. 즉, 백그라운드의 참값을 매우 정확히 알고 있고 전통적인 방법으로 구한 값이 양수인 경우( $N_t/T_t > \mu_b$ )는 베이저안 방법으로 구한 가장 낮은 값과 전통적인 방법으로 구한 값이 정확히 일치함을 알 수 있다. 그러나, 전통적인 방법으로 구한 값이 음수이면 베이저안 방법으로 구한 값은 0이 된다.

4. 백그라운드 세기의 참값을 모르고 있을 때

앞 절에서 백그라운드 세기의 참값을 정확히 알고 있을 때는 비교적 간단하게 다룰 수 있었다. 일반적으로 백그라운드 세기의 참값( $\mu_b$ )은 알지 못하고 관측시간  $T_b$  동안 관측해서 얻은 백그라운드 계수  $N_b$ 와 관측시간  $T_t$  동안 관측해서 얻은 “백그라운드+광원”의 계수  $N_t$ 만을 알 수 있으며, 이 값들을 이용하여 광원 계수율의 참값  $\mu_s$ 를 추정해야 한다. 이때, 전통적인 방법을 따르면 광원 계수율의 참값의 추정값은  $N_t/T_t - N_b/T_b$ 가 된다. 따라서 2절에서 살펴본 바와 같이 확률적인 무작위성에 의해 음수의 추정값을 얻을 가능성이 생긴다. 이 문제를 해결하기 위해서는 베이저안 방법을 이용해야 한다.

“백그라운드+광원”을  $T_t$  동안 관측하여 얻어진 측정값  $N_t$ 와 백그라운드만을  $T_b$  동안 관측하여 얻어진 측정값  $N_b$ 가 주어졌을 때 광원 계수율의 참값  $\mu_s$ 와 백그라운드 계수율의 참값  $\mu_b$ 가 갖는 사후 확률분포함수는 다음과 같이 주어진다.

$$P(\mu_s, \mu_b|N_t, N_b) = \frac{P(N_t, N_b|\mu_s, \mu_b)P(\mu_s, \mu_b)}{P(N_t, N_b)} = \frac{P(N_t|\mu_s, \mu_b)P(N_b|\mu_b)P(\mu_s, \mu_b)}{P(N_t, N_b)} \quad (6)$$

이때, A와 B가 서로 독립이면  $P(A, B) = P(A)P(B)$ 인

성질과  $N_t$ 와  $N_b$ 가 서로 독립이므로  $P(N_b|\mu_s, \mu_b) = P(N_b|\mu_b)$ 임을 이용하였다. 또한, 앞 절과 마찬가지로 배경정보 기호는 생략하였다. 여기서 주의할 점은 “백그라운드+광원”의 관측값  $N_t$ 에 포함된 백그라운드의 계수( $N_t$ 중에 실제로 얼마나 포함되었는지는 알 수 없는 값)와 백그라운드를 따로 측정하여 얻은 값  $N_b$ (측정을 통해 알고 있는 값)는 독립된 측정값이므로 서로 독립이다. 가능도 함수  $P(N_t|\mu_s, \mu_b)$ 와  $P(N_b|\mu_b)$ 는 식 (1)에서 s의 위치에 t 또는 b를 대입해주면 된다. 3절에서와 마찬가지로  $\mu_s \geq 0$  및  $\mu_b \geq 0$ 일 때만  $P(\mu_s, \mu_b) = 1$ 인 값을 갖고 나머지 구간에서는 0인 값을 갖는 균등사전분포를 가정한다. 가능도 함수와 사전 확률분포함수를 대입하고 이항정리를 이용하면 다음과 같다.

$$P(\mu_s, \mu_b|N_t, N_b) \propto (\mu_s + \mu_b)^{N_t} (\mu_b)^{N_b} e^{-\mu_s T_t} e^{-\mu_b (T_b + T_t)} = \sum_{n=0}^{N_t} \frac{N_t!}{(N_t - n)!n!} (\mu_s)^n (\mu_b)^{N_t + N_b - n} e^{-\mu_s T_t} e^{-\mu_b (T_b + T_t)} \quad (7)$$

우리가 원하는 함수  $P(\mu_s|N_t, N_b)$ 는 적분을 통해 구할 수 있다.

