

변형률 독립 강소성 구성 방정식에서의 이중 후방 응력 경화 모델

윤수진#

Two Back Stress Hardening Models in Rate Independent Rigid Plasticity

S. J. Yun

(Received June, 14, 2004)

Abstract

In the present work, the two back stress kinematic hardening models are proposed by combining Armstrong-Frederick, Phillips and Ziegler's hardening rules. Simple combination of hardening rules using simple rule of mixtures results in various evolutions of the kinematic hardening parameter. Using the combined hardening models the ultimate back stress for the present models is also derived. The stress rate is co-rotated with respect to the spin of substructure due to the assumption of kinematic hardening rule in finite deformation regime. The work piece under consideration is assumed to consist of the elastic and the rigid plastic deformation zone. Then, the J_2 deformation theory is facilitated to characterize the plastic deformation behavior under various loading conditions. The plastic deformation localization behaviors strongly depend on the constitutive description namely back stress evolution and its hardening parameters. Then, the analysis for Swift's effects under the fixed boundaries in axial directions is carried out using simple shear deformation.

Key Words: Finite Plastic Deformation, Two-Back Stress, Kinematic Hardening, Rigid Plasticity, Plastic Spin

1. 서 론

소성 변형을 실제 상황에 근접하게 묘사하기 위해서 보다 정확한 구성방정식에 대한 요구가 증가하고 있다. 예로 기존의 등방 경화식(isotropic hardening)은 소성변형 집중 현상이 발생하는 변형률을 과대 평가하는 것으로 알려져 있다. 소성 대변형은 복잡한 비선형 현상을 동반하며 이는 물체 축의 회전과 금속 구조의 변화와 연관되어 있으며 결국 항복 표면의 찌그러짐으로 나타난다.

특정 내부 상태 변수들은 변형률에 의한 비대칭 항복 함수의 생성과 관련이 있으며 후방 응력으로 알려진 내부 상태 변수 α_{ij} 는 현상적으로 금속 미세조직의 재배열을 나타낸다[1]. 더욱이 이동

경화는 등방경화에 비해 전단 밴드 형성을 나타내는데 이점이 있으며 이는 항복 표면의 굴곡이 소성변형 과정에서 변하지 않음에 기인한다[2]. Ning 과 Aifantis 는 Armstrong-Frederick 과 Phillips type 의 비선형 이동경화를 이용하여 이중 후방응력 모델을 제안하였다[3]. 상기 모델은 현재 상태의 후방응력, 변형률 및 응력에 대하여 혼합법칙을 적용함으로써 얻어졌다. 한편 본 연구에서는 혼합 이중 후방응력 모델이 제안되었으며, 여기서 응력률에 대한 구성방정식은 조합된 이중 후방응력에 의해 표현되었다. 따라서 후방 응력에 대한 조합은 응력률에 대해서 적용되었으며 그 결과 본 구성 방정식은 단일 응력과 변형률장으로 나타낸다. 또한 Armstrong-Frederick 과 Phillips type

교신저자 : 국방과학연구소

경화식 외에도 Ziegler 경화식과도 비교되었다. 한편 본 구성 방정식을 통해 이중 항복 표면에서와 마찬가지로 일회 반복 성형에 대한 최종 후방 응력(ultimate back stress)이 구해졌다.

대변형을 동반한 주응력축의 회전에 대한 구성 방정식의 불변성을 유지하기 위해서 텐서 변수들의 객관적인 응력률의 적용이 요구된다. 대변형 하에서 변형률에 의한 비등방 경화 현상이 동반될 경우 기존의 Jaumann 응력률은 단순 전단 변형에서 응력에서의 진동 현상이 발생하는 것이 관찰되었으며 이는 주 응력축의 회전에 기인한다 [4~5]. 이 문제를 극복하기 위하여 Dafalias[6~8], Dienes[9], Aifantis[1], Paulun and Pecherski[10~11] and Lorel[12] 등을 포함한 연구자들은 특수한 객관적 응력률을 제안하였으며 이 응력률에서는 소성 스피인으로 불리는 상대적 스피인이 연속체 스피인을 대신한다. 두 개의 후방 응력이 고려될 때 두 개의 후방 응력의 조합과 그와 관련된 소성 스피인의 조합 또한 중요하다. 본 연구에서는 여러 형태의 회전 응력률들이 고려되었으며 소성 스피인을 포함한 내부 상태 변수의 진화도 조사되었다.

금속 성형 문제의 경우 흐름 공식(flow formulation)에 입각한 유한 요소 수치해석이 광범위하게 이용되고 있다. 사용하기 편한 점이 있으나 흐름 공식은 점성 흐름에 기초하고 있기 때문에 후방 응력을 적용할 수 없는 단점을 가지고 있다. 더욱이 기존의 흐름 공식은 탄성 영역을 단지 가정된 참고적인 점성 계수를 도입하여 강체로 취급한다. 하지만 본 강소성 유한 요소 해석에서의 상기 영역은 탄성체로 취급된다. 더욱이 강소성 유한요소 해석에서의 임의적인 큰 수의 페널티 상수의 이용과는 달리 본 강소성 유한 요소해석 기법에서는 체적 불변 조건을 만족시키기 위해 탄성 체적 계수가 본 연구에서 사용되었다.

2. 구성방정식

지배 방정식 및 구성 방정식에서의 모든 변수들은 초기 항복 조건에 대해서 무차원 변수들로 표현되었다. 등은 조건 하에서 변형률 독립 구성 방정식은 아래와 같다.

