

시간 지연을 갖는 이산 시간 비선형 시스템에 대한 H^∞ 퍼지 강인 제어기 설계

Robust H^∞ Fuzzy Control for Discrete-Time Nonlinear Systems with Time-Delay

김택룡*, 박진배*, 주영훈**

Taek Ryong Kim*, Jin Bae Park*, and Young Hoon Joo**

* 연세대학교 전기전자공학과

** 군산대학교 전자정보공학부

요 약

본 논문에서는 시간 지연을 갖는 이산 시간 비선형 시스템을 H^∞ 의미에서 안정하게 하는 정적 출력 제한 퍼지 제어기 설계를 제시한다. 먼저 대상이 되는 비선형 시스템은 Takagi-Sugeno 퍼지 모델로 표현 되어진다. 그리고 parallel distributed compensation technique을 이용하여 퍼지 제어기의 형태를 만든다. 하나의 Lyapunov 함수를 정하여서 폐루프 시스템의 전역 점근적 안정성과 외란에 대한 강인성을 bilinear matrix inequality 형태로 제시한다. 그리고 합동변환법과 동질성 변환법을 통해 이것을 선형 행렬 부등식 (linear matrix inequality) 으로 표현한다. 제안된 방법의 효율성과 가능성을 보여주기 위해 한 예제를 포함한다.

Abstract

In this paper, a robust H^∞ stabilization problem to a uncertain discrete-time nonlinear systems with time-delay via fuzzy static output feedback is investigated. The Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model is employed to represent an uncertain nonlinear system with time-delayed state. Then, the parallel distributed compensation technique is used for designing of the robust fuzzy controller. Using a single Lyapunov function, the globally asymptotic stability and disturbance attenuation of the closed-loop fuzzy control system are discussed. Sufficient conditions for the existence of robust H^∞ controllers are given in terms of linear matrix inequalities via similarity transform and congruence transform technique. We have shown the effectiveness and feasibility of the proposed method through the simulation.

Key Words : time-delay, uncertain, fuzzy static output feedback, T-S fuzzy system, linear matrix inequality

1. 서 론

산업 현장에서 널리 쓰이는 대부분의 시스템은 강한 비선형성과 불확실성을 가지고 있으며, 이를 제어할 때에 어느 정도의 시간 지연이 발생 하게 된다. 따라서, 이런 비선형성과 불확실성, 그리고 시간 지연 상황에서 시스템을 제어하기 위한 많은 연구가 진행되어 왔다 [2-3]. 그 중에서 퍼지 제어는 복잡하고 불확실한 비선형 시스템을 제어하는데 성공적인 결과를 거두었다. 특히, 시스템의 모델이 불확실하면 할수록 더 복잡할수록 퍼지 제어는 더욱 그 가치를 발휘한다. 시간 지연을 갖는 선형 시스템에 대한 강인 제어기 설계 논문은 많이 있다 [1-3]. 그러나, 비선형 시스템에 대해서는 연구가 부족하다. 그것은 비선형 시스템의 복잡한 시스템 특성에 기인한다.

Cao 등은 처음으로 시간 지연이 있는 비선형 시스템을

Takagi-Sugeno (T-S) 퍼지 모델로 표현하고 그에 대한 안정도 분석 방법을 제안하였다 [2]. 이를 바탕으로 Lee등은 H^∞ 의미에서의 강인제어 기법을 동적 출력 제한 제어를 통해 달성하는 방법을 제시하였다 [3]. 그러나, 이 논문에서는 비선형 행렬 부등식을 풀어야 하므로 제어기의 설계가 매우 복잡하다는 단점을 갖는다.

L_0 는 퍼지 기법을 이용하여 비선형 시스템을 H^∞ 의미에서 정적 출력 제한 제어를 통해 강인 제어하는 방법을 제안하였다 [1]. 이때 시스템을 안정화시키는 충분조건으로 제시된 것은 선형 행렬 부등식(linear matrix inequality) 이다. 따라서, 제어기의 설계 문제가 현재의 컨벡스(convex) 알고리즘으로 쉽게 풀려질 수 있다. [6]에서는 L_0 가 제시한 방법을 시변 지연이 있는 연속 시간 시스템으로 확장시키는 방법을 제안하였다. 이 논문에서는 시변 지연을 갖는 비선형 연속 시간 시스템을 제어하기 위한 제어기 설계 문제를 성공적으로 선형 행렬 부등식으로 표현할 수 있음을 보였다.

