한국 CAD/CAM 학회 논문집
제10권 제5호 2005년 10월 pp. 303-313

학술논문

# VNURBS기반의 다차원 불균질 볼륨 객체의 표현: 개념 및 형성

박 상 근*

# Volumetric NURBS Representation of Multidimensional and Heterogeneous Objects: Concepts and Formation

Park, S. K.*

**ABSTRACT**

This paper proposes a generalized NURBS model, called Volumetric NURBS or VNURBS for representing volumetric objects with multiple attributes embedded in multidimensional space. This model provides a mathematical framework for modeling complex structure of heterogeneous objects and analyzing inside of objects to discover features that are directly inaccessible, for deeper understanding of complex field configurations. The defining procedure of VNURBS, which explains two directional extensions of NURBS, shows VNURBS is a generalized volume function not depending on the domain and its range dimensionality. And the recursive algorithm for VNURBS derivatives is described as a computational basis for efficient and robust volume modeling. In addition, the specialized versions of VNURBS demonstrate that VNURBS is applicable to various applications such as geometric modeling, volume rendering, and physical field modeling.

***Key words*** : Volumetric NURBS, Heterogeneous objects, Volume modeling, Physical field modeling

## 1. 서 론

자연에서 발생하는 여러 종류의 물리 현상을 서술하고 이를 분석하기 위하여, 일반적으로 편미분 방정식 형태를 가진 지배 방정식 및 경계 조건식을 세운다. 그리고 이들 방정식의 해를 구하기 위하여 여러 가지 수치적 기법들을 사용하며, 계산 결과의 이해 및 분석을 돕기 위해 다양한 가시화 기법들을 적용한다. 이와 같은 일련의 작업, 즉 편미분 방정식으로의 표현(representation), 표현식의 계산 과정(computation), 계산 결과의 가시화(visualization) 등은 비단 물리 현상의 해석 과정에서만 적용되는 것은 아니다. 제품을 설계하기 위하여 수행되는 형상 모델링 과정도 유사하다. 즉 형상을 표현하기 위한 형상 표현식이 필요하며, 표현된 형상을 수정 및 조작할 수 있는 계산 과정, 그리고 그 결과를 컴퓨터 화면 상에 보여주는 가시화 과정이 필요하다. 이상의 순차적 과정을 흔히 모델링(표현식 및 조작방식) 및 렌더링이라는 용어로 표현하는데, 순수 과학을 포함하여 여러 공학 분야에서도 일반적으로 이러한 작업 순서에 의해 의도했던 결과를 얻어낸다. 단지 각 분야마다 대상 모델의 특성이 다르고, 이로부터 파생되는 계산 방식 및 가시화 기법의 구체적인 적용 방식 혹은 순서가 다를 뿐, 일련의 전체 과정에서 보여주는 기본 구조 및 접근 방식은 상당히 유사하다. 결국, 특정한 해당 분야의 특성은 그 분야에서 사용하고 있는 대상 영역(공간)을 서술하기 위해 사용하는 파라미터 자체의 물리적 의미 및 그 관련 성질에서 찾아볼 수 있다.

한편, 이러한 대상 영역은 끈이론(string theory)[1]에 의하면, 크게 기하학(geometry)적 요소와 내부에 존재하는 관련 성질의 정의 부분에 해당하는 속성(attributes) 요소의 구성체로 정의하여 서술한다. 즉, 기하학적 요소를 서술하기 위해, 3차원 공간 상의 좌표 $(x, y, z)$에 기초한 점(point)의 집합(set)을 사용하고 있으며, 이들 점 집합 속에 존재하는 속성 요소를 서술하기 위해, 스칼라(scalar), 벡터(vector), 텐서(tensor) 등의 수학적 항들을 사용하여, 그 대상 영역

*교신저자, 정회원, 충주대학교 기계공학과
- 논문투고일: 2004. 11. 11
- 심사완료일: 2005. 04. 28

의 기하학적, 물리적 특성을 표현한다. 여기서 기하학적 요소를 하나의 속성 요소로 간주할 수도 있으나, 대부분의 해당 분야에서 필수 요소로 정의하여 사용하기 때문에 특별히 구분하여 언급한다. 결국 대상 영역의 실체는 특정 분야의 기하학적 및 물리적 특성에 따라 다르게 설명되고 이해될 뿐이지, 그것을 근본적으로 표현할 수 있는 구조 체계(structure scheme)는 크게 기하 요소와 속성 요소의 구성체로 이루어져 있다고 말할 수 있다.

흔히 이러한 대상 영역 혹은 대상 물체를 수학적 표현식, 절차적 표현 방식, 근사적 표현 기법 등의 방법으로 위에서 언급한 기하학적, 물리적 구조를 서술하는데, 대부분의 경우, 곡면, 솔리드, 볼륨 개념의 표현 모델을 그 목적하는 바에 따라 정의하여 기술한다. 여기서 솔리드란 대상 영역(물체) 내부의 모든 점의 속성이 균일함을 가정하고 있으며, 곡면이란 물체 내부 및 외부로부터의 거리가 영(zero)인 점의 집합을, 그리고 볼륨이란 물체 내부의 속성 구조가 복잡하고 동시에 비균일한 점의 집합으로 이루어져 있다고 정의한다.

현재까지 연구되어 온 이러한 표현 모델의 발전 추이를 간략히 살펴보면, 다음과 같은 발전 방향을 보여주고 있다. 즉,

- 비연속 모델에서 연속성을 가진 모델로(discrete volume datasets to continuous function models)
- 균일한 속성을 가진 모델에서 비균일 모델로 (homogeneous solids to complex heterogeneous volumes)
- 불리안 영역에서 실수 영역의 모델로(Boolean domain to real domain)
- 1개의 속성을 가진 모델에서 다수 개의 모델로 (one scalar field to a generic tuple of scalar fields)
- 3차원 공간의 모델에서 3차원 이상의 모델로 (three-dimensional space to its higher dimensional spaces)

표현 모델의 범위(scope)가 확대되고 있으며, 또한 이와 더불어 표현 구조의 복잡성 및 보다 직관적인 모델링 작업을 위하여,

- 1개의 표현 모델이 아닌 다수 개의 모델 조합 방식으로(constructive modeling approach for complex objects)

표현 방식의 프레임 구조가 유연성을 가지며 점점 고급화되고 있다.

좀더 구체적으로 현재까지 연구되어 발표된 표현 모델들 가운데 널리 알려진 모델들을 그 복잡성 및 발전 추이 순서에 따라, 정의 및 특성 등을 살펴보면 다음의 2장과 같다. 그리고 이러한 여러 표현 모델이 가지고 있는 특성 및 구조 등에 기반을 두어, 응용성과 확장성을 가진 NURBS[1]기반의 볼륨 표현 모델을 제시하겠다. 이 볼륨 표현 모델은 CAGD분야 등에서 제시되어 왔던 NURBS표현식의 일반화 형태로서, NURBS의 매개변수(parameter) 공간을 임의의 $n$차원으로 확장하였으며, NURBS의 조정점(control point) 차원을 임의의 $k$개로 확장하여, 임의의 $n$차원 공간 상에 존재하는 점 집합에 대하여 그 구성 원소인 각각의 점이 임의의 $k$개의 속성을 가질 수 있도록 설계된, 확장성을 가진 생성적(generative) 형태의 볼륨 함수이다. 본 연구에서는 이를 Volumetric NURBS 혹은 VNURBS라고 부르겠다.

