

상사해(相似解) 및 수치해를 이용한 점성원반 붕괴시 원반 구조 이해  
UNDERSTANDING OF DISK STRUCTURE DURING THE COLLAPSE  
OF THE VISCOUS DISK USING SELF-SIMILAR AND NUMERICAL SOLUTIONS

유계화

이화여자대학교 과학교육과

KYE HWA YOO

Department of Science Education, Ewha Womans University, Seoul 120-750

E-mail: khyoo@ewha.ac.kr

(Received: October 19, 2005; Accepted: November 7, 2005)

ABSTRACT

The problem for the collapse of isothermal and rotational self-gravitational viscous disk is considered. We derive self-similar solutions for the cases in the inner and outer regions of the self-gravitational viscous disk. We show that surface density depends on  $\sigma_0/r$  in the outer region of the disk using a slow accretion approximation. The ratio of a modified viscous parameter in the outer region of the disk to that in the inner region is 0.042. We resorted to numerical solutions of governing equations of the self-gravitational disk to find out profiles of  $\sigma$ ,  $u$  and  $v$  in terms of  $x$ . Their profiles were rapidly changed around the innermost region of the self-gravitational disk. It indicates that a new object was formed in the most inner region of the disk.

*Key words:* self-gravitational viscous disk-collapse-numerical solution, self-similar solutions

1. 서론

티끌과 기체(gas)로 이루어진 성간운이 붕괴할 때, 성간운 중심에는 원시별(Bondi, 1952; Larson, 1969)이, 그리고 원시별 주위로는 원반(Shuping et al., 2003; Lodato and Bertin, 2001)이 형성되며, 자전축을 따라서는 제트(jet)류가 분출된다고 알려져 왔다(Fendt and Cemeljic, 2002; Preibisch and Smith, 2002; Ostriker et al., 2001). 한편 쌍성 계에서는 M형 별로 부터 물질이 라그랑주 점(Lagrangian point)을 경유하여 동반성 주위에 강착원반 (accretion disk)을 만든다고 알려져 있다. 이러한 강착원반을 설명할 때는 강착원반의 표준모형인  $\alpha$ -모형(Lynden-Bell and Pringle, 1974; Rees et al., 1982; Shakura & Sunyaev, 1973)이 때때로 이용되어 왔다.

퀘이사의 중심에 위치한 블랙홀의 경우 이 블랙홀은 주위의 물질을 끌어 들여 강착 원반을 형성하는 과정에서 충격파가 발생되고 이중 뿔(double horn) 형태의 플럭스 곡선이 형성된다(Barkana & Loeb, 2003). 물질이

블랙홀로 강착하여 기하학적으로 얇은 강착원반을 만들 경우, 강착 원반은 내 영역, 외 영역으로 나뉘어 그 물리적 특성을 달리한다. 예로 이 강착원반의 내 영역(inner region)은 그 경계에서의 기체 유동이 초음속 (supersonic)이어서 불안정하다는 보고가 있다(Novikov & Thorne, 1973; Kozlowski et al., 1978; Muchotrzeb & Paczynski, 1982). 이렇듯 원반 중심에 어떤 천체가 있을 경우에 따라 원반의 물리 상태는 다른 양상을 가진다.

한편, 여기서는 위에서 설명한 것과 달리, 중심에 천체가 없는 어떤 강착원반이 붕괴하여 질량이 큰 천체 등을 형성하는 경우를 생각한다. 만약 초기질량이 수 백만 태양질량 정도인 성간운이 붕괴하여, 그 구성입자들이 비대칭 섭동을 받으면 이 성간운에는 중력적 회전력이 발생하고 (Paczynski 1978; Lin & pringle 1987; Mineshige & Umemura 1997), 각운동량이 생겨서 중심에 천체가 없는 원반이 형성된다고 믿고 있다. Mineshige & Umemura (1997)는 이 자체 중력 원반이 점성을 가지고 중력붕괴 한다고 가정하여 Shu(1977)에

의해 제시된 중력적으로 붕괴한 등은 구에 대한 상사해법을 도입, 방위각 방향에서만 점성을 고려하여 상사해를 구하였다.