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = R_{ijkl} D_{kl} \quad (1)$$

여기서 R_{ijkl} 는 소성 상수이며 D_{kl} 는 변형률(rate

of deformation)로 속도기울기(velocity gradient L_{ij})장의 대칭부를 나타낸다. 또한 윗 첨자 'o'는 객관적 응력율을 나타낸다. 탄성 변형이 상대적으로 작으므로 Kirchhoff 응력 대신에 Cauchy 응력이 사용되었다. 변형률은 탄소성 물체의 경우 탄성 변형과 소성 변형으로 분해될 수 있으나 강소성 물체의 경우에는 탄성 변형을 무시할 수 있으므로 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$D_{ij} = D_{ij}^e + D_{ij}^p = 1/2(L_{ij} + L_{ji}) \cong D_{ij}^p \quad (2)$$

von Mises 항복 함수와 직각 조건은 식 (3)과 (4)에서 보는 바와 같다.

$$f = 1/2(s_{ij} - \alpha_{ij})(s_{ij} - \alpha_{ij}) - k^2 = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij} - \alpha_{ij}, \quad (4)$$

여기서 s_{ij} 와 α_{ij} 은 응력 deviator와 후방 응력을 나타내고 있다. 소성 변형률과 등가 변형률은 식 (5)와 (6)과 같다.

$$D_{ij}^p = \frac{1}{K} \frac{3}{2} \frac{s'_{kl} \overset{\circ}{\sigma}_{kl}}{\sigma_y^2} s'_{ij}, \quad (5)$$

$$D_e^p = \frac{1}{K} \frac{s'_{kl} \overset{\circ}{\sigma}_{kl}}{\sigma_y}, \quad (6)$$

여기서 $s'_{ij} = s_{ij} - \alpha_{ij}$ 으로 유효 응력 디비에이터이다. 두 개의 후방 응력 중 하나는 Armstrong-Frederick 경화 법칙[13~14]을 따르며 다른 하나는 Phillips 법칙[3, 15, 16]에 따라 변화하는 것으로 가정되었다.

$$\alpha_{ij} \big|_1 = \beta D_{ij}^p - \gamma \alpha_{ij} D_e^p \quad (7)$$

$$\alpha_{ij} \big|_2 = \rho \sigma_{ij} \overset{\circ}{\sigma} - \nu \alpha_{ij} D_e^p \quad \text{혹은} \quad (8-1)$$

$$\alpha_{ij} \big|_2 = \rho \sigma_{ij} \overset{\circ}{\sigma}. \quad (8-2)$$

비선형 경화식에서의 첨가항은 회복항(recall term)으로 불리며 반복 하중 하에서 소성 변형률

의 절대값에 의해 인장 혹은 압축 변형에서 다르게 영향을 미친다. Armstrong-Frederick 경화식과 구성방정식의 유도는 Khan and Huang[17]과 Mroz[13]에서 상세하게 설명되어있다. Armstrong-Frederick type의 이동 비선형 경화식은 Endochronic 소성 이론[18]과 유사성을 갖는다. 한편 본 논문에서는 Ziegler's type 경화식도 비교를 위해서 적용되었다.

$$\alpha_{ij}^{\circ} |_2 = \mu(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \quad (9)$$

경화 매개 변수는 소성 변형의 내부 상태 변수 이력에 따라 변화한다. 비선형 Phillips 경화식에 대해서 일체 조건은 아래와 같다.

$$s'_{ij} \overset{\circ}{\sigma}_{ij} - s'_{ij} \left(\rho \overset{\circ}{s}_{ij} - \nu D_e^p \alpha_{ij} \right) = 0 \quad (10)$$

$$(1-\rho)s'_{ij} \overset{\circ}{\sigma}_{ij} + \nu \frac{1}{k} s'_{ij} \frac{s'_{kl} \overset{\circ}{\sigma}_{kl}}{\sigma_y} \alpha_{ij} + \delta_{ij} \rho s'_{ij} \overset{\circ}{\sigma}_{kk} = 0 \quad (11)$$

$$(1-\rho) + \nu \frac{1}{k} \frac{s'_{ij} \alpha_{ij}}{\sigma_y} = 0. \quad (12)$$

따라서 소성 기울기 변수 K 는 아래와 같다.

$$K = \frac{\nu}{\rho-1} \frac{(s_{ij} - \alpha_{ij}) \alpha_{ij}}{\sigma_y} \quad (13)$$

일축 하중 하에서의 K 는 다음과 같다.

$$K = \frac{\nu}{\rho-1} \frac{|\sigma - \alpha| \alpha}{\sigma_y}. \quad (14)$$

일축 반복 하중을 고려할 때 위의 식은 다음과 같이 표현된다.

$$K_t = \frac{\nu}{\rho-1} \alpha \geq 0, \quad K_c = -\frac{\nu}{\rho-1} \alpha \geq 0 \quad (15)$$

여기서 하첨자 t 와 c 는 인장과 압축 하중을 각각 나타낸다. 한편 소성 상수 K_t 와 K_c 를 양수로 유지하기 위해서 특정한 제한 조건이 적용되어야 하며, $\rho < 1$ 이면 $\nu < 0$ 이어야 하며 반면 $\rho > 1$ 이면 $\nu > 0$ 이어야 한다. 하지만 Ning and Aifantis[3]의 논문에 따르면 위에서의 제한 조건과 대치되는 경우가 관찰되었으며 일례로 경화 상수들이 $\rho=0.364$

과 $\nu=7.94$ 로 정의된 경우이다. 이와 같은 경우 일체 조건과 제한 조건을 만족시킬 수 없다.

Shi *et. al.*[19]는 아래에서와 같은 이중 조합을 제안한 바 있다.

$$D^p = fD_1^p + (1-f)D_2^p \quad (16-1)$$

$$\sigma = \eta\sigma_1 + (1-\eta)\sigma_2 \quad (16-2)$$

Ning과 Aifantis⁽³⁾는 다음 조합을 가정하였다.

$$D^p = fD_1^p + (1-f)D_2^p \quad (17-1)$$

$$\sigma = f\sigma_1 + (1-f)\sigma_2 \quad (17-2)$$

$$\alpha = f\alpha_1 + (1-f)\alpha_2 \quad (17-3)$$

여기서 f 혹은 η 는 일반적인 혼합법칙에서의 분율을 나타낸다. 본 논문에서는 위와 흡사하게 각각의 후방 응력들이 Armstrong-Frederick 변형률 (strain rate) 형태와 Phillips 응력률 형태로 표현되는 것으로 가정되었다. 하지만 각각의 성분에 대한 조합은 혼합된 후방 응력률 전체에 대해서 적용되었으며 아래에서 보는 바와 같다.

$$\alpha^{\circ} |_m = f \alpha^{\circ} |_1 + (1-f) \alpha^{\circ} |_2 \quad (18)$$

따라서 소성 변형률 및 객관적 응력률은 결합된 구성방정식에 의해서 결정되며 이 때 단일의 응력과 소성 변형률장(plastic strain rate field)으로 나타내게 된다.