## 2. 관련 연구

### 2.1 볼륨 데이터

볼륨 데이터는 크게 측정 혹은 실험에 의해 획득하거나 컴퓨터 계산에 의해 획득된다. 의료 분야에서 사용하는 MRI 및 CAT 스캐닝 장비는 물체 내부 상태에 관한 정보 혹은 데이터를 사진 측정을 통하여 제공하며, 전산유체 분야에서 사용하는 여러 수치적 계산 기법(예, FEM, FDM 등)은 유한 개의 점 위치에서 유동장의 유체 밀도, 압력, 속도 등을 계산하여 그 결과를 제공한다. 이밖에 각종 측정 장치, 실험 도구 및 계산 방식 등에 의하여, 관심 영역 내부의 위치에 따른 상태 혹은 속성값의 분포를 획득한다. 여기서 유클리드 공간 $\mathbf{E}^3$ 상에서 임의의 위치 $(x_i, y_i, z_i)$에서 측정 혹은 계산된 데이터를 $f_i$라 할 때, 획득한 데이터 집합 $\mathbf{D}$를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{D} = \{(x_i, y_i, z_i, f_i) | (x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}^3, f_i \in \mathbf{R}\} (i = 1, \ldots, N)$$

여기서 위치에 해당하는 $(x_i, y_i, z_i)$을 독립변수, 상태 혹은 속성값에 해당하는 $f_i$을 종속변수라고 부른다.

한편, 이들 데이터는 그 분포 상태에 따라 다음과 같이 분류할 수 있다. 크게 구조화된 규칙적 배열을 가진 데이터(structured regular data)와 불규칙적으로 산만하게 분포된 데이터(scattered or unstructured irregular data)로 구분할 수 있으며, 이밖에 다수의 단

면 데이터 (cross-sectional data) 분포 및 지질 탐색을 위한 깊이 방향으로의 데이터(seismic data) 분포 등을 살펴볼 수 있다[3].

또한 볼륨 데이터의 속성에 따라, 일정한 밀도 분포를 가지는 솔리드(homogeneous solid) 데이터와 복잡한 구조의 비균일한 속성을 가지는 볼륨(heterogeneous solid or volume) 데이터로 분류할 수 있다.

더불어, 대상 영역 **D**의 속성값 $f$가 어떤 변수 형태인가에 따라, 실수(real) 영역, 불리안(Boolean) 영역, 정수(integer) 영역 데이터로 구분하여 분류할 수 있다.

## 2.2 볼륨 표현 모델

### 2.2.1 Space-Partitioning Models

Space-partitioning models은 주어진 솔리드 형상을 일정한 크기와 방향을 가진 셀(cell)들의 집합으로 표현한다. 여기서 셀은 서로 연결되어 있으며, 겹쳐져 있지 않아야 한다. 이 모델은 불리안(Boolean) 영역의 표현 모델로서 특정한 점의 위치가 물체 내부에 존재하는지 외부에 존재하는지에 관한 정보를 제공한다. 최근 이 모델은 대상 영역의 표현보다는 형상 모델링 혹은 렌더링 등에서 빠른 계산 결과를 제공하기 위한 수단으로써 많이 사용된다. 널리 알려진 모델로 Spatial-occupancy enumeration[4], Octree[5], BSP (binary space-partitioning) tree[6] 등이 있다.

### 2.2.2 Swept Volumes

Swept volumes은 임의의 자유 곡선(trajectory)을 따라 $n$차원의 물체(주로 contour 혹은 solid)가 움직였을 때의 자취 영역을 표현한다. 여기서 자취 영역은 대개 균일한 솔리드(homogeneous solid)라고 가정한다. 이 표현 모델은 주로 motion planning, CAD, NC machining 모의실험(simulation) 등의 분야에서 널리 사용된다. 최근 발표된 모델로서 NURBS곡선을 따라 이미지(images)가 진행해 나갈 때의 자취 영역을 복셀(voxel) 모델로 표현하는 방식[7,8] 등이 있다.

### 2.2.3 Regular Solids

Regular solids란 규칙화 불리안 함수(regularized Boolean function)[9]를 사용하여 임의의 두 솔리드가 결합하였을 때 그 결과도 반드시 솔리드가 생성될 수 있도록, 즉 솔리드 내부의 점 집합이 닫힌 성질을 가질 수 있도록 정의된 솔리드를 말한다. 관련 연구로 위에서 언급한 규칙화 불리안 함수를 사용하여 단순한 형태의 기본 입체(primitive) 솔리드를 결합시켜 복잡한 구조의 솔리드 형상을 모델링 하는 CSG (constructive solid geometry) 방식[9]이 있다.

### 2.2.4 Discrete Field Volumes

Discrete field volumes은 닫혀진 3차원 공간에서 위치 정보와 해당하는 속성값 데이터를 가진 유한 개의 요소들로 이루어진 집합을 말하는데 대개 volume dataset이라 부른다. 크게 구조화된 형식과 비구조화된 형식으로 분류하며, 대개 기하학적 자료구조와 위상학적 자료구조를 가지고 볼륨 데이터를 표현한다. 한편, 임의의 위치에서 속성값을 구하기 위해, 구조화된 volume dataset의 경우, 1차 보간(trilinear interpolation) 혹은 근접 필터(nearest-neighbor filter)[10]을 사용하며, 비구조화의 경우 무게중심 보간(barycentric interpolation)을 사용한다. 직관적이고 비교적 단순한 구조이기 때문에, 볼륨 그래픽스(volume graphics) 분야에서 데이터 렌더링[11,12]을 목적으로 많이 사용된다. 그러나 이 방식은 거대한 저장 용량을 요구하며 고급의 모델링 기능이 지원되지 않는 단점을 가지고 있다.

### 2.2.5 Functional Models

Functional model은 수학적으로 혹은 절차적으로 정의된 함수 $f(x, y, z)$을 사용하여 임의의 3차원 공간 $(x, y, z)$ 위치에서 모델링 영역의 함수값 혹은 속성값을 계산한다. 여기서 이들 함수는 실수 영역의 스칼라 함수(real-valued scalar function)로서 대부분 해석 함수(analytical function) 형태를 가진다. 블라비 객체(blobby objects)[13], 음함수 곡면(implicit surface)[14], F-rep(functional representation)[15,16], 솔리드 텍스쳐(solid texture)[17,18] 등이 이 표현 모델에 속한다.

블라비 객체는 전자 구름(electron clouds)을 가시화하기 위해 제시된 모델로서 특정한 점의 위치에 가우시안(Gaussian) 형태의 기저 함수를 사용하여 그 유효 영역(field of influence)을 정의하고, 이들 다수의 위치에서 정의된 함수들을 대수적으로 더함으로써 최종의 전자 구름을 모델링 한다.

음함수 곡면은 $f(x, y, z)=0$인 점들의 집합(zero set)을 가지고 임의의 자유 곡면 형상을 표현하는데, 수학적으로 이들 점 집합은 연속이어야 하며, 함수의 구배(gradient vector) 또한 연속이어야 한다. 관련된 형상 모델링 함수로 Rvachev[19] 함수 등이 있으며, 기존 매개변수 곡면(parametric surfaces) 등에서 수치적으로 계산하기 어려웠던 형상 블랜딩(blending) 및 오프셋(offset) 등이 간단한 대수적 합(algebraic sum)에 의해 쉽게 해결된다. 그러나 정의된 함수를 실시간으로 직접 렌더링 하기 어려워 Marching Cubes[20] 등

과 같은 폴리곤화(polygonization) 작업[21]을 통하여 간접적으로 가시화한다.

한편, 위에서 언급한 음함수 곡면의 모델링 기능을 기반으로, 음함수 곡면에 의해 표현하기 힘든 불연속 형태의 volume dataset까지도 $f(x, y, z)$ 함수 형태로 정의하여, 이들 이종 간의 표현 방식을 하나의 복합된 함수 형태로 나타내려는 연구가 발표되었는데, F-rep이 여기에 해당한다.

그리고 이들 표현 모델의 볼륨 영역에 텍스처 값을 정의하기 위해 절차적 방식의 실수형 함수(procedurally-defined real-valued function)를 사용하는 연구 결과가 있는데, 솔리드 텍스처가 그 대표적이다.