본 논문에서는 [6]에서 제시한 방법을 시간 지연이 있는 이산 시간 비선형 시스템으로 확장하는 방법을 제안한다. 즉, 시간 지연을 가지는 이산 시간 비선형 시스템을 한정된 에너지를 가지는 외란이 있는 상황에서 H^∞ 의미에서 강인 제어

접수일자 : 2005년 4월 1일
완료일자 : 2005년 6월 2일

하기 위한 퍼지 제어를 설계하는 방법을 제안한다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에서 문제 설정을 하고 3장에서 이산 시간 시스템에 대한 H ∞ 퍼지 제어기 설계를 다룬다. 그리고 4장에서 모의 실험을 하며 끝으로 5장에서 결론을 내린다.

2. 문제 설정

T-S 퍼지 모델은 비선형 시스템의 범용 근사 연산자 (universal approximator) 로 알려져 있다. 따라서, 다음 T-S 퍼지 모델로 표현 되어지는 시간 지연을 가지는 이산 시간 비선형 시스템에 대해서 고려한다.

Plant Rule i

IF $\theta_1(t)$ is M_{i1} and ... and $\theta_n(t)$ is M_{in} ,

THEN

$$\begin{aligned} x(t+1) &= (A_i + \Delta A(t))x(t) + (A_{di} + \Delta A_d(t))x(t-d(t)) \\ &\quad + (B_{1i} + \Delta B_1(t))w(t) + (B_{2i} + \Delta B_2(t))u(t) \\ z(t) &= (C_i + \Delta C(t))x(t) + (C_{di} + \Delta C_d(t))x(t-d(t)) \\ &\quad + (D_{1i} + \Delta D_1(t))w(t) + (D_{2i} + \Delta D_2(t))u(t) \\ y(t) &= Ex(t), \quad i=1, \dots, r \\ x(t) &= 0, \quad t \leq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $\theta(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_n(t))$ 는 상태 변수 $x \in R^n$ 와 관제된 입력 변수들이며, $w(t) \in R^q$ 는 한정된 에너지를 가진 외란, $u(t) \in R^m$ 는 제어 입력 벡터, $y(t) \in R^m$ 는 측정되는 출력, $z(t) \in R^s$ 는 제어되는 출력, M_{i1}, \dots, M_{in} 은 입력 퍼지 집합, $(A_i, A_{di}, B_{1i}, B_{2i}, C_i, C_{di}, D_{1i}, D_{2i})$ 는 적절한 치수를 가진 상수 행렬들이다. d 는 시간 지연을 나타낸다.

모델의 불확실성을 나타내는 시변 행렬

$(\Delta A, \Delta A_d, \Delta B_1, \Delta B_2, \Delta C, \Delta C_d, \Delta D_1, \Delta D_2)$ 은 다음과 같이 정의 된다:

$$\begin{pmatrix} \Delta A & \Delta A_d & \Delta B_1 & \Delta B_2 \\ \Delta C & \Delta C_d & \Delta D_1 & \Delta D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \Delta(t) & (N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4) \\ M_z \Delta_z(t) & (N_{z1} \ N_{z2} \ N_{z3} \ N_{z4}) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

여기서, $(M, M_z, N_1, N_2, N_3, N_4, N_{z1}, N_{z2}, N_{z3}, N_{z4})$ 는 알려진 적절한 치수의 상수 행렬들이며, (Δ, Δ_z) 는 Lebesgue-measurable 요소를 가지는 다음을 만족하는 시변 행렬이다: $\Delta'(t)\Delta(t) \leq I, \Delta_z'(t)\Delta_z(t) \leq I$.

Remark 1 : 퍼지 모델 (1)은 원래의 비선형 시스템을 포함한다.

퍼지 모델 (1)의 최종 출력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t)) [(A_i + \Delta A(t))x(t) \\ &\quad + (A_{di} + \Delta A_d(t))x(t-d(t)) \\ &\quad + (B_{1i} + \Delta B_1(t))w(t) + (B_{2i} + \Delta B_2(t))u(t)] \\ z(t) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t)) [(C_i + \Delta C(t))x(t) \\ &\quad + (C_{di} + \Delta C_d(t))x(t-d(t)) \\ &\quad + (D_{1i} + \Delta D_1(t))w(t) + (D_{2i} + \Delta D_2(t))u(t)] \\ y(t) &= Ex(t) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, $\mu_i(\theta(t)) = w_i(\theta(t)) / \sum_{i=1}^r w_i(\theta(t))$,

$$w_i(\theta(t)) = \prod_{k=1}^n M_{ik}(\theta(t)) \text{ 이다.}$$

PDC 기법을 이용한 정적 출력 제한 퍼지 제어기의 최종 출력 형태는 다음과 같다:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t)) K_i y(t) \quad (4)$$