본 연구에서는 두 번째의 경화식에 대한 매개변수들이 주어졌다는 가정 하에서 첫 번째의 경화식에서의 매개 변수들이 결정되었다. 우선 이중 후방 응력 모델이 비선형 변형률 이동 경화식(식 7)과 비선형 응력률 이동 경화식(식 8-2)의 조합으로 가정하면 후방 응력의 진화는 다음과 같이 나타낼 수 있을 것이다.

$$d\alpha_{ij} |_m = f(\beta d\epsilon_{ij}^p - \gamma \alpha_{ij} d\epsilon_e^p +) + (1-f)(\rho ds_{ij} - \nu \alpha_{ij} d\epsilon_e^p) \quad (19)$$

$$K = \frac{1}{1-(1-f)\rho} \left[f\beta - \{f\gamma \alpha_{ij} - (1-f)\nu \alpha_{ij}\} \frac{s'_{ij}}{\sigma_y} \right] \quad (20)$$

인장과 압축에서의 소성 기울기는 각각 아래와 같다.

$$K_t = \frac{1}{1-(1-f)\rho} \left[f\beta - \{f\gamma \alpha_{ij} - (1-f)\nu \alpha_{ij}\} \right] \quad (21-1)$$

$$K_c = \frac{1}{1-(1-f)\rho} [f\beta + \{f\gamma\alpha_{ij} - (1-f)v\alpha_{ij}\}] \quad (21-2)$$

첫 번째 이동 경화식에서의 후방 응력을 나타내는 상수는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\beta = \frac{1-(1-f)\rho}{f} \frac{K_c + K_t}{2} \quad (22)$$

$$\gamma = \frac{1-(1-f)\rho}{f} \frac{K_c - K_t}{2\alpha_s} - \frac{1-f}{f} v \quad (23)$$

α_s 는 반복 하중에서의 변수를 나타낸다. Khan 과 Huang[17]이 지적한 바와 같이 Armstrong-Frederick 경화식은 이중 항복면(two-surface) 모델과 유사점을 갖고 있다. 2 개의 후방 응력의 조합을 고려할 때 현재의 구성방정식 식 (19)는 다음의 최종 후방 응력을 산출한다.

$$f=1, \left(\frac{2}{3}\alpha_{ij}\alpha_{ij} \Big|_u\right)^{1/2} = \frac{2}{3}\alpha_u = \frac{\beta}{\gamma} \quad (24)$$

$$f=0, \alpha_u = \frac{\rho}{v} \frac{d\sigma_e}{d\varepsilon_e^p} = \frac{\rho}{v} h_t \quad (25)$$

그리고 $0 < f < 1$ 일 경우 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$\left(\frac{2}{3}\alpha_u^2\right)^{1/2} = \frac{\left[\frac{3}{2}f^2\beta^2 + \frac{2}{3}(1-f)^2\rho^2 h_t^2 + 3f(1-f)\beta\rho h_t\right]^{1/2}}{f\gamma + (1-f)v} \quad (26)$$

여기서 h_t 응력 곡선의 접선 기울기를 나타낸다. 식(24)는 순수한 비선형 Armstrong-Frederick 경화식의 경우와 일치한다. 일반적으로는 $0 < f < 1$ 일 때 두 번째 경화식에서의 기존과 다른 상수 β 와 γ 에 의해 색다른 최종 후방 응력이 얻어진다.

이중 후방 응력 모델이 비선형 변형을 이동 경화식 식 (7)과 선형 응력을 이동 경화식(식 8-2)으로 표현된다면 조합된 후방 응력은 아래와 같다.

$$d\alpha_{ij} \Big|_m = f(\beta d\varepsilon_{ij}^p - \gamma\alpha_{ij} d\varepsilon_e^p) + (1-f)\rho ds_{ij} \quad (27)$$

$$K = \frac{f}{1-(1-f)\rho} \left[\beta - \gamma\alpha_{ij} \frac{s'_{ij}}{\sigma_y} \right] \quad (28)$$

따라서 경화 매개 변수들은 간단히 하면 아래와 같다.

$$\beta = \frac{1-(1-f)\rho}{f} \frac{K_c + K_t}{2} \quad (29-1)$$

$$\gamma = \frac{1-(1-f)\rho}{f} \frac{K_c - K_t}{2\alpha_s} \quad (29-2)$$

여기서 $K_t = \frac{f}{1-(1-f)\rho} (\beta - \gamma\alpha)$ 이며,

$$K_c = \frac{f}{1-(1-f)\rho} (\beta + \gamma\alpha) \cdot \text{마찬가지로 최종}$$

후방 응력은 다음과 같이 표현될 수 있다:

$$f=1, \quad \frac{2}{3}\alpha_u = \frac{\beta}{\gamma}, \quad (30-1)$$

$0 < f < 1,$

$$\left(\frac{2}{3}\alpha_u^2\right)^{1/2} = \left[\frac{3}{2} \frac{\beta^2}{\gamma^2} + \frac{2}{3} \left(\frac{1-f}{f}\right)^2 \frac{\rho^2}{\gamma^2} h_t^2 + 3 \frac{1-f}{f} \frac{\beta\rho}{\gamma^2} h_t \right]^{1/2} \quad (30-2)$$

하지만 $f=0$ 일 때는 최종 후방 응력이 정의될 수 없으며 따라서 구속되지 않는다.