$$P(\mu_s|N_t, N_b) = \int_0^\infty d\mu_b P(\mu_s, \mu_b|N_t, N_b) \propto \sum_{n=0}^{N_t} \frac{(\mu_s)^n e^{-\mu_s T_t}}{(N_t - n)!n!} \frac{(N_t + N_b - n)!}{(T_b + T_t)^{N_t + N_b - n + 1}} \propto \sum_{n=0}^{N_t} \frac{(N_t + N_b - n)!}{(N_t - n)!n!} (1 + T_b/T_t)^n T_t (\mu_s T_t)^n e^{-\mu_s T_t} \quad (8)$$

$P(\mu_s|N_t, N_b)$ 의 규격화 상수를 구하기 위해 마지막식을  $\mu_s$ 에 대해 적분하면 다음을 얻는다.

$$\sum_{n=0}^{N_t} \frac{(N_t + N_b - n)!}{(N_t - n)!n!} (1 + T_b/T_t)^n$$

정리하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$P(\mu_s|N_t, N_b) = \sum_{n=0}^{N_t} C_n \frac{T_t (\mu_s T_t)^n e^{-\mu_s T_t}}{n!} \quad (9)$$

여기서  $C_n$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$C_n = \frac{(1 + T_b/T_t)^n \frac{(N_t + N_b - n)!}{(N_t - n)!}}{\sum_{m=0}^{N_t} (1 + T_b/T_t)^m \frac{(N_t + N_b - m)!}{(N_t - m)!}} \quad (10)$$

위의 식 (9)와 식 (10)은 Loredo (1992)가 제시한 식과 동일한 식이다. 그러나 그는 자세한 계산과정을 보여

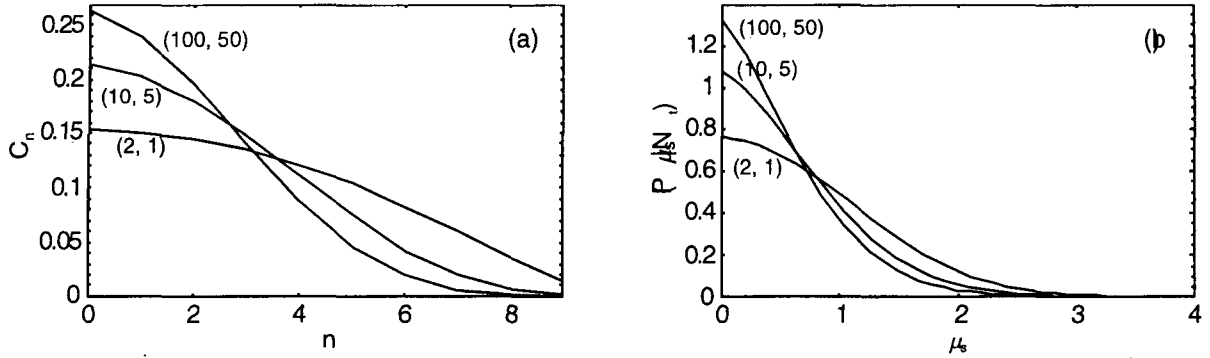


그림 3.— 백그라운드 세기의 참값을 알지 못 할 때 광원 계수율의 참값( $\mu_s$ )에 대한 사후 확률분포함수.  $N_t = 9, T_t = 5$  을 가정하였고 괄호안의 수는  $(N_b, T_b)$ 를 나타낸다. (a)  $C_n$ 의 분포, (b) 사후 확률분포함수  $P(\mu_s | N_t, N_b)$ . 백그라운드의 계수율(count rate,  $N_b/T_b = 2$ )은 모두 일정한 경우에 대하여 계산하였다.