여기서, K_i 는 결정해야 하는 각 퍼지 규칙의 국부 이득이다. 표현의 간편성을 위해서 앞으로 μ_i 는 $\mu_i(\theta(t))$ 로 나타내며, 시변행렬에서 시간 인덱스를 나타내는 인자 t 는 생략한다.

퍼지 제어기 (4)를 (3)에 대입함으로써 페루프 시스템을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x(t+1) &= [A_\mu + B_{2\mu} K_\mu E + M \Delta (N_1 + N_4 K_\mu E)]x(t) \\ &\quad + (A_{d\mu} + M \Delta N_2)x(t-d(t)) \\ &\quad + (B_{1\mu} + M \Delta N_3)w(t) \\ z(t) &= [C_\mu + D_{2\mu} K_\mu E + M_z \Delta_z (N_{z1} + N_{z4} K_\mu E)]x(t) \\ &\quad + (C_{d\mu} + M_z \Delta_z N_{z2})x(t-d(t)) \\ &\quad + (D_{1\mu} + M_z \Delta_z N_{z3})w(t) \\ y(t) &= Ex(t) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서, $Y_\mu = \sum_{i=1}^r \mu_i Y_i$,

$Y_i \in \{A_i, A_{di}, B_{1i}, B_{2i}, C_i, C_{di}, D_{1i}, D_{2i}\}$ 이다.

본 논문에서 고려하는 H ∞ 의미에서의 강인 제어는 다음을 의미한다:

$$\sum_0^\infty z'(t)z(t) < \gamma^2 \sum_0^\infty w'(t)w(t) \quad (6)$$

정의 1 : H ∞ 퍼지 제어기는

- 1) 시스템 (1), (3)을 외란 $w(t)$ 가 존재하는 상황에서도 안정하게 한다.
- 2) 주어진 γ 에 대하여 초기조건이 0인 상황에서 페루프 시스템 (5)가 (6)를 만족하도록 해야 한다.

3. 이산시간 모델에 대한 H ∞ 퍼지 제어기

이 장에서는 시간 지연이 있는 이산 시간 비선형 시스템을 제어하기 위한 정의 1을 만족하는 H ∞ 퍼지 제어기 설계를 고려한다. 제어를 설계하는 방식은 [6]에서 연속시간 시스템에 적용한 것과 비슷하다. 정리 1에서 증명의 결과로 나오는 것은 흔히 정적 출력 제한 안정화 문제에서 일어나는 양선형 행렬 부등식 (bilinear matrix inequality) 이다. 즉 현재의 킨백스 알고리즘으로는 풀려질 수 없으며, 따라서 더 많은 작업이 요구된다.

정리 1 : 주어진 $\gamma > 0$ 에 대하여 다음 부등식을 만족하는 양한정 대칭 행렬 P, S 와 K_j 가 존재한다면 시스템 (1)은 H ∞ 의미에서 강인하게 안정화 되어 질 수 있다. 즉 (4)는 정의 1을 만족하는 H ∞ 퍼지 제어기이다.

$$\begin{cases} M_{ii} < 0, & i=1, \dots, r \\ \frac{1}{r-1} M_{ii} + \frac{1}{2} (M_{ij} + M_{ji}) < 0, & 1 \leq i \neq j \leq r \end{cases} \quad (7)$$

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} S-P & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -S & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * & * & * & * \\ \Gamma_{ij} & A_{di} & B_{1i} & -P^{-1} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 M & -\varepsilon_1 I & * & * & * & * & * \\ \Omega_j & N_2 & N_3 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & * & * & * & * \\ \Psi_{ij} & C_{di} & D_{1i} & 0 & 0 & 0 & -I & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 M_z & -\varepsilon_2 I & * & * \\ \Lambda_j & N_{z2} & N_{z3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & * \end{bmatrix}$$

여기서, $\Gamma_{ij} = A_i + B_{2i}K_jE$, $\Omega_j = N_1 + N_4K_jE$,
 $\Psi_{ij} = C_i + D_{2i}K_jE$, $\Lambda_j = N_{z1} + N_{z4}K_jE$ 이다.