2.2.6 Constructive Representations of Volume Objects

최근 위에서 언급한 여러 종류의 볼륨 표현 모델을 일관된 방식으로 조합해 나가면서, 좀더 복잡한 구조를 가진 형상 혹은 영역을 표현하려는 연구가 활발히 진행되고 있는데, 가장 대표적인 방식으로 모델링 과정을 트리(tree) 구조 형태로 나타내려는 constructive 방식이 있다. 이 표현 구조는 간단한 기본 입체(primitive) 형상을 트리 구조의 말단 노드(terminal leaf node)에 위치시키고, 이들 간의 모델링 작업을 그 작업 순서에 따라 상향식으로 중간 노드(non-terminal node)에 위치시켜 나아감으로써, 최종의 루트 노드(root node)에서 의도했던 결과를 계산해 내는 표현 방식이다. 대표적으로 Volumetric CSG(constructive solid geometry)[22], CVG(constructive volume geometry)[23,24], Constructive hypervolume modeling[25], Volume scene graphs[26] 등이 있다.

Volumetric CSG는 volume datasets에 이항 연산(binary operation) 혹은 일항 연산(unary operation)의 조합을 적용시켜 복잡한 구조의 볼륨 모델을 생성하는데, 기존의 CSG방식과의 차이점은 기본 입체 형상의 형태가 정칙 집합(regular sets) 혹은 반공간(half spaces)이 아닌 volume datasets이라는 것이다. 즉 기존 CSG방식에서 국한되었던 불리안 영역을 포함하여, 실수 영역 혹은 정수 영역의 볼륨 영역까지도 표현할 수 있다는 특징을 가지고 있다. 그러나 렌더링 작업을 위하여 많은 계산 시간을 요구하는 복셀화(voxelization) 작업이 필요하다.

한편, 이 방식을 발전시켜 volume dataset을 포함하여 음함수 곡면(implicit surfaces) 등의 여러 형태의 표현 모델들을 기본 입체 볼륨으로 사용할 수 있도록 대수적 모델링을 지원하는 프레임 구조(algebraic framework)가 최근 발표되었는데, CVG와 Constructive hypervolume이 여기에 해당된다. CVG는 $\mathbf{E}^3$ 공간에 존재하는 임의의 $k$개 스칼라 장(scalar fields)을 1개의 불투명 장(opacity field)과 $k-1$개의 속성 장(attribute fields)으로 분류하여 표현하는 방식을 말하는데, 실제로 $k$개의 스칼라 장은 $k$개의 함수 $f: \mathbf{E}^3 \rightarrow [0, 1]$을 정의하여 표현한다. 더불어 불투명 장은 기하 형상(geometry)의 가시성(visibility)을 결정하는 필수 필드로서 중요하게 다루며, 속성 장은 응용 분야의 특성에 의존하여 결정한다. 예를 들어 볼륨 그래픽스(volume graphics) 분야의 경우, Phong illumination model을 위한 (red, green, blue) 색깔, (ambient, diffuse, specular) 반사 계수(reflection coefficients) 등이 속성 장을 표현하기 위한 구성요소로서 사용된다.

그리고, Constructive hypervolume은 기존 F-rep 표현 구조를 좀더 일반화하여, $k$개의 속성을 가진 $n$차원의 점 집합(point set)을 $k$개의 함수 $f_i: \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{R}(i=1, \cdots, k)$을 정의하여 표현하고, CSG 및 CVG와 유사하게 트리 구조를 사용하여, 이들 점 집합 간의 대수적 혹은 절차적 모델링 함수를 통하여 공간 $\mathbf{E}^n$상에 존재하는 복잡한 구조의 형상 혹은 영역을 점차적으로 표현해 나간다. 여기서 CVG와 유사하게 $k$개의 함수 중, 기하 형상을 결정하는 장(field) 함수, $g: \mathbf{E}^3 \rightarrow \mathbf{R}$가 반드시 존재하는데, 대개 음함수 곡면 형태를 가지고 있다. 즉 $g(x, y, z) > 0$이면 표현 모델의 내부를, $g(x, y, z) < 0$이면 외부를, 그리고 $g(x, y, z) = 0$이면 표면을 나타낸다. 그리고, 참고로 $n$차원 점 집합의 적용 예제로서 Animated spreadsheet[25]가 소개되었는데, 6차원의 $(x, y, z, u, v, t)$ 변수를 사용하여 $(x, y, z)$ 공간에 존재하는 음함수 곡면들을 사각형 파라미터 $(u, v)$ 방향으로 보간하고, 다시 시간 $t$의 흐름에 따라 보간하는 6D hypervolume의 예제를 보여 주었다.

한편, Volume scene graphs는 constructive modeling에서 사용될 일반화된 형태의 오퍼레이터(operators)와 변환함수(transformations)를 소개하였는데, 이들 함수들은 모두 공간 좌표 및 시간 좌표에 대해 정의된다. 즉 임의의 $(x, y, z, t)$ 위치에서 색깔 및 불투명 값을 리턴하는 Color함수, 주어진 3D box 내부에 존재하는지를 결정하여 관련 자식 노드(child node)의 계산 결과를 리턴하는 Box함수(혹은 구영역인 경우 Sphere함수), 대응하는 volume dataset에서 특정 속성 값을 추출하여 리턴하는 Volume함수, 모든 관련된 자식 노드 및 이들의 관계식(예: *over*, *xor*, *union*, *add*)을 계산(evaluation)해 주는 Group함수, 새로운 좌표 공간으로의 변환(mapping)을 정의하는 Transform함수 등이 있다.

## 3. VNURBS의 유도 및 수학적 정의

### 3.1 볼륨 영역의 일반적 표현 방식

본 연구에서의 볼륨 표현식은 임의의 $n$차원($n > 0$) 공간 상의 닫혀진 영역에 대하여, 그 내부에 존재하는 구성 원소인 각각의 점(point)이 $k$개 ($k > 0$)의 속성을 가질 수 있도록 영역 내부의 점 집합(point set)을 간결하게 표현하고, 모델링할 수 있는 볼륨 함수이다. 여기서 영역 내부의 점 집합이란 불균질의(heterogeneous) 속성 분포를 가진 고차원 볼륨 영역을 말한다. 이를 흔히 하이퍼볼륨(hypervolume)[25]이라 부르기도 하는데, 먼저 이 볼륨 영역에 관한 일반적 표현 방식에 관해 소개하겠다.

실수 집합 $\mathbf{R}$, $n$차원의 유클리드 공간 $\mathbf{E}^n$에 대하여, 임의의 스칼라 함수 $A_i(i = 1, \ldots, k)$ 을 $A_i : \mathbf{E}^n \rightarrow \mathbf{R}$이라 정의할 때, 일반적으로 불균질의 볼륨 공간(영역)을 $k$개의 스칼라 함수로 구성된 함수들의 집합 형태로 다음과 같이 표현한다[23,25].

$$\mathbf{o} = (A_1, A_2, \ldots, A_k) \tag{1}$$

여기서 스칼라 함수 $A_i$는 볼륨 영역의 1개의 속성을 정의하며, 무한 공간에서의 1개의 스칼라 장(scalar field)을 표현한다.