반면 후방 응력이 비선형 변형을 이동 경화식과 Ziegler type 의 이동 경화식의 조합으로 표현될 때 후방 응력은 다음과 같다:

$$d\alpha_{ij} \Big|_m = f(\beta d\varepsilon_{ij}^p - \gamma\alpha_{ij} d\varepsilon_e^p) + (1-f)\mu(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \quad (31)$$

여기서 $\mu = \frac{s'_{pq} d\sigma_{pq}}{s'_{kl} (\sigma_{kl} - \alpha_{kl})}$ 이다. 일체 조건은 아

래와 같다.

$$\left[1 - \frac{2}{3}(1-f) \frac{\sigma_y^2}{s'_{kl} (\sigma_{kl} - \alpha_{kl})} \right] K = f\beta s'_{ij} - f\gamma\alpha_{ij} \frac{s'_{ij}}{\sigma_y} \quad (32)$$

여기서 $s'_{ij} (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = s'_{ij} s'_{ij}$ 이므로 위의 식 (32)는 식 (33)으로 나타낼 수 있다.

$$K = \beta - \gamma\alpha_{ij} \frac{s'_{ij}}{\sigma_y} \quad (33)$$

소성 모듈러스는 Armstrong-Frederick 경화식과도 동일하다. 또한 경화 매개 변수들은 식 (34)과 같다.

$$\beta = \frac{K_c + K_t}{2}, \quad \gamma = \frac{K_c - K_t}{2\alpha_s}, \quad (34)$$

따라서 $K_t = \beta - \gamma\alpha$, $K_c = \beta + \gamma\alpha$ 과 같이 나타낸다. 후방 응력의 조합에도 불구하고 최종 후방 응력을 제

외하고 각 경화식에서의 매개 변수들은 독립적이며 다음과 같다.

$$\left(\frac{2}{3}\alpha_u^2\right)^{1/2} = \frac{\left[\frac{3}{2}f^2\beta^2 d\epsilon_p^2 + \frac{2}{3}(1-f)^2\mu^2\sigma_c^2 + f(1-f)\beta\mu d\epsilon_{ij}^p\sigma_{ij}\right]^{1/2}}{fd\epsilon_p^2 + (1-f)\mu} \quad (35)$$

여기서 σ_c 등방 응력이다.

소성 스핀의 존재는 미세 조직에서의 소성 변형 (microscopic plasticity)을 고려하여 유도되었다[1]. 소성 스핀의 개념은 소성 변형률과 응력 사이에서의 비동축성(non-coaxiality)에 의한 꼭지점(vertex) 효과에 따른 자연적으로 형성된 것으로 알려졌다[20]. 소성 스핀에 대한 일반적인 식은 제안되었다 [4, 12].

$$W_{ij}^p |_1 = \eta(\alpha_{ik} D_{kj}^p - D_{ik}^p \alpha_{kj}) \quad (36)$$

여기서 소성 스핀 상수 η 는 내부 변수의 함수이며 따라서 소성 변형 이력에 좌우된다. 소성 스핀은 소성 변형이 아주 작을 때 혹은 $d\sigma_{ij} s'_{ij} < 0$ 일 때 무시될 수 있다. 더욱이 소성 스핀은 후방 응력과 응력률에 의해서도 구해질 수 있다[21].

$$W_{ij}^p |_2 = \xi \left(\alpha_{ik} \overset{\circ}{\sigma}_{kj} - \overset{\circ}{\sigma}_{ik} \alpha_{kj} \right). \quad (37)$$

후방 응력과 소성 변형률을 이용하여 구해진 소성 스핀은 후방 응력의 평균 미끄러짐 방향에 대한 상대 회전과 연관이 있으며 한편 응력률과 후방 응력으로 얻어진 소성 스핀은 배경 격자 (lattice)에 대한 상대 회전과 연관이 있다⁽²²⁾. 현재의 모델은 두 개의 후방 응력을 생성하므로 이들 소성 스핀에 대한 조합도 상대적으로 중요하다. 첫째로 소성 스핀이 조합된 후방 응력과 소성 변형률에 의해 구해진다면 다음과 같으며 (Type I) 거시적으로 조합된 후방 응력이 적용된 것이다.

$$W_{ij}^p |_m = \eta(\alpha_{ik} |_m D_{kj}^p - D_{ik}^p \alpha_{kj} |_m) \quad (38)$$

여기서 $W_{ij}^p |_m$ 과 $\alpha_{ij} |_m$ 은 평균 소성 스핀과 조합된 후방 응력을 나타낸다. 한편 Ning 과 Aifantis[3] 는 다음의 소성 스핀을 제안하였다(Type II).

$$W_{ij}^p |_m = [W_{im}^p |_1 \alpha_{mk} |_1 + W_{im}^p |_2 \alpha_{mk} |_2] \alpha_{kj}^{-1} |_m \quad (39)$$

마지막으로 소성 스핀이 간단한 혼합 법칙에 의

해 구해진다면 다음과 같다(Type III).

$$W_{ij}^p |_m = f\eta(\alpha_{ik} |_1 D_{kj}^p - D_{ik}^p \alpha_{kj} |_1) + (1-f)\xi \left(\alpha_{ik} |_2 \overset{\circ}{\sigma}_{kj} - \overset{\circ}{\sigma}_{ik} \alpha_{kj} |_2 \right) \quad (40)$$

위에서 언급된 소성 스핀이 본 논문에서 각각 적용, 비교되었다.

위첨자 ‘ \circ ’는 서브 structure 스핀(Ω_{ij})에 대한 2 차 텐서 변수들의 회전독립율을 나타내며 객관적 응력률과 후방 응력률은 식 (41), (42)와 같다.

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \Omega_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} \Omega_{kj} \quad (41)$$

$$\overset{\circ}{\alpha}_{ij} = \dot{\alpha}_{ij} - \Omega_{ik} \alpha_{kj} + \alpha_{ik} \Omega_{kj} \quad (42)$$

여기서 $\Omega_{ij} = W_{ij}^p - W_{ij}^p |_m$ 이며, 윗 첨자 ‘ \bullet ’는

시간 분율을 $W_{ij}^p = \frac{1}{2}(L_{ij} - L_{ji})$ 을 나타낸다.