증명 : 다음과 같은 Lyapunov 함수를 고려한다.

$$V(t) = x'(t)Px(t) + \sum_{\sigma=t-d}^{t-1} x'(\sigma)Sx(\sigma)$$

여기서 P 와 S 는 양한정 대칭 행렬이다. 시스템 (5)의 자취를 따르는 Lyapunov 함수의 차분은 다음과 같다:

$$\Delta V = x'(t+1)Px(t+1) - x'(t)Px(t) + x'(t)Sx(t) - x'(t-d)Sx(t-d)$$

이제 (7)이 다음 부등식을 만족하는 충분한 조건임을 보인다.

$$\Delta V + z'(t)z(t) - \gamma^2 w'(t)w(t) < 0 \quad (8)$$

$$\Delta V + z'(t)z(t) - \gamma^2 w'(t)w(t) \leq \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}'$$

$$\left(\begin{bmatrix} (A_\mu + B_{2\mu}K_\mu E + M\Delta(N_1 + N_4K_\mu E))' \\ (A_{d\mu} + M\Delta N_2)' \\ (B_{1\mu} + M\Delta N_3)' \end{bmatrix} \right)' P *$$

$$+ \begin{bmatrix} C_\mu + E'K_\mu D_{2\mu} + (N_{z1} + N_{z4}K_\mu E)' \Delta' z M_z \\ C_{d\mu} + N_{z2} \Delta' z M_z \\ D_{1\mu} + N_{z3} \Delta' z M_z \end{bmatrix} *$$

$$+ \begin{bmatrix} S-P & * & * \\ 0 & -S & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}$$

여기서 *은 대칭항을 표현한다.
 () 안에 Schur complement를 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} S-P & * & * & * \\ 0 & -S & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * \\ (A_\mu + B_{2\mu}K_\mu E) & A_{d\mu} & B_{1\mu} & -P^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\mu + E'K_\mu D_{2\mu} + (N_{z1} + N_{z4}K_\mu E)' \Delta' z M_z \\ C_{d\mu} + N_{z2} \Delta' z M_z \\ D_{1\mu} + N_{z3} \Delta' z M_z \\ 0 \end{bmatrix} * + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_z \end{bmatrix} \Delta [(N_1 + N_4K_\mu E) \ N_2 \ N_3 \ 0] + *$$

다음 행렬의 법칙을 3번째 항과 4번째 항에 적용한 후

$$M\Delta N + N\Delta' M \leq \varepsilon MM + \varepsilon^{-1}NN$$

다시 Schur complement를 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} S-P & * & * & * & * & * \\ 0 & -S & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * \\ (A_\mu + B_{2\mu}K_\mu E) & A_{d\mu} & B_{1\mu} & -P^{-1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 M & -\varepsilon_1 I & 0 \\ (N_1 + N_4K_\mu E) & N_2 & N_3 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\mu + E'K_\mu D_{2\mu} + (N_{z1} + N_{z4}K_\mu E)' \Delta' z M_z \\ C_{d\mu} + N_{z2} \Delta' z M_z \\ D_{1\mu} + N_{z3} \Delta' z M_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} *$$

Schur complement를 다시 적용하고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} S-P & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -S & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * \\ (A_\mu + B_{2\mu}K_\mu E) & A_{d\mu} & B_{1\mu} & -P^{-1} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 M & -\varepsilon_1 I & * & * \\ (N_1 + N_4K_\mu E) & N_2 & N_3 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & * \\ (C_\mu + D_{2\mu}K_\mu E) & C_{d\mu} & D_{1\mu} & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_z \end{bmatrix} \Delta_z [(N_{z1} + N_{z4}K_\mu E) \ N_{z2} \ N_{z3} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] + *$$

다시 행렬의 법칙을 2번째 항과 3번째 항에 적용한 후 Schur complement를 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} S-P & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -S & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * & * \\ (A_\mu + B_{2\mu}K_\mu E) & A_{d\mu} & B_{1\mu} & -P^{-1} & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 M & -\varepsilon_1 I & * & * & * \\ (N_1 + N_4K_\mu E) & N_2 & N_3 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & * & * \\ (C_\mu + D_{2\mu}K_\mu E) & C_{d\mu} & D_{1\mu} & 0 & 0 & 0 & -I & * \\ (N_{z1} + N_{z4}K_\mu E) & N_{z2} & N_{z3} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 M_z & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

위의 부등식 (9)는 다음과 같이 표현되어질 수 있다.