한편, 위의 표현식을 임의의 닫혀진 공간 $\mathbf{\Omega}^n$에 관하여 정의한다면 다음과 같이 쓸 수 있다. 즉,

$$\mathbf{o} = (A_1(p), A_2(p), \ldots, A_k(p)),\ p \in \mathbf{\Omega}^n,\ \mathbf{\Omega}^n \subset \mathbf{E}^n \tag{2}$$

여기서 닫혀진 공간 $\mathbf{\Omega}^n$은 볼륨 영역의 점 집합을 정의한다. 그리고 이 닫혀진 영역은 특별한 정규화 작업을 거쳐, 단위 크기를 가지는 입방체(unit cube)와 공간 변환 함수(transformation)에 의해 나타낼 수 있다. 여기서 변환 함수란 정의된 입방체에서 원래의 영역 $\mathbf{\Omega}^n$으로 이동시켜 주는 사상(mapping) 함수를 말한다. 즉,

$$p = \mathbf{T}(p_{cube}),\ p_{cube} \in [0, 1]^n \tag{3}$$

여기서 $p_{cube}$는 입방체 내부의 임의의 한 점이고, $\mathbf{T}$는 공간 변환 함수를 의미한다.

한편, 본 연구에서 제시하는 VNURBS은 위에서 설명한 볼륨 표현 방식의 구성 요소를 모두 가지고 있다. 즉 $n$차원 공간에서 $k$개의 속성을 표현하는 스칼라 함수의 집합을 가지고 있으며, 단위 크기의 입방체와 공간 변환 함수를 가지고 있다. VNURBS의 매개변수 공간이 $n$차원의 볼륨 공간을, 조정점의 구성 요소가 $k$개의 속성을 표현하며, VNURBS의 절점 벡터 영역이 단위 크기의 입방체를, 그리고 볼륨 함수 자체가 스칼라 함수 및 공간 변환 함수의 역할을 수행한다.

### 3.2 VNURBS의 유도 및 정의

본 연구에서 제시하는 NURBS기반의 표현식은 아래의 $u$ 방향의 매개변수 식에서 출발한다. 즉,

$$A(u) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i N_i^k(u) \tag{4}$$

여기서 $A_i$은 $i$번째 위치한 조정값(control value)이라 부르며, $n$은 조정값의 개수, $k$는 차수(order)이다. 그리고 $N_i^k(u)$ 는 차수가 $k$인 정규화된 비스플라인 기저함수(normalized B-spline basis function)이다. 여기서 비스플라인 기저 함수는 절점 벡터(knot vector) $\mathbf{U} = \{u_i\}_{i=0}^{n+k-1}$ 상에서 정의된다.

위의 식 (4)는 본 연구의 볼륨 표현 모델을 유도하기 위한 기본 출발식으로, 다음의 두 가지 측면에서 확장되어 생성적 형태의 일반화된 볼륨 함수를 가진다. 여기서 두 가지 측면의 확장이란 $k$개의 속성을 서술하기 위한 속성(attribute) 방향으로의 확장과 $n$차원의 볼륨 공간을 정의하기 위한 차원(dimension) 방향으로의 확장을 말한다.

- 속성(attribute) 방향으로의 확장

위의 식 (4)는 $k$개의 속성을 갖기 위해 다음과 같이 확장된다. 즉,

$$A^1(u) = \sum A_i^1 N_i(u) \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} A^1(u) \\ A^2(u) \end{pmatrix} = \sum \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \end{pmatrix}_i N_i(u) \tag{6}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{pmatrix} A^1(u) \\ A^2(u) \\ \vdots \\ A^k(u) \end{pmatrix} = \sum \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^k \end{pmatrix}_i N_i(u) \tag{7}$$

여기서 식 (5), (6), (7)은 각각 1개, 2개, 그리고 $k$개의 속성을 가진다. 결국, $k$개의 속성을 가지는 1차원의 표현식 (7)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{A}(u) = \sum \mathbf{A}_i N_i(u) \tag{8}$$

여기서 $\mathbf{A}(u) = \begin{pmatrix} A^1(u) \\ A^2(u) \\ \vdots \\ A^k(u) \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^k \end{pmatrix}_i$ 이다.

• 차원(dimension) 방향으로의 확장

위의 식 (8)은 $n$차원의 볼륨 공간을 갖기 위해 다음과 같이 확장된다. 즉,

$$\mathbf{A}(u_1) = \sum_{i_1} \mathbf{A}_{i_1} N_{i_1}(u_1) \tag{9}$$

$$\mathbf{A}(u_1, u_2) = \sum_{i_1} \mathbf{A}_{i_1}(u_2) N_{i_1}(u_1)$$
$$= \sum_{i_1}\sum_{i_2} \mathbf{A}_{i_1 i_2} N_{i_2}(u_2) N_{i_1}(u_1) \tag{10}$$

.........

$$\mathbf{A}(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} \mathbf{A}_{i_1 \ldots i_{n-1}}(u_n) N_{i_{n-1}}(u_{n-1}) \ldots N_{i_1}(u_1)$$
$$= \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} \mathbf{A}_{i_1 \ldots i_n} N_{i_n}(u_n) \ldots N_{i_1}(u_1) \tag{11}$$

여기서 식 (9), (10), (11)은 각각 1차원, 2차원, 그리고 $n$차원의 볼륨 공간을 가진다. 결국, $k$개의 속성을 가지는 $n$차원의 표현식 (11)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{I}} \mathbf{A}_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u}) \tag{12}$$

여기서 $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}(u_1, \ldots, u_n)$, $\mathbf{A}_{\mathbf{I}} = \mathbf{A}_{i_1 \ldots i_n}$,

$\mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u}) = N_{i_1}(u_1) \ldots N_{i_n}(u_n)$, $\sum_{\mathbf{I}} = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n}$ 이다.

한편, 위의 식 (12)는 비유리(non-rational) 형태이며, 이를 다음과 같은 유리(rational) 표현식으로 확장할 수 있다. 즉,

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{\mathbf{I}} h_{\mathbf{I}} \mathbf{A}_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u})}{\sum_{\mathbf{I}} h_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u})} = \sum_{\mathbf{I}} \mathbf{A}_I \frac{h_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u})}{\sum_{\mathbf{J}} h_{\mathbf{J}} \mathbf{N}_{\mathbf{J}}(\mathbf{u})}$$
$$= \sum_{\mathbf{I}} \mathbf{A}_{\mathbf{I}} \mathbf{R}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u}) \tag{13}$$

여기서 $\mathbf{R}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u}) = \dfrac{h_{\mathbf{I}} \mathbf{N}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u})}{\sum_{\mathbf{J}} h_{\mathbf{J}} \mathbf{N}_{\mathbf{J}}(\mathbf{u})}$ 이고, $h_{\mathbf{I}}$는 동차 좌표 (homogeneous coordinate)라고 부르며 I번째 조정점의 가중치(weight) 값으로 사용한다.

결국, 이와 같은 확장을 통하여 다음과 같은 NURBS기반의 볼륨 표현 모델을 얻는다.

### NURBS기반 볼륨 표현 모델 (Volumetric NURBS representation or VNURBS)

$$\mathbf{A}(u_1, \ldots, u_n) = \begin{pmatrix} A^1(u_1, \ldots, u_n) \\ \vdots \\ A^k(u_1, \ldots, u_n) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sum_{i_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{n_n-1} \begin{pmatrix} hA^1 \\ \vdots \\ hA^k \end{pmatrix}_{i_1 \ldots i_n} N_{i_1}^{k_1}(u_1) \ldots N_{i_n}^{k_n}(u_n)}{\sum_{i_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{n_n-1} h_{i_1 \ldots i_n} N_{i_1}^{k_1}(u_1) \ldots N_{i_n}^{k_n}(u_n)} \tag{14}$$

여기서 $n_i$와 $k_i$는 $u_i$ 방향으로의 조정점의 개수 및 차수(order)이다. 그리고 위의 식 (14)는 아래의 절점 벡터 상에서 정의된다. 즉,

$$u_1 \text{ 방향 절점 벡터, } \mathbf{U}_1 = \{u_{i_1}\}_{i_1=0}^{i_1 = n_1 + k_1 - 1} \tag{15}$$

.........

$$u_n \text{ 방향 절점 벡터, } \mathbf{U}_n = \{u_{i_n}\}_{i_n=0}^{i_n = n_n + k_n - 1} \tag{16}$$