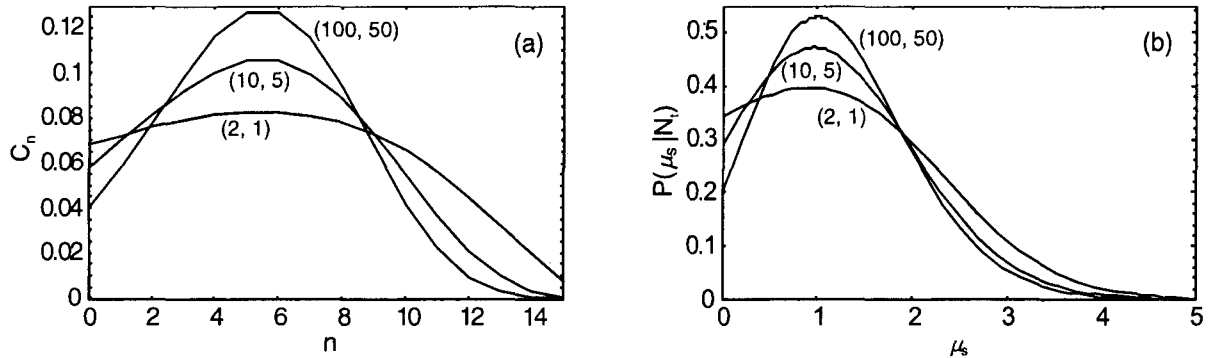


그림 4.— 백그라운드 세기의 참값을 알지 못 할 때 광원 계수율의 참값( $\mu_s$ )에 대한 사후 확률분포함수.  $N_t = 15, T_t = 5$  을 가정하였고 괄호안의 수는  $(N_b, T_b)$ 를 나타낸다. (a)  $C_n$ 의 분포, (b) 사후 확률분포함수  $P(\mu_s | N_t, N_b)$ . 백그라운드의 계수율(count rate,  $N_b/T_b = 2$ )은 모두 일정한 경우에 대하여 계산하였다.

주지 않았으며 얻어진 수식에 대한 자세한 분석 또한 수행하지 않았다.

그림 3과 4는 여러가지 조합에 대해  $C_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ )의 함수모양과  $\mu_s$ 의 사후 확률분포함수를 보여준다. 그림 3의 경우는 “백그라운드+광원”의 관측값이 백그라운드만의 관측값보다 작게 나온 경우이며 3절에서와 마찬가지로  $\mu_s = 0$ 일 때 가장 높은 확률을 가지고 있다.

“백그라운드+광원”의 관측값이 백그라운드만의 관측값보다 작게 나온 경우에 광원 세기의 참값이 0이어야 함을 보이기 위해, 3절에서와 마찬가지로 사후 확률분포함수를  $\mu_s$ 로 미분하여 본다.

$$\frac{dP(\mu_s | N_t, N_b)}{d\mu_s} = \left[ \sum_{n=1}^{N_t} C_n \frac{T_t^2 n (\mu_s T_t)^{n-1}}{n!} \right] e^{-\mu_s T_t} - T_t \left[ \sum_{n=0}^{N_t} C_n \frac{T_t (\mu_s T_t)^n}{n!} \right] e^{-\mu_s T_t}$$

$$\propto \sum_{n=0}^{N_t-1} (C_{n+1} - C_n) \frac{(\mu_s T_t)^n}{n!} - C_{N_t} \frac{(\mu_s T_t)^{N_t}}{N_t!} \quad (11)$$

$C_n$ 은 정의로부터 아래의 관계식을 만족한다.

$$C_{n+1} = (1 + T_b/T_t) \left( \frac{N_t - n}{N_t + N_b - n} \right) C_n \quad (12)$$

따라서 다음의 식을 얻는다.

$$\frac{dP(\mu_s | N_t, N_b)}{d\mu_s} \propto \sum_{n=0}^{N_t-1} \left[ C_n \left( \frac{N_t - n}{N_t + N_b - n} \right) \times \left( \frac{T_b}{T_t} - \frac{N_b}{N_t - n} \right) \frac{(\mu_s T_t)^n}{n!} \right] - C_{N_t} \frac{(\mu_s T_t)^{N_t}}{N_t!} \quad (13)$$

만약  $N_t/T_t < N_b/T_b$  이라면

$$(N_t - n)/T_t < N_t/T_t < N_b/T_b \\ T_b/T_t < N_b/(N_t - n)$$

이다. 따라서 식 (13)에서  $\sum$  기호안의 모든 항들은 음수이고 마지막 항도 음수이므로 사후 확률분포함수의 미분값도 음수이다. 즉,

$$\frac{dP(\mu_s|N_t, N_b)}{d\mu_s} < 0 \text{ if } N_t/T_t < N_b/T_b \quad (14)$$

다시 말하면, 사후 확률분포함수는 단조감소 함수이며 최대확률을 갖는 가장 낮은 값은  $\mu_s = 0$ 으로 주어진다. 결과적으로 백그라운드 세기의 참값을 모르고 “백그라운드+광원” 관측값이 백그라운드만의 측정으로 부터 얻어진 백그라운드의 관측값보다 작을 때도 광원 세기의 추정값으로 볼 수 있는 가장 낮은 값은 0임을 보인 셈이다.