그러나 여기서는 Mineshige & Umemura (1997)의 연구의 연장선에서 자체 중력 원반이 붕괴할 때 동경방향과 방위각 방향의 점성을 동시에 고려하고, 수치해를 구하여 그 원반 구조를 살펴보고, 그리고 상사해를 구하여 보기로 한다. 이러한 과정을 거치기 위하여 2절에서는 자체중력 원반을 표현하는 기본방정식을 제시하고, 3절에서는 기본 방정식을 적당한 초기치와 경계치를 주어 수치해를 구한다. 4절에서는 원반 모형의 수립하는 상사해를 원반의 내 영역 및 외 영역에 대해 구하여 보고 5절에서는 결과에 대해 요약 및 논의한다.

## 2. 자체중력 원반

### 2.1 기본 방정식

점성원반의 물리적 상태를 나타내는 기본방정식은 Euler 방정식으로 사용하기로 한다. 원반의 평면으로  $r$  축, 이 평면에 수직한 축을  $z$  축, 원반 위 어떤 알갱이의 좌표는 원통좌표계  $(r, \phi, z)$ 로 표현된다. 여기서는 기하학적으로 얇은 원반을 가정하기로 한다. 에너지 입출력은 여기서 생각하지 않으므로 에너지 방정식은 생략한다. 질량 보존 방정식과  $r$  성분의 운동량 방정식은

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v_r) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\phi^2}{r} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{GM}{r^2} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} - \frac{2v_r}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

로 표현되고,  $\phi$ 성분의 운동량 방정식은

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_r v_\phi}{r} = \nu \left( \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r^2} \right) \quad (3)$$

로 표현된다. 여기서  $\nu$  는 동 점성 계수(coefficient of kinematic viscosity)이며,  $\nu = \mu/\rho$  ( $\mu$ : 점성계수)로 표

현되고, 각속도는  $v_\phi / r$ ,  $M$  은 반경  $r$  내의 원반 질량이다.  $\Sigma$ 는

$$\Sigma = 2 \int_0^H \rho dz = 2\rho H \quad (4)$$

로 정의되는 표면밀도이다.  $H$  는 강착원반 두께의 1/2이며

$$H = \frac{c_s^2}{2\pi G \Sigma} \quad (5)$$

로 표현되고  $c_s (= (dp/d\rho)^{1/2})$ 는 음속이다. 이 식은 Mineshige & Umemura(1997)의 각운동량 방정식에 비하여 식(3)의 좌변의 두 번째 항이 1/2 배의 차가 있다. 이 식을 그대로 사용하기로 하자.

기체의 압력과 밀도 간의 관계는 polytrope 식

$$p \propto \rho^\gamma \quad (6)$$

을 가정한다.  $\gamma$  는 비열비이다.

$$M = M(r, t) = \int_0^r \Sigma 2\pi r dr \quad (7)$$

을 이용하면, 질량보존 법칙을 의미하는 식 (1)은

$$\frac{\partial M}{\partial t} + v_r \frac{\partial M}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial r} = 2\pi r \Sigma \quad (8)$$

가 된다.

### 2.2 상사변환

기체 구의 붕괴는 상사해를 갖는다(Shu, 1977, 1983). 이제 원반의 특성을 나타낸 물리적 양의 상사변환을 생각하자. 변환변수  $(r, t) \rightarrow (x, \tau)$ 는 Shu(1977)의 경우를 따르기로 한다. 즉

$$x \equiv \frac{r}{c_s t}, \quad \tau = t \quad (9)$$

이다. 따라서 표면밀도  $\Sigma$ , 강착원반의 두께  $H$  와

$r, \phi$ 의 속도 성분  $v_r, v_\phi$ 는  $(r, t)$ 의 함수이며

$$\Sigma = \frac{c_s}{2\pi Gt} \sigma, \quad H = \frac{c_s}{\sigma}, \quad v_r = c_s u, \quad v_\phi = c_s v$$

로 표현된다. 여기서  $\sigma, u, v$ 는  $x$ 의 함수이다.  $M, \sigma$ 는 Shu (1977)의 경우와 같이 놓기로 한다.