참고로, 위의 식 (14)로부터 CAD/CAM분야 등에서 널리 사용되고 있는 NURBS곡선 및 곡면을 식 (14)의 특수한 경우로서 다음과 같이 생성할 수 있다. 즉, $n = 1$, $\mathbf{u} = t$, $k = 3$, $\mathbf{A}_{\mathbf{I}} = (x_i, y_i, z_i)$일 때, 다음의 NURBS곡선을 얻을 수 있으며,

$$\mathbf{A}_C(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{\sum_i \begin{pmatrix} hx \\ hy \\ hz \end{pmatrix}_i N_i(t)}{\sum_i h_i N_i(t)} \tag{17}$$

$n = 2$, $\mathbf{u} = (u, v)$, $k = 3$, $\mathbf{A}_{\mathbf{I}} = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$일 때, 다음의 NURBS곡면을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{A}_S(u, v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \frac{\sum_i \sum_j \begin{pmatrix} hx \\ hy \\ hz \end{pmatrix}_{ij} N_i(u) N_j(v)}{\sum_i \sum_j h_{ij} N_i(u) N_j(v)} \tag{18}$$

이밖에 이러한 방식으로 NURBS부피 및 이것에 기초한 NURBS기반의 유동 가시화 표현식[27] 등을 정의할 수 있다.

### 3.3 VNURBS의 미분식 계산 알고리즘

본 연구에서 제시하는 볼륨 표현 모델의 미분식 알고리즘은 deBoor[28]의 비스플라인(B-spline) 함수에 관한 반복식으로부터 다음과 같이 확장하여 유도할 수 있다. 이 미분식은 볼륨 영역에서 수행되는 여러 형태의 볼륨 모델링 및 렌더링 등의 성공적 작업을 위하여 기초적으로 제공되어야 할 기본 계산을 안정적이면서 효율적으로 제공해 준다. 먼저, 비유리(non-rational) 볼륨 표현식에 관한 미분식 알고리즘을 소개하면 다음과 같다.

임의의 위치 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$가 $n$개의 절점 벡터 $\mathbf{U}_1 = \{u_{i_1}\}_{i_1=0}^{i_1=n_1+k_1-1}, \ldots, \mathbf{U}_n = \{u_{i_n}\}_{i_n=0}^{i_n=n_n+k_n-1}$ 상에서 $u_1 \in [u_{I_1}, u_{I_1+1}], \ldots, u_n \in [u_{I_n}, u_{I_n+1}]$에 속할 때, 본 연구 볼륨 모델의 비유리 표현식

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) = \sum_{i_1} \cdots \sum_{i_n} \hat{\mathbf{A}}_{i_1 \ldots i_n} N_{i_1}^{k_1}(u_1) \ldots N_{i_n}^{k_n}(u_n) \quad (19)$$

을 $u_1$에 대해 $r_1$번, ……, $u_n$에 대해 $r_n$번, 미분 하였을 때의 미분식

$$\frac{\partial}{\partial u_1^{r_1}} \frac{\partial}{\partial u_2^{r_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial u_n^{r_n}} (\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u})) = \hat{\mathbf{A}}^{(r_1, r_2, \ldots, r_n)}(u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad (20)$$

는 다음과 같은 반복식(recursive formula)에 의해 구해진다. 즉,

$$\hat{\mathbf{A}}^{(r_1, r_2, \ldots, r_n)}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{i_1 = I_1 - k_1 + r_1}^{I_1} \cdots \sum_{i_n = I_n - k_n + r_n}^{I_n} \hat{\mathbf{A}}_{i_1, \ldots, i_n}^{(r_1, \ldots, r_n)} N_{i_1}^{k_1 - r_1}(u_1) \ldots N_{i_n}^{k_n - r_n}(u_n) \quad (21)$$

여기서

$$\hat{\mathbf{A}}_{i_1, \ldots, i_n}^{(r_1, \ldots, r_n)} = (k_1 + 1 - r_1) \frac{\hat{\mathbf{A}}_{i_1, \ldots, i_n}^{(r_1 - 1, \ldots, r_n)} - \hat{\mathbf{A}}_{i_1 - 1, \ldots, i_n}^{(r_1 - 1, \ldots, r_n)}}{u_{i_1 + k_1 + 1 - r_1} - u_{i_1}} \quad (22)$$

………

$$\hat{\mathbf{A}}_{i_1, \ldots, i_n}^{(r_1, \ldots, r_n)} = (k_n + 1 - r_n) \frac{\hat{\mathbf{A}}_{i_1, \ldots, i_n}^{(r_1, \ldots, r_n - 1)} - \hat{\mathbf{A}}_{i_1, \ldots, i_n - 1}^{(r_1, \ldots, r_n - 1)}}{u_{i_n + k_n + 1 - r_n} - u_{i_n}} \quad (23)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{i_1, \ldots, i_n}^{(0, \ldots, 0)} = \hat{\mathbf{A}}_{i_1, \ldots, i_n} \quad (24)$$

위의 반복식의 계산 과정을 간략히 살펴보면 다음의 순서에 의해 계산된다. 즉,

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{A}}^{(0,0,\ldots,0)}(\mathbf{u}) \\
&\hat{\mathbf{A}}^{(1,0,\ldots,0)}(\mathbf{u}), \ldots, \hat{\mathbf{A}}^{(r_1,0,\ldots,0)}(\mathbf{u}) \\
&\hat{\mathbf{A}}^{(0,1,\ldots,0)}(\mathbf{u}), \ldots, \hat{\mathbf{A}}^{(0,r_2,\ldots,0)}(\mathbf{u}) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\hat{\mathbf{A}}^{(0,0,\ldots,r_n)}(\mathbf{u}), \ldots, \hat{\mathbf{A}}^{(0,0,\ldots,r_n)}(\mathbf{u}) \\
\\
&\hat{\mathbf{A}}^{(1,1,0,\ldots,0)}(\mathbf{u}), \ldots, \hat{\mathbf{A}}^{(r_1,r_2,0,\ldots,0)}(\mathbf{u}) \\
&\hat{\mathbf{A}}^{(1,0,1,\ldots,0)}(\mathbf{u}), \ldots, \hat{\mathbf{A}}^{(r_1,0,r_2,\ldots,0)}(\mathbf{u}) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\hat{\mathbf{A}}^{(1,0,0,\ldots,1)}(\mathbf{u}), \ldots, \hat{\mathbf{A}}^{(r_1,0,0,\ldots,r_n)}(\mathbf{u}) \\
\\
&\hat{\mathbf{A}}^{(1,1,1,0,\ldots,0)}(\mathbf{u}), \ldots, \hat{\mathbf{A}}^{(r_1,r_2,r_3,0,\ldots,0)}(\mathbf{u}) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\hat{\mathbf{A}}^{(1,1,1,1,0,\ldots,0)}(\mathbf{u}), \ldots, \hat{\mathbf{A}}^{(r_1,r_2,r_3,r_4,0,\ldots,0)}(\mathbf{u}) \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&\hat{\mathbf{A}}^{(1,1,1,1,1,\ldots,1)}(\mathbf{u}), \ldots, \hat{\mathbf{A}}^{(r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,\ldots,r_n)}(\mathbf{u})
\end{aligned} \quad (25)$$

그리고 유리화 형태를 가진 본 연구의 볼륨 표현식 (14)는 식 (19)을 사용하여 다음과 같이 정의할 수 있다. 즉,

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \frac{\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u})}{h(\mathbf{u})} \quad (26)$$

위의 식 (26)을 $u_i$ 방향으로 $r_i$번 $(i = 1, \ldots, n)$ 미분 하였을 때의 미분식

$$\frac{\partial}{\partial u_1^{r_1}} \frac{\partial}{\partial u_2^{r_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial u_n^{r_n}} (\mathbf{A}(\mathbf{u})) = D_{u_1}^{r_1} D_{u_2}^{r_2} \ldots D_{u_n}^{r_n} (\mathbf{A}(\mathbf{u})) \quad (27)$$

은 다음과 같이 구해진다.