그림 4는  $N_t$ 가 백그라운드 관측으로 부터 예상되는 값보다 높게 관측되었을 때의 광원 계수율의 참값( $\mu_s$ )의 사후 확률분포를 보여주고 있다. 이 경우, 전통적인 방법에 의한 광원 세기의 추정값은 간단하게  $N_t/T_t - N_b/T_b = 1 \text{ counts/s}$ 로 주어지며, 그림 4로 부터 베이지안 방법에 의해 구해진 가장 낮은 값이 전통적인 방법으로 구한 값( $\mu_s = 1 \text{ counts/s}$ ) 근방에 있음을 확인 할 수 있다. 그러나, 베이지안 방법에 의한 추정값을 정확히 구하기 위해서는 방정식  $dP(\mu_s|N_t, N_b)/d\mu_s = 0$ 을 풀어야 한다. 즉, 식 (13)에서 알 수 있듯이  $\mu_s$ 에 대한  $N_t$ -차 방정식을 풀어야 하므로 간단한 공식은 얻을 수 없다. 그러나 수치적인 방법을 통해 그림 4의 경우에 대해 풀어보면 광원 계수율의 추정값은 관측시간이  $T_b = 1$ 와  $T_b = 100 \text{ s}$ 일 때, 각각 0.921288와 0.996777 counts/s임을 알 수 있었다. 뿐만아니라 몇몇 경우에 대한 예를 수치적인 방법을 통해 계산한 결과 항상 전통적인 값에 비해 작은 값을 얻을 수 있었다. 이때, 수치 계산의 오차를 줄이기 위해 Mathematica 5.2 (Wolfram 2003)을 이용하여 계산하였다. 그러나, 일반적으로 백그라운드 계수율의 값을 정확히 알지 못할 때 전통적인 추정값보다 항상 작은 값을 갖게 되는 지는 확인하지 못했으며, 단지, 백그라운드 관측시간  $T_b$ 의 값이 커질 때 전통적인 값에 점진적으로 접근한다는 것을 몇가지 예를 통해 확인 할 수 있었다. 백그라운드 관측시간  $T_b$ 가 클 때 백그라운드의 참값을 정확히 알 수 있다고 가정할 수 있으므로 3절에서와 같이 전통적인 값과 동일한 결과를 얻어야 한다는 것은 쉽게 알 수 있다.

**5. 사후 확률분포함수의 평균값**

베이지안 방법을 사용하여 광원 세기를 추정할 때, 가장 낮은 값외에 사후 확률분포함수의 평균값을 광원 세기로 할 수도 있다. 앞 절에서와 같이 백그라운드 세기의 참값을 모르고 있는 경우에 사후 확률분포함수의 평

균값은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \langle \mu_s \rangle &= \int_0^\infty \mu_s P(\mu_s|N_t, N_b) d\mu_s \\ &= \sum_{n=0}^{N_t} C_n \frac{n+1}{T_t} \end{aligned} \quad (15)$$

위의 평균값은  $C_n$ 을 확률분포함수로 갖는 정수  $n (= 0, \dots, N_t)$ 의 평균값임을 의미한다. 이때 중요한 한가지 사실은 사후 확률분포함수의 평균값은 항상 0보다 큰 값이며 이는 직관적인 결과와 상이한 결과이다.

또한, 3절에서와 같이 백그라운드 세기의 참값을 알고 있을 때 사후 확률분포함수의 평균값도 손쉽게 계산할 수 있다. 그러나, 여기서 한가지 주목할 점은 3절에서 언급한 바와 같이 백그라운드 세기의 참값을 정확히 알고 있고 전통적인 방법으로 구한 값이 양수일 때 베이지안 방법을 이용하여 구한 가장 낮은 값과 전통적인 방법으로 구한 값이 정확히 일치하지만 사후 확률분포함수의 평균값과는 일치하지 않는다는 점이다.

사후 확률분포함수의 평균값은 정의로 부터 항상 0 이상인 값을 가질 수 밖에 없다. 극단적인 예로 3절에서 고려한 백그라운드의 참값을 정확히 알고 있는 경우에 대해 관측값  $N_t$ 가 0일 때 사후 확률분포함수는 식 (4)로 부터  $\exp(-\mu_s T_t)$ 에 비례함을 알 수 있다. 4절의 경우도  $N_t$ 와  $N_b$ 가 모두 0인 경우 동일한 함수 모양을 갖는다. 두 경우 모두에 대해 사후 확률분포의 평균값은 1 counts/s가 된다. 즉, 아무것도 관측되지 않았는데, 광원의 계수율을 1 counts/s로 추정한다는 것은 물리적으로 무리가 있다. 위의 사실들로 부터 사후 확률분포함수의 평균보다 가장 낮은 값을 광원 계수율의 추정값으로 선택하는 것이 더 합리적으로 보인다.