식 (10)을 식 (8)에 대입하면,

$$m + (u - x) \frac{dm}{dx} = 0, \quad \frac{dm}{dx} = x\sigma \quad (11)$$

이며,  $m = x\sigma(x - u)$ 이다. 이들 표현을 이용하면 식 (1), (2), (3)은 다음과 같이 된다.

$$(u - x) \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} + \frac{du}{dx} + \frac{u - x}{x} = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} + (u - x) \frac{du}{dx} - \sigma \frac{u - x}{x} - \frac{v^2}{x} - \\ - \alpha' x \left( \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{2u}{x^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$(u - v) \frac{dv}{dx} + \frac{uv}{x} - \alpha' x \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} - \frac{v}{x^2} \right) = 0 \quad (14)$$

여기서  $\alpha' = \alpha (H/r)$ 로 정의된다(Mineshighe & Umemura, 1997).  $\alpha = \nu/c_s H$  이고 식 (13)의 좌변의 두 번째 항은 비정적 이송류(advection:  $\vec{u} \cdot \text{grad}$ )에 기인하고 세 번째 항은 중력에 기인한다.

### 3. 수치해

기본 식 (10), (11) 과 (12)을 수치해를 구하기 위하여 3개의 변수  $u_i, v_i$  및  $\sigma_i$  대한 초기 값은  $\sigma_i \sim 50, u_i \sim -200, v_i \sim 2$ 로 정하고 경계치는  $x=0$  일 때  $u=0$ 으로 정했다. 여기서  $i$ 는 초기치의 초기(initial)를 뜻한다. 그리고 2개의 미분 변수 값은 경계에 맞게 초기 값을 정하였다.  $\alpha'$  값은 0.01로 잡아  $\sigma, u$  및  $v$ 를 계산하였다. 그 결과는 그림 1, 2, 3에 실려 있다.  $u, v$  및  $\sigma$  모두  $x=0.001$ 까지 일정하게 유지하다가 갑자기 증가하기 시작하고 있음을 알 수 있다.

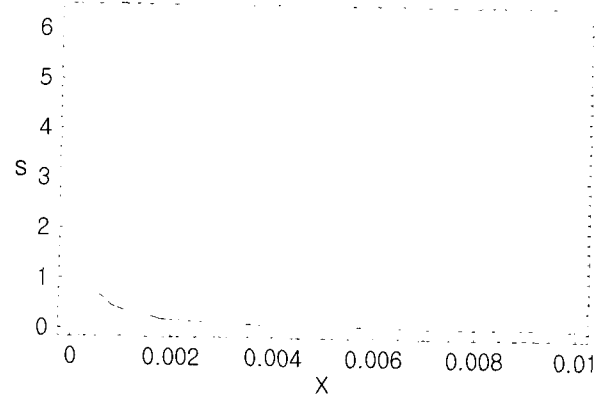


그림 1. The profile of  $\sigma(x)$  in terms of  $x = r/c_s t$ . The line presents  $\sigma$  for  $\alpha' = 0.01$ . Parameters are  $\sigma_i \sim 50, u_i \sim -200, v_i \sim 2$  and small arbitrary values for differential variables.

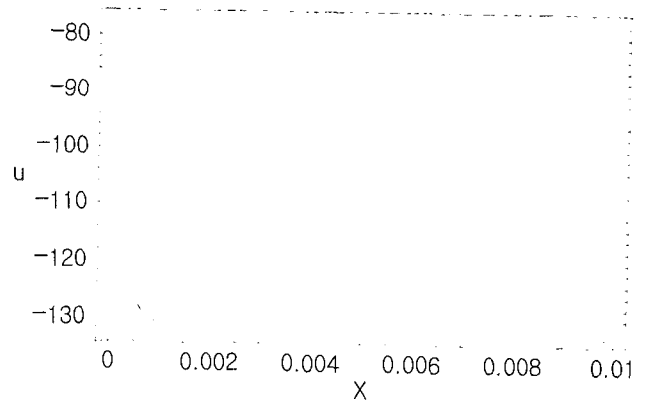


그림 2. Profile of  $u(x)$  in terms of  $x = r/c_s t$ . The line presents  $\sigma$  for  $\alpha' = 0.01$ . Parameters are  $\sigma_i \sim 50, u_i \sim -200, v_i \sim 2$  and small arbitrary values for differential variables.

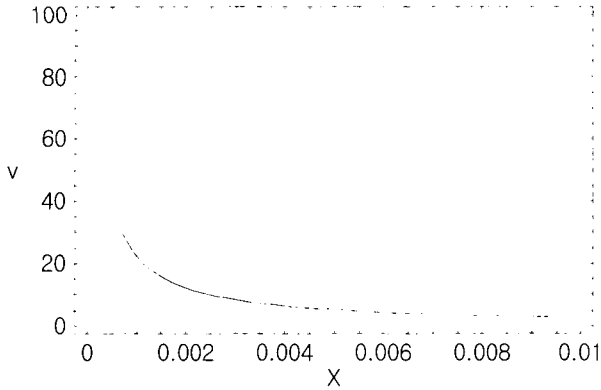


그림 3. Profile of  $v(x)$  in terms of  $x = r/c_s t$ . The line presents  $\sigma$  for  $\alpha' = 0.01$ . Parameters are  $\sigma_i \sim 50$ ,  $u_i \sim -200$ ,  $v_i \sim 2$  and small arbitrary values for differential variables.