**NURBS기반 볼륨 표현 모델의 미분식**
**(Derivatives of Volumetric NURBS)**

$$D_{u_1}^{r_1} D_{u_2}^{r_2} \ldots D_{u_n}^{r_n} \left( \frac{\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u})}{h(\mathbf{u})} \right) = \frac{\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u})}{h(\mathbf{u})} \quad (28)$$

여기서

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}) = D_{u_1}^{r_1} \ldots D_{u_n}^{r_n} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u})$$

$$-\sum_{i_n=1}^{r_n}\binom{r_n}{i_n}\cdots\sum_{i_1=0}^{r_1}\binom{r_1}{i_1}D_{u_1}^{r_1-i_1}\ldots D_{u_n}^{r_n-i_n}\mathbf{A}(\mathbf{u})D_{u_1}^{i_1}\ldots D_{u_n}^{i_n}h(\mathbf{u})$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$-\sum_{i_2=1}^{r_2}\binom{r_2}{i_2}\sum_{i_1=0}^{r_1}\binom{r_1}{i_1}D_{u_1}^{r_1-i_1}D_{u_2}^{r_2-i_2}D_{u_3}^{r_3}\ldots D_{u_n}^{r_n}\mathbf{A}(\mathbf{u})D_{u_1}^{i_1}D_{u_2}^{i_2}h(\mathbf{u})$$

$$-\sum_{i_1=1}^{r_1}\binom{r_1}{i_1}D_{u_1}^{r_1-i_1}D_{u_2}^{r_2}\ldots D_{u_n}^{r_n}\mathbf{A}(\mathbf{u})D_{u_1}^{i_1}h(\mathbf{u}) \qquad (29)$$

그리고 $D_{u_1}^{r_1}\ldots D_{u_n}^{r_n}\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u})$ 와 $D_{u_1}^{r_1}\ldots D_{u_n}^{r_n}h(\mathbf{u})$ 는 앞에서 언급한 비유리 표현식의 미분 반복식 (21)을 사용하여 구할 수 있다.

## 4. VNURBS의 특성 및 적용 범위

본 연구에서 제시하는 NURBS기반의 볼륨 표현 모델은 볼륨 영역을 생성적으로 서술할 수 있는 일반화된 형태의 볼륨 표현식이다. 즉, 식 (2)와 (3)에서 언급한 일반화된 생성적 형태를 가지고 있다. 다시 말해, 임의의 $n$차원의 볼륨 공간, 그리고 그 내부에 존재하는 임의의 $k$개의 속성(attribute fields)을 표현할 수 있다. 여기서 생성적 형태란 그 적용 분야의 특성에 맞게 표현식을 특성화시킬 수 있고, 또한 특성화된 표현식을 그 응용 범위의 확대에 따라 목적에 맞게 일반화 시킬 수 있다. 이를 좀더 자세히 설명하면 다음과 같다.

본 연구 표현식 (14)의 조정점 항인 $\mathbf{A}_\mathbf{I}$을 관심 분야의 설계 변수(design field variables)로 설정함으로써, 여러 가지 목적의 볼륨 표현식을 얻을 수 있다. 즉,

- 형상 모델링에 관심이 있는 경우

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \sum_\mathbf{I}\mathbf{B}_\mathbf{I}\mathbf{R}_\mathbf{I}(\mathbf{u}) = \sum_\mathbf{I}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_\mathbf{I}\mathbf{R}_\mathbf{I}(\mathbf{u}) \qquad (30)$$

또는 $\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \sum_\mathbf{I} b_\mathbf{I}\mathbf{R}_\mathbf{I}(\mathbf{u}) = \sum_\mathbf{I} distance_\mathbf{I}\mathbf{R}_\mathbf{I}(\mathbf{u})$ (31)

여기서 $distance_\mathbf{I}$는 거리(distance) 개념의 스칼라 값으로 음함수 모델의 Distance field[29] 함수와 유사하다. 식 (30)의 대표적 적용 분야로서 곡선형 좌표계(curvilinear coordinate system) 및 격자 생성(grid generation) 등을 살펴볼 수 있고, 식 (31)은 음함수 곡면의 표현 및 모델링 분야에 적용 가능한 표현식을 제공할 수 있다.

- 볼륨 렌더링에 관심이 있는 경우

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = \sum_\mathbf{I}\mathbf{C}_\mathbf{I}\mathbf{R}_\mathbf{I}(\mathbf{u}) = \sum_\mathbf{I}\begin{pmatrix}r\\g\\b\\\alpha\\\vdots\end{pmatrix}_\mathbf{I}\mathbf{R}_\mathbf{I}(\mathbf{u}) \qquad (32)$$

여기서 $(r, g, b)$는 색깔(color)을, $\alpha$는 불투명도(opacity)를 나타내며, 이밖에 Phong illumination model을 위한 (ambient, diffuse, specular) 반사 계수 등이 존재할 수 있다. 식 (32)의 적용 분야로서 볼륨 렌더링 및 이미지 모핑(image morphing) 등을 살펴볼 수 있다.

- 물리적 성질의 분포에 관심이 있는 경우 (예: 밀도, 속도, 온도, 압력 등)

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \sum_\mathbf{I}\mathbf{D}_\mathbf{I}\mathbf{R}_\mathbf{I}(\mathbf{u}) = \sum_\mathbf{I}\begin{pmatrix}\rho\\\mathbf{V}\\T\\p\\\vdots\end{pmatrix}_\mathbf{I}\mathbf{R}_\mathbf{I}(\mathbf{u}) \qquad (33)$$

여기서 $\rho$는 밀도, $\mathbf{V}$는 속도벡터, $T$는 온도, $p$는 압력 등을 나타낸다. 식 (33)의 대표적 적용 분야로서 유동 가시화 등을 포함한 과학적 데이터 가시화 분야를 살펴볼 수 있다.

이상과 같이, 제시된 표현식들은 그 목적하는 바에 따라서 사용 변수의 물리적 해석만 다를 뿐, 근본적으로 하나의 형태를 가진다. 결국, 이들 특수 목적의 볼륨식들은 다음과 같이 하나의 표현식으로 나타낼 수 있다. 즉,

- 같은 절점 벡터를 사용하는 경우

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix}\mathbf{B}(\mathbf{u})\\\mathbf{C}(\mathbf{u})\\\mathbf{D}(\mathbf{u})\\\vdots\end{pmatrix} = \sum_\mathbf{I}\begin{pmatrix}\mathbf{B}\\\mathbf{C}\\\mathbf{D}\\\vdots\end{pmatrix}\mathbf{R}_\mathbf{I}(\mathbf{u})$$

$$= \sum_\mathbf{I}\begin{pmatrix}x, y, z, \ldots\\r, g, b, \alpha, \ldots\\\rho, \mathbf{V}, T, p, \ldots\\\vdots\end{pmatrix}_\mathbf{I}\mathbf{R}_\mathbf{I}(\mathbf{u}) \qquad (34)$$

여기서 $n_A$ 차원의 경우, $\mathbf{A}(\mathbf{u})$의 절점 벡터는 다음과

같이 정의된다.

$$\mathbf{U}_j^A = \{u_{i_j}^A\}_{i_j=0}^{i_j=n_j^A+k_j^A-1}, \quad j=1,\ldots,n_A \tag{35}$$