그러나,  $N_t$  또는  $N_b$ 값이 매우 클때는 그림 3(b)와 그림 4(b)에서 보여지는 비 대칭적인 모양의 사후 확률분포함수가 점점 대칭적인 모양을 갖게 되며 가장 낮은 값과 사후 확률분포함수의 평균이 같은 값을 갖게 된다. 사후 확률분포함수의 평균값과 가장 낮은 값이 차이를 보이는 이유는 베이지안 접근 방법에서 참값이 0 이상만을 가질 수 있도록 균등 사전분포를 가정하였기 때문에 사후 확률분포함수의 대칭성이 깨졌기 때문이다.

**6. 결론 및 추후 연구과제**

광원의 세기는 음수가 될 수 없음에도 불구하고 전통적인 방법으로 추정하게 되면 종종 광원의 세기가 음수로 계산되는 경우를 접하게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해 베이지안 접근 방법을 사용하였고 전통적인 방법으로 광원의 세기를 계산했을 때 음수가 나오는 경우에 광원의 세기는 0이 되어야 함을 수학적으로 증

명하였다. 이 결과는 직관적으로 당연해 보이지만 엄밀한 증명이 제시된 적이 없었다.

또한, 전통적인 추정값이 0 이상인 경우에 백그라운드 참값을 안다면 베이지안 추정값이 전통적인 추정값과 동일함을 보였다. 그러나, 백그라운드의 참값을 알지 못할 때는 전통적인 추정값이 0 이상의 값을 갖게 되는 경우에도 베이지안 추정값과 전통적인 추정값에 차이가 있음을 예를 통해 보여주었다. 물론 이경우에도 관측시간이 충분히 길어지면 베이지안 추정값과 전통적인 추정값은 일치하였다.

신호 대 잡음비(signal-to-noise ratio)는 가우스 확률 분포와 같이 사후 확률분포함수의 모양이 대칭적일 때 가장 낮은 값 주위로 사후 확률분포함수의 적분값이 일정 값이 되는 구간을 정하여 가장 낮은 값과 구간의 크기를 비교하여 정의할 수 있다. 그러나, 이 논문에서 연구한 경우와 같이 비대칭적인 모양일 때는 신호 대 잡음비를 정의하는 것은 어려우며 대신 상한값 또는 신뢰구간을 계산하여야 한다. Kraft, Burrow, & Nousek (1991)은 백그라운드 세기의 참값을 알고 있는 경우에 상한값 계산 및 신뢰구간에 대해 연구하였다. 그러나, 백그라운드 세기를 모르는 경우에 대한 상한값 계산 및 신뢰구간 계산등의 연구는 수행된 바 없으며 추후 이에 대한 연구를 수행하고자 한다. 또한, 전통적인 방법으로 계산된 신호 대 잡음비와 베이지안 방법으로 구한 신뢰구간등의 차이뿐만 아니라 신호 대 잡음비가 어느 값 미만일 가질 때 베이지안을 사용해야 하는 지에 대해서도 추후 연구하고자 하난. 다만, Eadie et al. (1971)은 관측 계수값이 최소 5 이상이어야 포와송 확률 대신 가우스 확률을 적용할 수 있다는 것을 경험적으로 제시하였다. 따라서 이와 연관지어 백그라운드를 제거한 후의 광원 세기를 추론할 때 어떠한 결과가 얻어질지 좀 더 자세한 연구가 필요하다.

### 참고문헌

- D'Agostini, G., 2003, Rep. Prog. Phys., 66, 1383
- Eadie, W. T., Dryard, D., James, F. E., Ross, M., & Sadoulet, B., 1971, Statistical Methods in Experimental Physics, (Amsterdam: North-Holland Publishing Company)
- Feldman, G. J. & Cousins, R. D., 1998, Phys. Rev. D, 57, 003873
- Gehrels, N., 1986, ApJ, 303, 336
- Kraft, R. P., Burrows, D. N., & Nousek, J. A., 1991, ApJ, 374, 344
- Loredo, T. J., 1990, Maximum-Entropy and Bayesian Methods, edited by P. Fougère (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers), 81
- Loredo, T. J., 1992, Statistical Challenges in Modern Astronomy, edited by E. Feigelson and G. J. Babuy (New York: Springer-Verlag), 275
- Sivia, D. S., 1996, Data Analysis, A Bayesian Tutorial (Oxford: Clarendon Press)
- Wolfram, S., 2003, The Mathematica Book, 5th ed. (Champaign: Wolfram Media)