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i \mu_j M_{ij} < 0.$$

[5]에서 제시된 PLMI(parameteized linear matrix inequality) 기법을 이용하면 보다 덜 보수적이면서 계산하기 쉬운 (7)의 형태가 얻어진다. 그러므로 (7)은 (8)을 만족하기 위한 충분 조건임을 알 수 있으며, 또한 Lyapunov-Krasovskii 이론에 의해 페루프 시스템 (5)가 안정하기 위한 충분조건이기도 하다. 그리고 초기조건이 0인 상황에서 (8)의 양변을 $t=0$ 에서 ∞ 까지 더하면 다음과 같이 되므로 조건 (7)을 만족시키는 K_j 는 정의 1을 만족시킬 수 있다.

$$J_\infty = \sum_0^\infty [z'(t)z(t) - \gamma^2 w'(t)w(t)] dt < V(0) - V(\infty) \leq x'(0)Px(0) = 0$$

Q.E.D.

식 (7)은 앞서 언급한 바와 같이 현재의 컨벡스 알고리즘으로는 풀 수 없는 양선형 행렬 부등식이다. 따라서, 이를 선

행렬 부등식으로 바꾸는 작업이 필요하다. 여기에서는 [1]에서 제시한 방법과 유사하게 동질성 변환법과 합동 변환법을 통해 (7)을 선형 행렬 부등식 형태로 바꾼다.

먼저 새로운 상태 변수를 다음과 같이 정의 한다:

$$x = T\tilde{x}.$$

그러면, 페루프 시스템 (5)는 다음과 같이 변환 된다.

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t+1) &= [A_\mu + B_{2\mu}K_\mu E + M\Delta(N_1 + N_4K_\mu E)]\tilde{x}(t) \\ z(t) &= [C_\mu + D_{2\mu}K_\mu E + M_z\Delta_z(N_{z1} + N_{z4}K_\mu E)]\tilde{x}(t) \\ &\quad + (C_{d\mu} + M_z\Delta_z N_{z2})\tilde{x}(t-d(t)) \\ &\quad + (D_{1\mu} + M_z\Delta_z N_{z3})w(t) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, 변환된 시스템의 행렬들은 다음과 같이 정의되어진다.

$$\begin{aligned} A_\mu &= T^1 A_\mu T, \quad B_{2\mu} = T^1 B_{2\mu}, \quad A_{d\mu} = T^1 A_{d\mu} T, \\ B_{1\mu} &= T^1 B_{1\mu}, \quad C_\mu = C_\mu T, \quad C_{d\mu} = C_{d\mu} T, \quad E = ET, \\ M &= T^1 M, \quad N_1 = N_1 T, \quad N_2 = N_2 T, \quad N_{z1} = N_{z1} T, \\ N_{z2} &= N_{z2} T. \end{aligned}$$

$Q = P^{-1}$ 를 다음과 같이 두자.

$$Q_{n \times n} = \begin{bmatrix} Q_{1 \times 1} & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$

변환 행렬 T 는 다음 식을 만족하도록 정의 된다:

$$E = ET = [I_p \ 0]$$

즉 $T = [E(EE)^{-1}]_{n-p, \text{ortc}(E)}$ 이다. 여기서 $\text{ortc}(E)$ 은 E 의 직교여공간의 벡터들을 뜻한다.

정리 1을 식 (10)에 적용시키면 (10)을 안정화시키는 충분 조건은 다음과 같이 된다.

$$\begin{cases} M_{ii} < 0, & i=1, \dots, r \\ \frac{1}{r-1} M_{ii} + \frac{1}{2}(M_{ij} + M_{ji}) < 0, & 1 \leq i \neq j \leq r \end{cases} \quad (11)$$

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} S-P & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -S & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & * & * & * & * & * & * & * \\ \overline{T}_{ij} & \overline{A}_{di} & \overline{B}_{li} & -P^{-1} & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 M & -\varepsilon_1 I & * & * & * & * & * \\ \overline{\Omega}_j & \overline{N}_2 & N_3 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & * & * & * & * \\ \overline{\Psi}_{ij} & \overline{C}_{di} & D_{li} & 0 & 0 & 0 & -I & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 M_z & -\varepsilon_2 I & * & * \\ \overline{\Lambda}_j & \overline{N}_{z2} & N_{z3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overline{T}_{ij} &= A_i + B_{2i}K_j E, \quad \overline{\Omega}_j = N_1 + N_4 K_j E, \\ \overline{\Psi}_{ij} &= C_i + D_{2i}K_j E, \quad \overline{\Lambda}_j = N_{z1} + N_{z4} K_j E. \end{aligned}$$