#### 4. 상사해

##### 4.1 특이해

식 (12), (13) 및 (14)는 비선형 미분방정식이다.  $x \rightarrow 0$ 인 특이영역에서는  $u = 0$  이므로  $v_\phi \approx \text{constant}$ , 각 운동량은  $\sigma_0^{1/2}$  이다.

한편,  $u = v$  인 경우 식 (14)에서

$$\alpha' x^2 \frac{d^2 v}{dx^2} + \alpha' x \frac{dv}{dx} - v^2 - \alpha' v = 0 \quad (15)$$

이다. 식(15)는 Mineshige & Umemura(1997)의  $x \gg \alpha'$  인 경우와 일치한다. 그런데 식(15)을 멱급수로 구한 해는

$$v = ax^{-1} + bx \quad (16)$$

이다. 여기서  $a, b$  는 임의의 상수이다.

$$\frac{2}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} = \frac{v^2}{x} \quad (17)$$

이므로,  $u = v$  가 되는 곳에서  $x_i$ 는  $\sigma$ 와 다음과 같은 관계가 있다. 즉

$$\ln \frac{\sigma}{\sigma_i} = \frac{1}{4} (-a^2 x_i^{-2} + 2abx_i + b^2 x_i^2) \quad (18)$$

가 된다. 여기서  $\sigma_i$ 는  $x_i$ 에서의  $\sigma$ 값이다.

##### 4.2 $\alpha'$ 비

$u = v$ 를 경계로  $u > v$ 인 영역과  $u < v$ 인 영역으로 구분되며, 전자를 원반의 외 영역, 후자를 원반의 내 영역으로 정의한다.

일반적으로  $\nu$ 는 온도의 함수이므로,  $\alpha'$ 도 온도의 함수이다. 따라서 점성 원반의 내영역과 외영역의  $\alpha'$  값은 서로 다르다. 외영역의  $\alpha'$ 를  $\alpha_0$ , 내영역의  $\alpha'$ 를  $\alpha_1$ 이라 하자.  $x \rightarrow 0$ 인 특이영역에서  $u \approx -\alpha_0$ 이고 경계에서는  $u \approx -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2\alpha_1}x^2$ 의 해를 얻을 수 있다.

$u$ 가 같이 되는 곳에서 이 식들을 사용하면  $\alpha_0$ 와  $\alpha_1$ 의 비 값은 즉  $\frac{\alpha_0}{\alpha_1} < 0.042$  이어야만 한다. 그리고

$\alpha_0/\alpha_1 \sim 0$ 이 되는 내부 영역에서의  $x$ 는  $\alpha_1/6$  값을 갖는다. 이것은  $u$ 가 같이 되는 경계층의  $r$ 의 계수 값이  $\alpha_1/6$ 에 비례함을 의미한다.  $u$ 가 같이 되는 곳은  $\sigma_0 = 2/3$  (최대값)일 때  $r = c_s t \alpha'/6$ 이며 여기서  $t_0 = 36H/c_s \alpha'$ 이다.

##### 4.3 외 영역에서의 상사해

강착원반이 붕괴할 때,  $u, v$  및  $\sigma$ 의 값들이 그림 (1)-(3)에서 일정한 곳을 편의상 외 영역이라 부르고, 급하게 변한 곳을 내 영역이라 부르기로 한다.