본 논문에서는 구성방정식이 강소성으로 표현되었으며 J_2 변형 이론(deformation theory)이 적용되었다[23].

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{-1} D_{kl} = R_{ijkl} D_{kl}, \quad (43)$$

$$C_{ijkl} = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{h_s} \left(\frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jl} + \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{h_s} \right) \frac{s'_{ij} s'_{kl}}{s_e^2} \right]$$

여기서 h_s secant 모듈러스를 나타낸다. 한편 응력률과 변형률과의 관계는 아래와 같다.

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} = R_{ijkl} D_{kl} \cong R_{ijkl} D'_{kl} + k \frac{D_{kk}}{3} \delta_{ij}. \quad (44)$$

첫 번째 항은 전단 변형과 연관이 있으며 반면 두 번째 항은 체적 변형과 관련 있다. 그리고 상수 ‘ k ’는 점소성에서와 같이 벌칙 상수(penalty constant)로 간주될 수 있으며 물리적으로는 체적 모듈러스의 의미를 갖는다. 위의 식은 점소성 흐름 구성식과 흡사하다[24]. 여기서 임의의 큰 상수의 벌칙 상수 대신에 체적 모듈러스가 본 유한요소 해석에 적용되었다. 더욱이 변형되는 물체는 강소성 변형 구역과 탄성 변형 구역으로 이루어져 있다. 본 연구에서의 응력 곡선은 항온 조건 항에서 다음과 같다.

$$\sigma = k \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^n \quad (45)$$

'n'은 경화 지수이며 'ε₀'는 초기 항복 조건에서의 참고 변형률이다.

3. 수치해석

3.1 유한요소 해석

본 연구에서의 유한요소 해석은 속도장이 기본 변수로 작용하며 기본 변수를 제외하고 변위를 기초로 한 유한요소법과 큰 차이가 없다. 강소성 고체 구성식의 경우 운동 보존식에 대한 변분은 아래와 같다[26].

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \int \left[\left(\overset{\circ}{\sigma}_{ij} - 2\sigma_{ik}D_{kj} \right) \delta D_{ij} + \sigma_{ik}L_{ij} \delta L_{ij} \right] dV \cdot \\ & + k \int D_{ik} \delta D_{kj} dV - 2 \int w_{ik}^p \sigma_{kj} \delta D_{ij} dV \end{aligned} \quad (46)$$

유한요소 행렬식은 아래와 같다[25].

$$K = K_1 + K_2 + K_3 \quad (47)$$

$$K = \int B^T C B dV - \int B^T \bar{\sigma} B dV + \int G^T \hat{\sigma} G dV \quad (48)$$

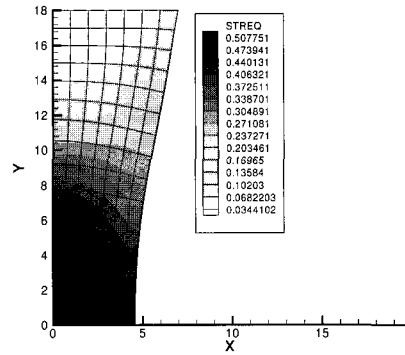
따라서 속도장은 아래의 식을 통해 얻어질 수 있다.

$$[K]\{v\} = \{R\} \quad (49)$$

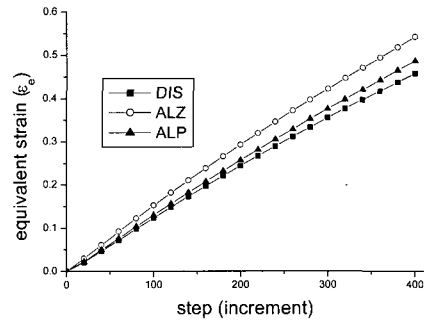
3.2 경화 변수들의 소성 변형에 대한 영향

본 논문에서 이용된 소재의 물성은 경화 지수는 $n=0.15$, 포아손 비는 $\nu=0.33$ 이며 탄성 모듈러스와 항복 강도의 비는 $E/\sigma_0=185.7$ 이다. 사각형 블록의 1/4 에 대한 소성 변형이 유한요소 해석으로 분석되었다.

전에 언급된 바와 같이 본 수치해석은 J₂ 변형이론에 기초한 강소성 구성 방정식이 적용되었다. 여기서 ALP 모델은 Armstrong-Frederick 경화와 Phillips 선형 경화 거동을 보이는 물체를 나타낸다. 마찬가지로 ALZ 모델은 Armstrong-Frederick 과 Ziegler 의 경화식을 따르는 물체를 나타낸다. 두 가지의 조합된 경화 모델은 각기 소성 스핀 구성 방정식에 따라 type I, II 와 III 로 나뉜다. 두 개의 혼합 경화식은 혼합법칙에서의 비례 분률 f 에 따라 정의되며 비례 분률은 1.0 과 0.5 사이에서 결정되었다. 또한 Phillips 경화 상수 ρ 는 각각



(a)



(b)

Fig. 1 Effect of constitutive relation with type II w^p and $f=0.5$: (a) equivalent strain (STREQ) using ALZ model and (b) evolution of ε_e at center

0.2, 0.4 와 0.6 이 선택되었다. 더욱이 등방 경화식 DIS 모델과도 비교되었다. DIS 모델은 소성 스핀이 정의되지 않았으며 통상적인 Jaumann 응력률이 적용되었다.

Fig. 1 (a)는 ALZ 모델을 이용하여 인장 변형 하에서 얻어진 변형 거동을 보이고 있다. 물체의 중심에서의 등가 변형률(equivalent strain)의 변화를 통해 각 구성 방정식의 특성을 알 수 있다(Fig. 1 (b)). 비례 분률 f 는 ALP 와 ALZ 모델에 대해서 0.5 로 제어되었으며 반면 ALP 모델에서의 경화 상수 ρ 는 0.4 로 고정되었다. 등방 경화 구성 방정식이 가장 낮은 소성 변형 집중 현상을 보이는 것이 관찰되었으며 반면 ALZ 모델이 가장 높은 변형 집중 현상을 보인다.