• 다른 절점 벡터를 사용하는 경우

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{C}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{D}(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{\mathbf{I}_B}^{\mathbf{N}_B} \mathbf{B}_{\mathbf{I}_B}\mathbf{R}_{\mathbf{I}_B}(\mathbf{u}) \\ \sum_{\mathbf{I}_C}^{\mathbf{N}_C} \mathbf{C}_{\mathbf{I}_C}\mathbf{R}_{\mathbf{I}_C}(\mathbf{u}) \\ \sum_{\mathbf{I}_D}^{\mathbf{N}_D} \mathbf{D}_{\mathbf{I}_D}\mathbf{R}_{\mathbf{I}_D}(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{36}$$

또는

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \sum_{\mathbf{I}_B}^{\mathbf{N}_B} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ \vdots \end{pmatrix}_{\mathbf{I}_B} \mathbf{R}_{\mathbf{I}_B}(\mathbf{u}) \\ \sum_{\mathbf{I}_C}^{\mathbf{N}_C} \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \\ \alpha \\ \vdots \end{pmatrix}_{\mathbf{I}_C} \mathbf{R}_{\mathbf{I}_C}(\mathbf{u}) \\ \sum_{\mathbf{I}_D}^{\mathbf{N}_D} \begin{pmatrix} \rho \\ \mathbf{V} \\ T \\ p \\ \vdots \end{pmatrix}_{\mathbf{I}_D} \mathbf{R}_{\mathbf{I}_D}(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{37}$$

여기서 **B(u)**, **C(u)**, **D(u)**의 절점 벡터들은 각각 다음과 같이 정의된다.

**B(u)**의 절점 벡터($n_B$차원의 경우)

$$\mathbf{U}_j^B = \{u_{i_j}^B\}_{i_j=0}^{i_j=n_j^B+k_j^B-1}, \quad j=1,\ldots,n_B \tag{38}$$

**C(u)**의 절점 벡터($n_C$ 차원의 경우)

$$\mathbf{U}_j^C = \{u_{i_j}^C\}_{i_j=0}^{i_j=n_j^C+k_j^C-1}, \quad j=1,\ldots,n_C \tag{39}$$

**D(u)**의 절점 벡터($n_D$차원의 경우)

$$\mathbf{U}_j^D = \{u_{i_j}^D\}_{i_j=0}^{i_j=n_j^D+k_j^D-1}, \quad j=1,\ldots,n_D \tag{40}$$

한편, 관련 연구에서 언급한 CHM[25](constructive hypervolume modeling) 및 CVG[23](constructive volume geometry)의 경우, 각각 그 관심 영역의 특성에 따라 볼륨 영역을 다음과 같이 분류하여 설명한다.

$$\mathbf{o}_{CHM} = (\textit{geometry fields, non-geometric fields}) \tag{41}$$

$$\mathbf{o}_{CVG} = (\textit{graphical fields, non-graphical fields}) \tag{42}$$

즉 CHM의 경우, F-rep에 기반을 두어 대상 물체의 기하학적 형상 표현에 그 중심을 두고 있으며, CVG의 경우, 불투명도(opacity) 값에 의한 가시성 표현을 필수 요소로 설명하고 있다. 이상의 두 표현 모델은 앞에서 설명한 전개 방식에 의해 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다. 즉,

$$\mathbf{A}_{CHM}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \sum_{\mathbf{I}} \mathbf{B}_{\mathbf{I}}\mathbf{R}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u}) \\ \sum_{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix}_{\mathbf{J}} \mathbf{R}_{\mathbf{J}}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \tag{43}$$

$$\mathbf{A}_{CVG}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \sum_{\mathbf{I}} \mathbf{C}_{\mathbf{I}}\mathbf{R}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u}) \\ \sum_{\mathbf{J}} \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix}_{\mathbf{J}} \mathbf{R}_{\mathbf{J}}(\mathbf{u}) \end{pmatrix} \tag{44}$$

사실, 이 두 표현 모델은 앞에서 언급한 것처럼, 그 중심 위치에 놓여 있는 속성의 물리적 해석이 다를 뿐이지, 그 근본적인 표현 구조는 유사하다고 말할 수 있다.

한편, $\mathbf{A}_\mathbf{I}$의 그 수학적 성질에 따라 다음과 같은 형태를 생각해 볼 수 있다. 즉,

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{I}} \begin{pmatrix} \textit{scalar} \\ \textit{vector} \\ \textit{tensor} \\ \vdots \end{pmatrix}_{\mathbf{I}} \mathbf{R}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u}) \tag{45}$$

여기서 *scalar*는 밀도, 온도, 압력 등과 같은 스칼라를 의미하며, *vector*는 속도, 힘, 변위 등과 같은 벡터를 의미한다. 그리고 *tensor*는 응력(stress) 등과 같은 텐서를 가리킨다.

또한, $\mathbf{A}_\mathbf{I}$가 사용하는 변수의 형식(type)에 따라 다음과 같은 형태를 생각해 볼 수 있다. 즉,

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{I}} \begin{pmatrix} \textit{boolean} \\ \textit{integer} \\ \textit{real} \\ \vdots \end{pmatrix}_{\mathbf{I}} \mathbf{R}_{\mathbf{I}}(\mathbf{u}) \tag{46}$$

여기서 *boolean*은 불리안, *integer*은 정수, *real*은 실수 영역의 변수를 나타낸다.

또한 볼륨 영역을 그 내부에 존재하는 점의 집합으로 국한시키지 않고, 임의의 객체로 확장할 경우, 다음과 같은 형태를 생각해 볼 수 있다. 즉,

$$\mathbf{A(u)} = \sum_{\mathbf{I}} \begin{pmatrix} \textit{image object} \\ \textit{point object} \\ \textit{curve object} \\ \textit{surface object} \\ \textit{volume object} \\ \vdots \end{pmatrix}_{\mathbf{I}} \mathbf{R_I(u)} \qquad (47)$$

위의 식 (47)은 특정 형태의 객체를 보간하는 방식으로, 임의의 위치에서의 중간 형태의 객체를 추출하는 응용 분야에 적용 가능한 표현식이다. 예를 들어의 경우, Image-swept volume[8] 모델의 생성을 통하여 이미지 모핑(morphing) 등의 작업을 수행할 수 있다.

이상과 같이, 여러 형식의 혹은 다양한 형태의 변수들을 사용하여 그 응용 목적에 맞게 수정하여, 표현하고자 하는 볼륨의 상태 및 더 나아가 구현하고자 하는 작업의 기능까지도 구조적으로 구분하여 서술할 수 있다. 즉, 목적하는 바를 $\mathbf{A_I}$을 통하여 기술하고, 이를 본 연구에서 제시하는 NURBS기반의 볼륨 표현식에 삽입함으로써, 다목적의 기능 및 상태를 여러 가지의 서로 다른 표현식이 아닌 하나의 표현식에 의해 충분히 표현할 수 있는 것이다. 객체지향형 프로그래밍 측면에서 하나의 범용 클래스를 설계하고, 이로부터 그 응용 목적에 부합하는 유도 클래스 등을 각기 설계하여, 이들 간의 자료 구조 상의 필요한 연결 혹은 조합을 통하여, 각 응용 분야에서 정의되는 고유한 기능 등을 구현할 수 있으며, 또한 범용성을 갖춘 프로그램 아키텍처(혹은 커널 라이브러리)를 설계할 수 있다.

## 5. 결 론

본 연구에서는 VNURBS 표현식 자체의 수학적 정의 및 미분식 계산 알고리즘을 소개하였고, 그 특성 및 적용 범위에 관해 기술하였다. 그리고 이를 통하여 VNURBS가 볼륨 표현 모델로서 일반화된 형태의 표현 방식임을 확인할 수 있었고, 더불어 응용성 및 확장성 등을 가진 커널 프레임 구조임을 확인할 수 있었다. 결국 VNURBS는 다음의 같은 성질과 목적(가치)를 가진다고 정리할 수 있다.