$\Theta = \text{diag}[Q \ Q \ I \ I \ I \ I \ I \ I \ I]$ 를 정의하고 (11)의 양쪽에 곱하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{cases} \overline{M}_{ii} < 0, & i=1, \dots, r \\ \frac{1}{r-1} \overline{M}_{ii} + \frac{1}{2}(\overline{M}_{ij} + \overline{M}_{ji}) < 0, & 1 \leq i \neq j \leq r \end{cases} \quad (12)$$

$$\overline{M}_{ij} = \begin{bmatrix} X-Q & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & -X & * & * & * & * & * & * & * & * \\ \overline{T}_{ij} & \overline{A}_{di} & \overline{B}_{li} & -Q & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 M & -\varepsilon_1 I & * & * & * & * & * \\ \overline{\Omega}_j & \overline{N}_2 & N_3 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & * & * & * & * \\ \overline{\Psi}_{ij} & \overline{C}_{di} & D_{li} & 0 & 0 & 0 & -I & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 M_z & -\varepsilon_2 I & * & * \\ \overline{\Lambda}_j & \overline{N}_{z2} & N_{z3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{여기서 } \overline{T}_{ij} &= A_i Q + B_{2i} [F_j \ 0], \\ \overline{\Omega}_j &= N_1 Q + M [F_j \ 0], \quad \overline{\Psi}_{ij} = C_i Q + D_{li} [F_j \ 0], \\ \overline{\Lambda}_j &= N_{z1} Q + M_z [F_j \ 0], \quad X = QSQ > 0, \quad F_j = K_j Q_1 \text{이다.} \end{aligned}$$

Remark 2 : X 와 Q 가 구해지면 S 를 구할수 있다.

Remark 3 : 새로운 변수 $F_j = K_j Q_1$ 를 정의함으로써 (12)는 $(Q, X, F_j, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 를 변수로 가지는 선형 행렬 부등식이다.

따라서, 현재 나와 있는 많은 컨벡스 알고리즘 툴로써 쉽게 H ∞ 퍼지 제어를 설계할 수 있다.

4. 모의 실험

이 장에서는 시간 지연을 가지는 이산 시간 비선형 시스템을 H ∞ 의미에서 안정하게 하는 정적출력제한 퍼지 제어를 본 논문에서 제시된 방법에 따라 설계한다. 여기서 고려하는 시간 지연을 가지는 이산 시간 비선형 시스템은 [7]에서 쓰인 예를 본 논문의 모델에 맞게 수정한 것이다.

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= -x_1(t)^2 + 0.3x_2(t) + 0.1x_1(t-2)^2 \\ &\quad - 0.2x_1(t-2)x_2(t-2) + u_1(t) \\ &\quad + x_1(t)w(t) + 0.1c_1(t)x_1(t)x_2(t) \\ &\quad + 0.1c_2(t)x_2(t-2) \\ x_2(t+1) &= 0.1x_1(t) + x_2(t) + 0.1c_1(t)x_2(t) + 0.5u_2(t) \\ y(t) &= 0.5x_2(t) \\ z(t) &= 0.1x_1(t)^2 + 0.2x_2(t-2) \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 $c_1(t)$, $c_2(t)$ 는 불확실성을 나타내는 패러미터이다: $c_1(t) \in [-0.2, 0.2]$, $c_2(t) \in [-0.1, 0.1]$.

이 비선형 시스템을 T-S 퍼지 모델로 표현하면 다음과 같다.

Plant Rule 1 :
IF $x_1(t)$ is M_{11}
THEN
$$\begin{aligned} x(t+1) &= (A_1 + \Delta A(t))x(t) + (A_{d1} + \Delta A_d(t))x(t-2) \\ &\quad + B_{11}\omega(t) + B_{21}u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + C_{d1} x(t-2) \\ y(t) &= E x(t) \end{aligned}$$