Fig. 2 와 3 에서 보는 바와 같이 반복 하중(압축 후 인장)과 단순 전단 거동[27]에서도 흡사한 소성 변형 거동이 관찰되었다. Swift 효과는 Fig. 4 에서

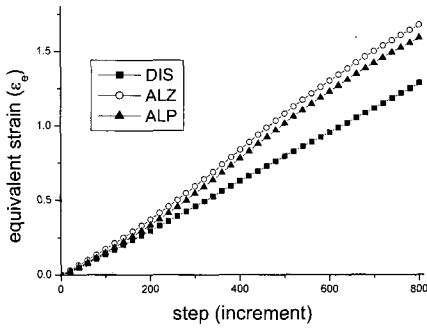


Fig. 2 Evolution of strain at center under upsetting followed by tensile loading with type II w^p and $f=0.5$

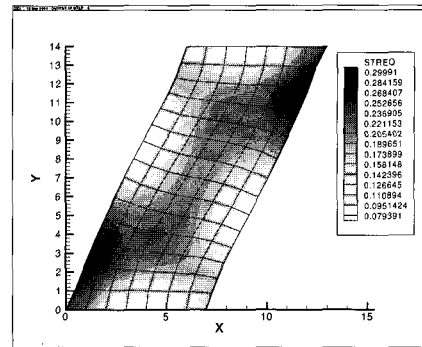
보여주고 있으며 여기서 강한 직각 응력(normal stress)이 ALZ 모델에서 관찰되었다.

Fig. 5는 Fig. 3과 마찬가지로 각 소성 스펬의 정의에 따른 변형 거동을 보여주며, 여기서 type III으로 정의된 소성 스펬에 따른 객관적 응력률이 좀 더 높은 변형 집중 현상을 보인다. 그렇지만 그 차이는 명백하지 않다. 그렇지만 Fig. 4와 6에서 보는 바와 같이 Swift 효과에서 뚜렷한 차이를 보여주고 있다. Fig 7은 ALZ 모델을 이용한 하부 구조 스펬(spin of sub-structure $\Omega_{12}=W_{12}-W_{12}^p$)의 분포를 나타내며 이 때 비례 분율 f 는 0.5이다. type II로 표현된 소성 스펬의 경우 변형 전구간에 걸쳐 0보다 큰 값의 하부 구조 스펬을 나타내나 나머지 type I과 III의 소성 스펬의 경우 어떤 구간에서 0보다 작은 하부 구조 스펬을 보인다.

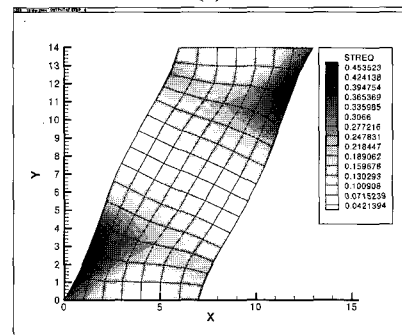
전단 변형이 진행함에 따라 하부 구조 스펬은 감소하여 0에 근접하게 된다는 것이 지적되었으며 이는 하부 구조 스펬의 점근성이라 불린다[4]. 한편 0보다 작은 하부 구조 스펬(counter rotation)이 발생할 수 있다고 주장되었으나 이 경우에도 전단 변형이 크게 증가함에 따라 0으로 근접하게 된다[21]. 따라서 type II 형태의 소성 스펬의 정의가 적당한 것으로 판단된다.

경화 상수에 대한 영향은 단순 전단 변형을 이용 조사되었다. 비례 분율 f 의 효과는 1.0~0.5의 범위 내에서 조사되었다. 따라서 비례 분율이 1.0에 근접할수록 지배적인 구성 방정식은 Armstrong-Frederick 경화식에 근접한다. 한편 비례 분율이 감소함에 따라 Phillips혹은 Ziegler의 영향은 증가한다.

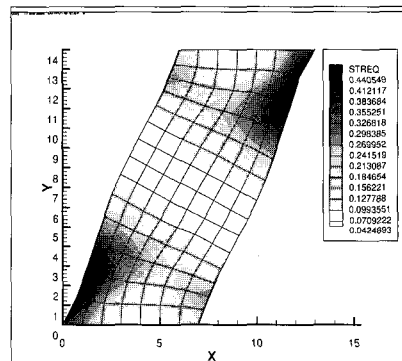
각 경화식 및 매개 변수들의 영향을 연구하기 위해 물체의 우측 상단 내부에 위치한 특정한 질



(a)



(b)



(c)

Fig. 3 Distribution of strain under simple shear loading with type II w^p and $f=0.5$: a) DIS, b) ALZ and c) ALP models ($\rho=0.4$)

점(material point)이 선택되었다. 하지만 본 질점이 최고의 값을 나타내는 것은 아니다. 비례 분율이 감소할수록 그 지점에서의 등가 변형률도 함께 증가하는 것이 Fig. 8에 의해 관찰되었다. 경화 상수(ρ)의 수직 방향 응력에 대한 영향은 Fig. 9에서 보여주며 경화 상수가 증가함에 따라 본 지점에서의 수직 응력이 증가한다.