기본방정식에 대한 수치 해석적 접근이 필요하다. 그러나 근사 해를 구하기 위해서는 기본방정식을 내 영역 및 외 영역에 따라 식 (2)와 (3)의  $\nu$ 가 어떻게 지배되는가를 찾는 것이 중요하다. 앞 절  $\alpha'$  비에서 지적한 바와 같은 외 영역에서는 식 (2)의  $\nu$  항이 남고, 식 (3)의  $\nu$  항은 생략하여 경계 해를 구한다. 그러므로 외 영역  $x_i < x$  즉  $x \rightarrow \infty$ 에서의 원반물질은 상사변환 방정식 중 식 (12), (13)과

$$(u - v) \frac{dv}{dx} + \frac{uv}{x} = 0 \quad (19)$$

을 따르므로 이들을 사용하여 상사 해를 구한다. 식 (12), (13), (19)를 근사적으로 다루고 약간의 계산 과정

을 거쳐 먹급수 해를 구하면

$$u = -\alpha_0 \quad (20)$$

$$v = \sqrt{\sigma_0} \left(1 + \frac{\alpha_0}{2x}\right) \quad (21)$$

$$\sigma = \sigma_0/x \quad (22)$$

$$m' = \sigma_0\alpha_0 \quad (23)$$

이 된다. 식 (21)은  $\sigma_0$  가 2보다 클 때 성립한다. 이것이 앞서 수치 해를 구할 때  $\sigma_0$ 를 50으로 정한 이유이다. 여기서  $m'$ 는  $dm/dt$ 을 뜻 한다.

질량유입률은  $dm/dt = -x\sigma u$  이므로 시간에 무관한 경우 slow accretion limit 로 근사한  $u$ 의 값은 원반 안쪽으로 이동하는 질량이 일정하다. 그러나 외 영역에서의 질량유입률은  $x_t$  까지  $x$ 가 감소함에 따라 점차 증가한다.

#### 4.4 내 영역에서의 상사해

한편, 내 영역에서는 식 (2)의  $\nu$ 항은 생략하고 식 (3)의  $\nu$ 항의 영향을 고려하여 해를 구하기로 한다. 따라서 내 영역  $x_t > x$  즉  $x \rightarrow 0$ 에서의 원반물질은 상사변환 방정식 중 식 (12), (14)와

$$\frac{2}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} + (u-x) \frac{du}{dx} - \sigma \frac{u-x}{x} - \frac{v^2}{x} = 0 \quad (24)$$

을 따르므로 이들을 사용하여 상사해를 구한다. 급수해를 구하면

$$u \approx -2x \left(1 - \frac{27}{5\alpha_1} x^2\right) \quad (25)$$

$$v \approx \frac{\sqrt{\sigma_0}}{10} x^{-\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{24}{5\alpha_1} x\right) \quad (26)$$

$$\sigma \approx \frac{\sigma_0}{300} x^{-\frac{5}{3}} \left(1 + \frac{24}{5\alpha_1} x\right) \quad (27)$$

$$m' \approx \frac{\sigma_0}{100} x^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{6}{5\alpha_1} x\right) \quad (28)$$

이다.  $u$ 는  $\alpha_1$  값에 반비례하므로 동경 방향의 점성의 값은 유한하여 질량은 원점근방으로 계속 강착된다고 생각할 수 있다.

#### 5. 요약 및 논의

점성원반에서 동경 방향과 방위각 방향 모두 점성을 갖는다고 생각된다. 이 원반이 붕괴하여 물질이 강착될 때의 기본방정식은 비선형이고 따라서 그 해는 수치 해석적 풀이로 얻어진다. 그 복잡함을 피하고 내외영역의 경계에서 연속성을 유지하도록  $u$ 가 같이 되는 곳을 경계로 원반 내영역과 외 영역으로 정의하고 각 영역에 따라  $u, v, \sigma$  및  $m$  에 대한 상사 해를 구한 결과 두 영역의 원반 구조는 서로 달랐다. 외영역과 내영역의 표면밀도 ( $\sigma$ )는  $\sigma_0/x$  과  $(\sigma_0/300) x^{-5/3}$  이며, 질량유입량  $m$  은  $\sigma_0\alpha_0, (\sigma_0/150) x^{1/3} (1 + (24/5\alpha_1)x - \dots)$  이다. 그리고 동경 방향의 속도  $u$  는  $-\alpha_0, -2x$ 으로 각각 변화였다. 그리고 표면밀도는 외 영역에서 내 영역으로 강착될 때  $t^{-1}$  에서  $t^{2/3}$  으로 비례하여 증가함을 보인다.

점성원반의 내 영역 및 외영역의 수정된 점성 매개변수(modified viscous parameter)의 비의 값이  $\alpha_0/\alpha_1 < 0.042$  임을 요구하며,  $\alpha_0/\alpha_1 \sim 0$  되는 내 영역에서의  $x$  는  $\alpha_1/6$  값을 갖는다.