Plant Rule 2 :
IF $x_1(t)$ is M_{21}
THEN

$$\begin{aligned}
 x(t+1) &= (A_2 + \Delta A(t))x(t) + (A_{a2} + \Delta A_d(t))x(t-2) \\
 &\quad + B_{12}\omega(t) + B_{22}u(t) \\
 z(t) &= C_2x(t) + C_{a2}x(t-2) \\
 y(t) &= Ex(t)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{a1} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 A_{a2} &= \begin{bmatrix} 0.05 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{11} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
 B_{21} &= B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad C_1 = [-0.05 \ 0], \quad C_2 = [0.05 \ 0], \\
 C_{a1} &= C_{a2} = [0 \ 0.2], \quad E = [0 \ 0.5] \text{이다.}
 \end{aligned}$$

$\Delta A(t)$ 와 $\Delta A_d(t)$ 는 (2)와 같은 형태로 다음과 같이 표현되어진다.

$$M = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.1 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

이 예제에서 H_∞ 상수 γ 는 1.8로 주어진다.

선형 행렬 부등식 (12)를 Matlab LMI Control Toolbox로 풀면 다음과 같이 $Q, X, F_1, F_2, \epsilon_1, \epsilon_2$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 Q &= \begin{bmatrix} 3.3792 & 0 \\ 0 & 3.6318 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1.8546 & 0 \\ 0 & 1.9749 \end{bmatrix}, \\
 F_1 &= F_2 = \begin{bmatrix} -2.0275 \\ -13.5167 \end{bmatrix}, \quad \epsilon_1 = 3.07, \quad \epsilon_2 = 3.093.
 \end{aligned}$$

Q, X, F_1, F_2 로부터 S 와 K_1, K_2 는 다음과 같이 구해진다.

$$S = \begin{bmatrix} 0.1624 & 0 \\ 0 & 0.1497 \end{bmatrix}, \quad K_1 = K_2 = \begin{bmatrix} -0.6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

이제 설계된 퍼지 제어기를 비선형 시스템 (13)에 적용하면 $x_1(t)$ 와 $x_2(t)$ 응답은 그림 1과 같다. 이때 초기치는 다음과 같고,

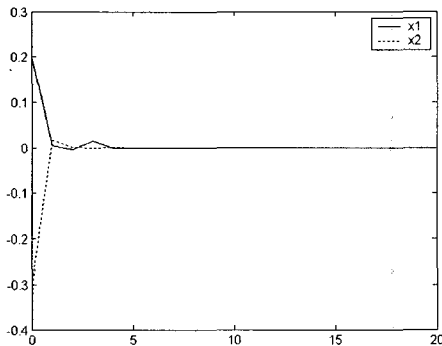


그림 1 H_∞ 퍼지 제어기를 적용한 시스템 (13)의 시간 응답 (x_1 : 실선, x_2 : 점선).

Figure 1. Time response of the system (13) using the H_∞ fuzzy controller (x_1 : solid line, x_2 : dotted line).

$$x(-2) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.2 \end{bmatrix}, \quad x(-1) = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix}$$

외란 $\omega(t) \in l_2[0, \infty)$ 는 다음과 같이 적용되었다.

$$\omega(t) = \frac{r}{1 + 15(t+1)}$$

여기서, r 은 임의의 수이며 또한 불확실성을 나타내는 패러미터 $c_1(t), c_2(t)$ 는 다음과 같이 정의 되었다.

$$c_1(t) = 0.2 \cos(t), \quad c_2(t) = 0.1 \sin(t).$$

그림 2는 제어 입력 $u(t)$ 를 보여주고 그림 3과 4는 각각 $y(t)$ 와 $z(t)$ 를 나타낸다.

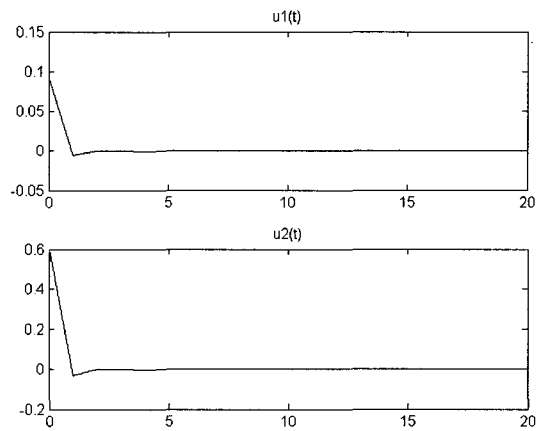


그림 2. 시스템 (13)의 제어 입력 $u(t)$

Figure 2. Control input $u(t)$ of the system (13).