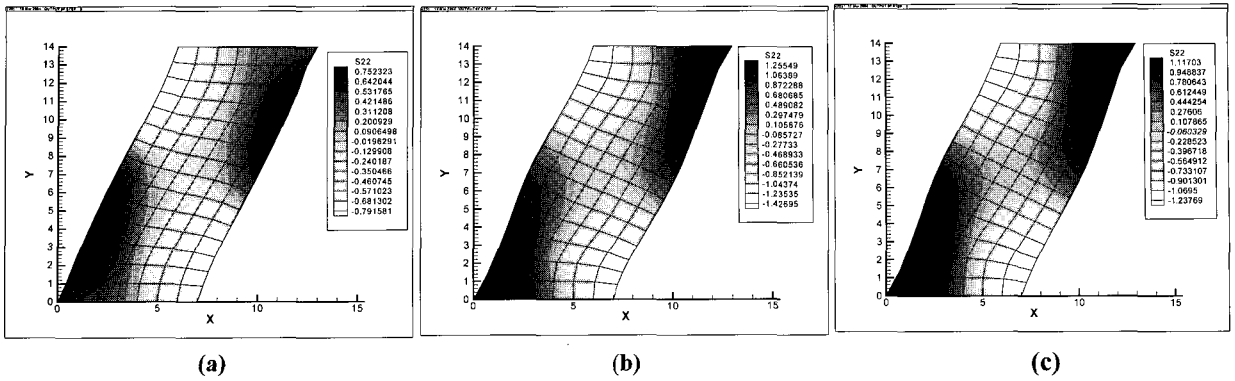


Fig. 4 Distribution of normal stress (S22) under simple shear with type II w^p and $f=0.5$: (a) DIS, (b) ALZ and (c) ALP models ($\rho=0.4$)

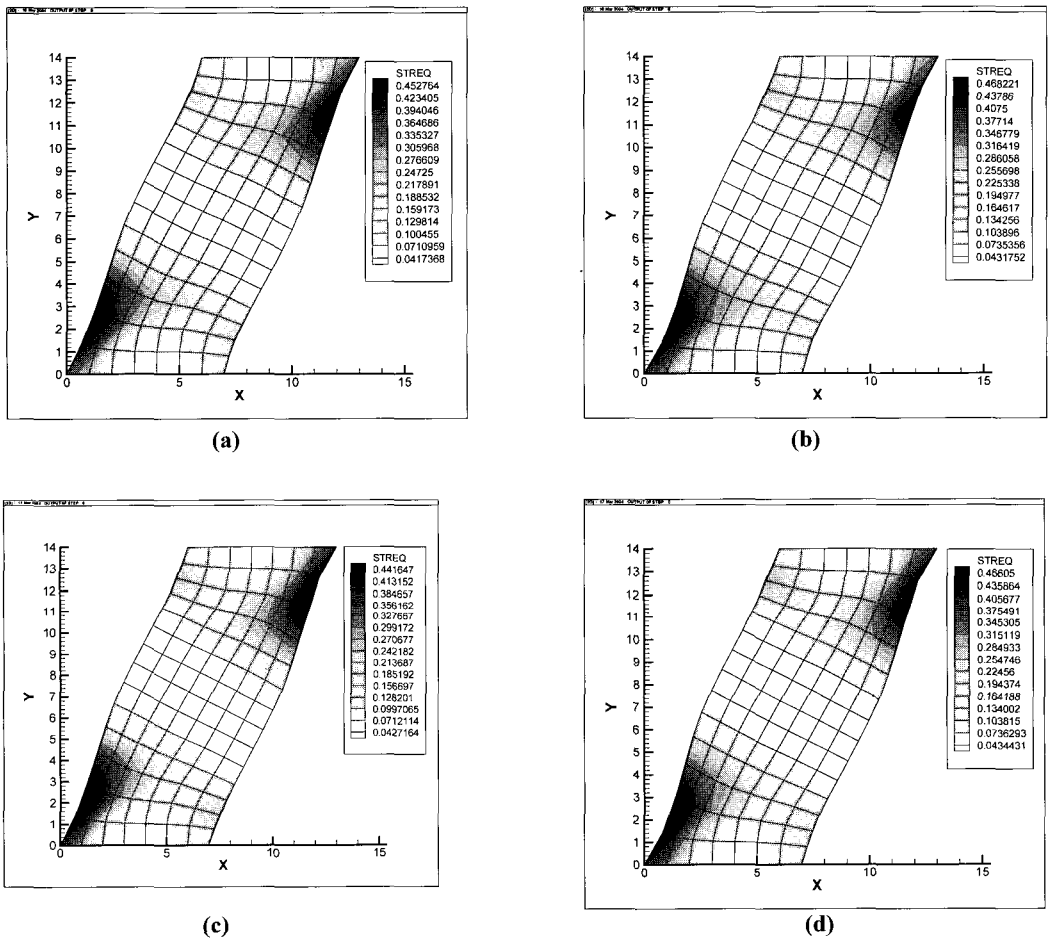


Fig. 5 Distribution of strain using various w^p with $f=0.5$: (a) ALZ (type I), (b) ALZ (type III), (c) ALP (type I, $\rho=0.4$) and (d) ALP models (type III, $\rho=0.4$)