수치 해를 이용해 그린 그림에서 알 수 있듯이 강착원반이 붕괴할 때  $x=0.001$ 에서  $u, v$  및  $\sigma$ 이 큰 변화를 가짐을 알 수 있다. 즉 3개의 변수 모두  $x=0.001$ 부근에서 갑자기 증가한다. 물질이 강착될 때 표면밀도는 외 영역에서 내 영역으로 강착될 때  $t^{-1}$ 에서  $t^{2/3}$  으로 비례하므로 그 경계는 시간이 지남에 따라 외부로 이동한다. 또한 중심근방에서  $\sigma$ 는 시간이 지남에 따라 급하게 증가하고 질량  $M$  도 중심근방에서 크게 증가한다. 서서히 강착하는 가정하에서도 이와 같이 중심부근에서 시간이 경과한 후 크게 증가하는 것은 Mineshige & Umemura (1997)가 지적했듯이  $x \ll 1$  에서의 질량 증가는 반경이 작고 질량이 큰 천체가 형성됨을 의미한다. 그러나 Mineshige & Umemura (1997)의 경우보다 우리의 상사해는 더 느리게 질량증가로 인한 천체가 형성됨을 이해할 수 있다.

원반의 점성은 원반을 가열(heating)하므로 냉각

(cooling)으로 보상되어야 점성원반은 등은 원반이 된다. 원반의 외 영역은 서서히 강착되어 열평형이 이루어지고 온도 구조는 편평하게 된다. 그러나 원반 내 영역에서는  $u \rightarrow 0, v \rightarrow \infty$  이므로 이 경우 강착원반은 빠른 회전의 원반이 된다. 그러나 중심근방의 원반은 시간이 지남에 따라 밀도는 커지고 질량이 커진다. 따라서 이러한 내 영역은 많은 시간이 경과한 후 불안해 질 것이다. 그러한 시간 ( $t_0$ )는  $t_0 \sim r_0/\alpha_1 c_s$  (아래 첨자  $0$ 은 내 영역의 어떤 반경의 위치를 뜻한다.) 이므로 이 이후는 강착원반은 붕괴하여 마침내 중심의 밀도가 큰 천체가 형성 될 것이다. 우리는 이러한 현상(Doppler 이동이나 중력과 발생)을 관측 가능케 할 것이다.

### 사사

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구 (과제번호: R01-2001-000-00026-0(2001) 및 R01-2001-000-00026-0(2002) 지원으로 수행되었습니다. 수치해를 구하는 데 도움을 주신 김정훈 님께 감사드립니다.

### 참고문헌

- Barkana, R. & Loeb, A., 2003, *Nature*, 421, 341
- Bondi, H., 1952, *MNRAS*, 112, 195
- Fendt, C. & Cemeljic, M., 2002, *A&Ap*, 395, 1045
- Kozłowski, M., Jaroszynski, M., & Abramowicz, M. A., 1978, *A&Ap*, 63, 209
- Larson, R. B., 1969, *MNRAS*, 145, 271
- Lin, D. N. C. & Pringle, J. E., 1987, *ApJ*, 320, 87
- Lodato, G. & Berlin, G., 2001, *A&Ap*, 375, 455
- Lynden-Bell, D. & Pringle, J. E., 1974, *MNRAS*, 168, 603
- Mineshige, S. & Umemura, M., 1997, *ApJ*, 480, 167
- Muchotrzeb, B. & Paczynski, B., 1982, *Acta Astronomica*, 32, 1
- Novikov, I. D. & Thorne, K. S., 1973, In De Witt, C. and De Witt, B. S. (eds), *Black Hole-Les Astress Occlus*, 343 p.
- Ostriker, E. C., Lee, C. F., Stone, J. M., & Mundy, L. G., 2001, *ApJ*, 557, 443
- Paczynski, B., 1978, *IAUS*, 76, 201
- Preibisch, T. & Smith, M. D., 2002, *A&Ap*, 383, 540
- Rees, M. J., Begelman, M. C., Blandford, R. D., & Phinney, E. S., 1982, *Natur*, 295, 17
- Shakura, N. I. & Sunyaev, R. A., 1973, *A&Ap*, 24, 337
- Shu, F. H., 1977, *ApJ*, 214, 488
- Shu, F. H., 1983, *ApJ*, 273, 202
- Shuping, R. Y., Bally, J., Morris, M., & Throop, H., 2003, *ApJ*, 587, L109