즉, 본 연구에서 제시한 볼륨 표현식인 VNURBS는 기존의 NURBS 곡선 및 곡면의 확장 형태로서, 임의의 *n*차원 공간 속에 존재하는 *k*개의 속성을 가진 점 집합을 표현하는 매개변수 형태의 볼륨 함수이다. 그리고 기존의 관련 연구에서 보여주었던 여러 형태의 볼륨 표현식을 모두 포함할 수 있는 일반화된 형태의 표현식이다. 또한 적용 분야의 특성에 맞게 표현식을 특성화시킬 수 있고 동시에 특성화된 표현식을 그 응용 범위의 확대에 따라 목적에 맞게 확장 시킬 수 있는 다변형의 특성을 가진 생성적 형태의 볼륨 함수이다. 즉, VNURBS의 조정점을 응용 분야의 목적에 맞게 설계함으로써 다분야의 데이터 통합을 구현할 수 있다.

한편, 본 연구에서는 구체적으로 VNURBS의 생성 방법이나 모델링 기능, 그리고 가시화를 위한 렌더링 기법 등에 관해 소개하지 않았다. 그러나 VNURBS는 기존의 NURBS곡선 및 곡면을 볼륨 영역으로 확장한 형태임으로 기 연구된 NURBS 관련 성질 및 알고리즘 등을 기반 연구로 활용한다면, 여러 관련 분야에서 다양한 형태의 모델링 기능 및 렌더링 기법 등을 충분히 구현할 수 있다. 예를 들어 추후 연구 과제로서 다음의 기능 구현이 필요하다. VNURBS 생성 방법으로 분산형 볼륨 데이터의 근사법, 격자형 볼륨 데이터의 보간법 등이 있고, 모델링 기능으로 음함수 곡면 모델링 분야에서 대표적으로 수행되는 합집합, 교집합 등의 불리안 기능이 있으며, 볼륨 데이터 가시화 방법으로 등곡면 방법, 볼륨 렌더링 방법 등이 있다.

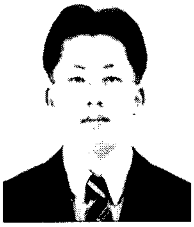
## 감사의 글

이 논문은 정부(교육인적자원부)의 재원으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 수행된 연구임(R05-2004-000-10448-0).

## 참고문헌

1. Greene, B., *The Elegant Universe: Superstrings, Hidden Dimensions, and the Quest for the Ultimate Theory*, Vintage Books, 2000.
2. Piegl, L. and Tiller, W., *The NURBS Book*, Springer-Verlag, 1995.
3. Nielson, G. M., "Volume Modeling", In *Volume Graphics*, Springer, 2000.
4. Foley, J. D., van Dam, A., Feiner, S. K. and Hughes, J. F., *Computer Graphics: Principles and Practice*, Addison-Wesley, Second Edition, 1996.
5. Herbert, F., "Solid Modeling Using a Volume Encoding Data Structure", *Computers & Graphics*, Vol.

7, pp. 97-99, 1983.
6. Fuchs, H., Kedem, Z. M. and Naylor, B. F., "On Visible Surface Generation by a Priori Tree Structures", *Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH 80)*, Vol. 14, No. 3, pp. 124-133, July 1980.
7. Wu, Z., Seah, H. S. and Lin, F., "NURBS Volume for Modeling Complex Objects", In *Volume Graphics*, Springer, 2000.
8. Winter, A. S. and Chen, M., "Image-swept Volumes", *Computer Graphics Forum*, Vol. 21, No. 3, pp. 441-450, 2002.
9. Requicha, A. A. G., "Representations for Rigid Solids: Theory, Methods, and Systems", *ACM Computing Surveys*, Vol. 12, No. 4, pp. 437-464, December 1980.
10. Mitchell, D. P. and Netravali, A. N. "Reconstruction Filters in Computer Graphics", *Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH 88)*, Vol. 22, No. 4, pp. 221-228, August 1988.
11. Wilhelms, J. and Challinger, J., "Direct Volume Rendering of Curvilinear Volumes", *Computer Graphics (San Diego Workshop on Volume Visualization)*, Vol. 24, No. 5, pp. 41-47, November 1990.
12. Silva, S., Mitchell, J. S. B. and Kaufman, A. E., "Fast Rendering of Irregular Grids", *Volume Visualization Symposium*, pp. 15-22, October 1996.
13. Blinn, J. F., "A Generalization of Algebraic Surface Drawing", *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 1, No. 3, pp. 235-256, July 1982.
14. Bloomenthal, J. *et al.*, *Introduction to Implicit Surfaces*, Morgan Kaufmann, 1997.
15. Pasko, A., Adzhiev, V., Sourin, A. and Savchenko, V., "Function Representation in Geometric Modeling: Concepts, Implementation and Applications", *The Visual Computer*, Vol. 11, No. 8, pp. 429-446, 1995.
16. Adzhiev, V., Cartwright, R., Fausett, E., Ossipov, A., Pasko, A. and Savchenko, V., "HyperFun Project: a Framework for Collaborative Multidimensional F-Rep Modeling", *Implicit Surfaces'99, Eurographics/ACM SIGGRAPH Workshop*, J. Jughes and C. Schlick (Eds.), ENSERB, France, pp. 59-69, 1999.
17. Perlin, K., "An Image Synthesizer", *Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH 85)*, Vol. 19, No. 3, pp. 287-296, July 1985.
18. Satherley, R. A. and Jones, M. W., "Extending Hypertextures to Non-geometrically Definable Volume Data", In *Volume Graphics*, Springer, 2000.
19. Rvachev, V. L., *Methods of Logic Algebra in Mathematical Physics*, Naukova Dumka Publishers, Kiev, Ukraine (in Russian), 1974.
20. Lorensen, W. E. and Cline, H. E., "Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm", *Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH 87)*, Vol. 21, No. 4, pp.163-169, July 1987.
21. Bloomenthal, J., "Polygonization of implicit surfaces", *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 5, No. 4, pp. 341-355, 1988.
22. Fang, S., Srinivasan, R. and Venkataraman, S., "Volumetric CSG - A Model-based Volume Visualization Approach", *Sixth International Conference in Central Europe on Computer Graphics and Visualization*, February 1998.
23. Chen, M. and Tucker, J. V., "Constructive Volume Geometry", *Computer Graphics Forum*, Vol. 19, No. 4, pp. 281-293, 2000.
24. Chen, M., Tucker, J. V. and Leu, A. A., "Constructive Representations of Volumetric Environments", In *Volume Graphics*, Springer, 2000.
25. Pasko, A., Adzhiev, V. and Schmitt, B., "Constructive Hypervolume Modeling", Technical Report TR-NCCA-2001-01, National Centre for Computer Animation, Bournemouth University, UK, February 2001.
26. Nadeau, D. R., "Volume Scene Graphs", *Volume Visualization Symposium*, October 2000.
27. Park, S. K. and Lee, K. W., "High-dimensional Trivariate NURBS Representation for Analyzing and Visualizing Fluid Flow Data", *Computers & Graphics*, Vol. 21, No. 4, pp. 473-482, 1997.
28. deBoor, C., "On Calculating with B-splines", *Journal of Approximation Theory*, Vol. 6, pp. 50-62, 1972.
29. Satherley, R. A., Computation and Applications of Distance Fields in Volume Graphics, PhD thesis, University of Wales, Swansea, 2001.



**박 상 근**

1991년 포항공과대학교 기계공학과 학사
1993년 서울대학교 기계설계학과 석사
1997년 서울대학교 기계설계학과 박사
1997년~1999년 삼성SDS 정보기술연구소 선임연구원
2000년 서울대 BK21 기계분야사업단 계약교수
2000년~2002년 (주)K&I 테크놀로지 전무기술이사
2003년~현재 국립충주대학교 기계공학과 조교수
관심분야: Computational Geometry, CAD/CAM, Scientific Data Visualization, Virtual Engineering