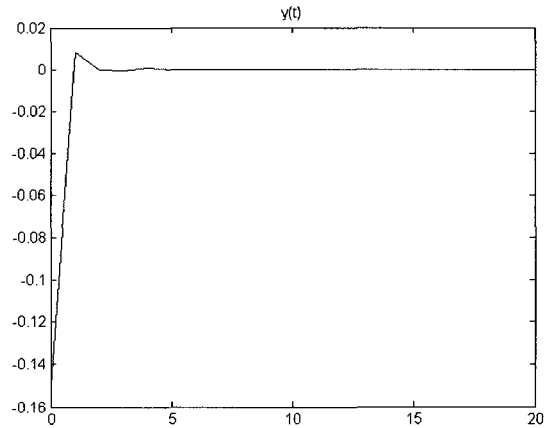


그림 3. 시스템 (13)의 측정되는 출력 $y(t)$

Figure 3. Measured output $y(t)$ of the system (13).

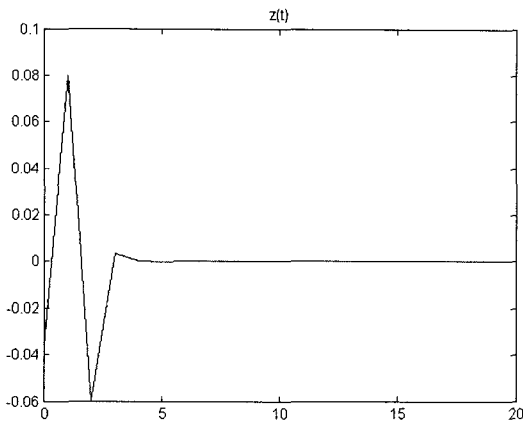


그림 4. 시스템 (13)의 제어되는 출력 $z(t)$
Figure 4. Controlled output $z(t)$ of the system (13).

5. 결 론

본 논문에서는 시간 지연이 있는 이산 시간 비선형 시스템을 H_∞ 의미에서 강인 제어하는 것을 퍼지 제어 기법을 이용하여 제안하였다. 하나의 Lyapunov 함수를 정하고 Lyapunov-Krasovskii 이론을 이용하여 제어기 설계의 충분조건을 유도하였다. 그리고, 이것을 동질성 변환법과 합동 변환법을 이용하여 선형 행렬 부등식의 형태로 바꾸었다. 마지막으로, 본 논문에서 제안한 방법이 시간 지연을 갖는 이산 시간 비선형 시스템을 강인 제어하는데 매우 효율적임을 예제를 통하여 증명하였다.

참 고 문 헌

- [1] J. C. Lo and M. L. Lin, "Robust H_∞ nonlinear control via fuzzy static output feedback," *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 50, no. 11, pp. 1494-1502, 2003.
- [2] Y. Y. Cao and P. M. Frank, "Analysis and synthesis of nonlinear time-delay systems via fuzzy control approach," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, no. 2, pp. 200-211, 2000.
- [3] K. R. Lee, J. H. Kim, E. T. Jeung, and H. B. Park, "Output feedback robust H_∞ control of uncertain fuzzy dynamic systems with time-varying delay," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, no. 6, pp. 657-664, 2000.

- [4] H. J. Lee, J. B. Park, and G. Chen, "Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 9, no. 2, pp. 369-379, 2001.
- [5] H. D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, and Y. Yamamoto, "Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 9, no. 2, pp. 324-332, 2001.
- [6] 김택룡, 주영훈, 박진배, "시변 지연이 있는 비선형 시스템에 대한 H_∞ 퍼지 강인제어기 설계," *2004년 정보 및 제어 학술대회*, 11월, pp. 379-381, 2004.
- [7] S. Xu and J. Lam, "Robust H_∞ Control for Uncertain Discrete-Time-Delay Fuzzy Systems Via Output Feedback Controllers," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 13, no. 1, pp. 82-93, 2005.

저 자 소 개



김택룡(Taek Ryong Kim)

2004년 : 연세대학교 전기전자과 졸업
2004년~현재 : 연세대학교 전기전자
공학과 석사과정

관심분야 : 퍼지 강인 제어기 설계, 퍼지 시스템의 카오스화
Phone : 02-2123-2773
Fax : 02-362-4539
E-mail : princebear@control.yonsei.ac.kr

주영훈(Young Hoon Joo)

제 15권 2호(2005년 4월호) 참조

박진배(Jin Bae Park)

제 15권 2호(2005년 4월호) 참조