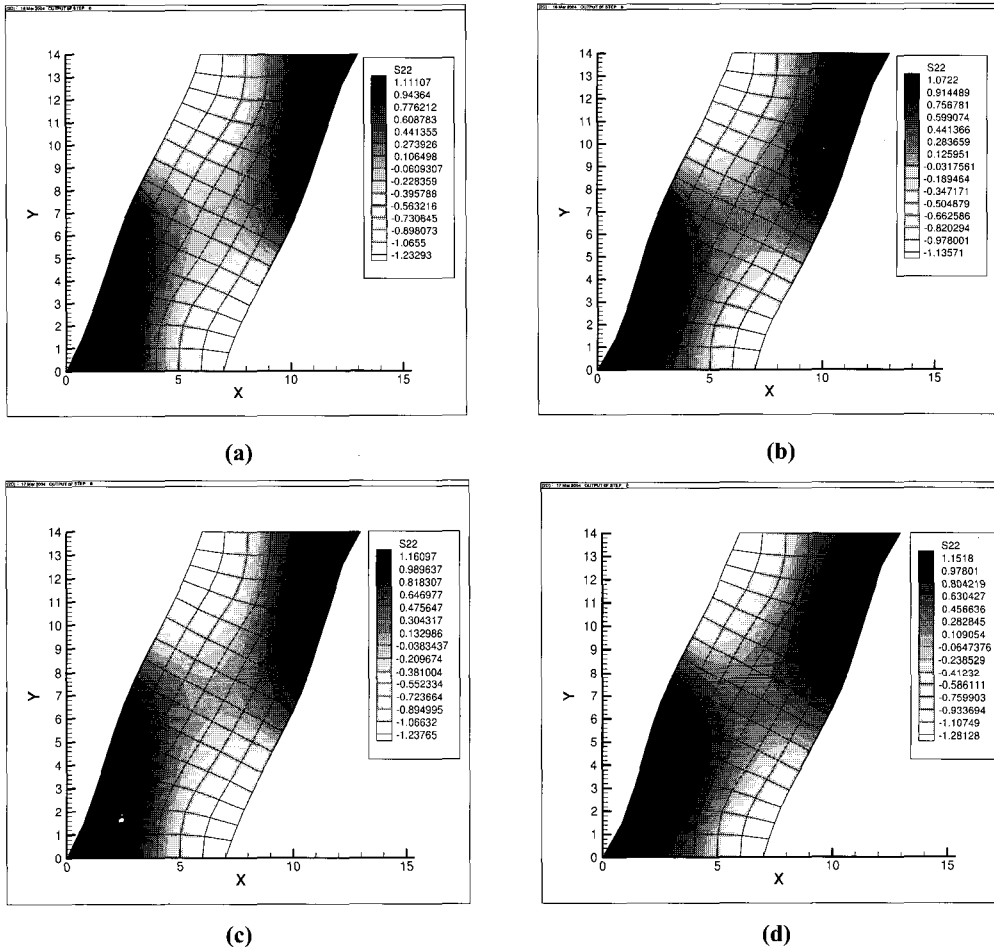


Fig. 6 Distribution of normal stress using various ω^p with $f=0.5$: (a) ALZ (type I), (b) ALZ (type III), (c) ALP (type I, $\rho=0.4$) and (d) ALP models (type III, $\rho=0.4$)

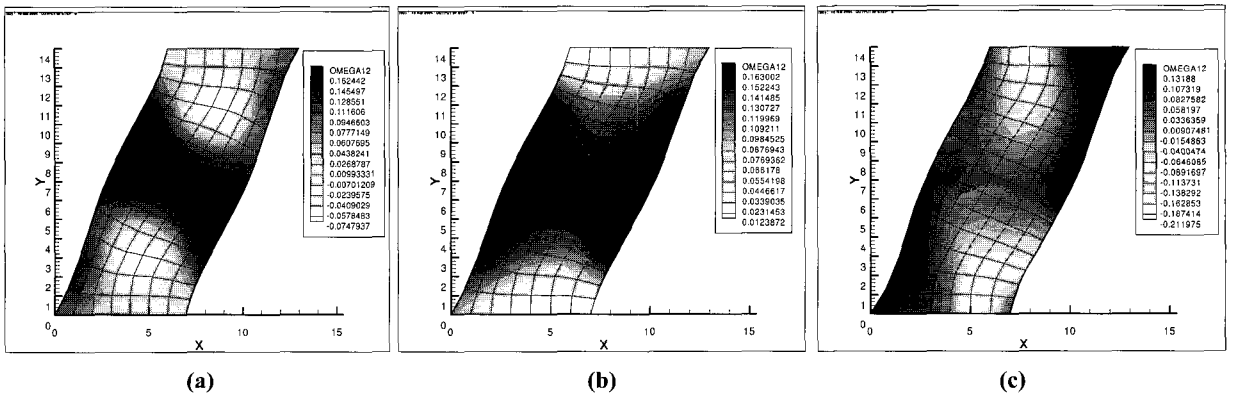


Fig. 7 Distribution of sub-structure spin (OMEGA12) using ALZ model for $f=0.5$ with various ω^p : (a) type I, (b) type II and (c) type III

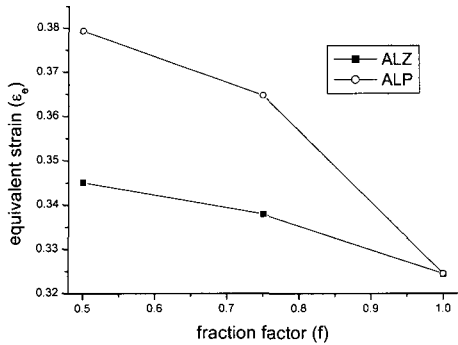


Fig. 8 Effect of f on strain at upper right corner of work piece under simple shear with type II w^p $\rho=0.4$ for ALP model

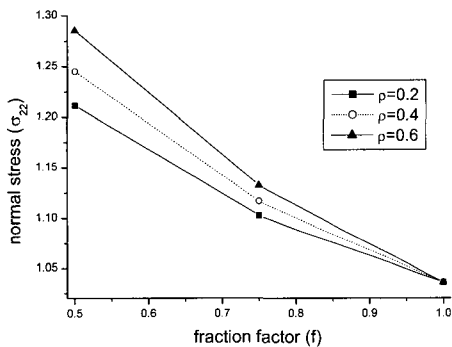


Fig. 9 Effect of ρ with f on normal stress at upper right corner of work piece under simple shear with type II w^p : ALP model

4. 결론

본 논문에서는 Armstrong-Frederick 경화식과 Phillips 및 Ziegler 경화식을 이용 두개의 후방 응력이 조합된 구성 방정식이 유도되었다. 소성 변형 거동에 대한 영향을 연구하기 위해 유한요소 해석이 수행되었으며 J_2 변형이론을 근간으로 하고있다. 소성 변형 거동은 경화 매개 변수 및 하부 구조 스펀의 정의에 따라 크게 좌우된다. 이동 경화 구성방정식이 보다 높은 변형 집중 현상을 보임이 밝혀졌다. 더욱이 type II에 따른 소성 스펀의 묘사가 객관적 응력을 적용에 적당한 것으로 판단된다. 단순 전단 변형 하에서 상세한 경화 매개 변수들

의 변화에 대해서 광범위한 수직 방향 응력의 변화가 관찰되었다. 그러므로 두개의 경화식에 대한 조합과 간단한 경화 매개 변수의 변환으로 다양한 구성 방정식을 도출할 수 있다.

참고 문헌

- [1] E. C. Aifantis, 1987, The Physics of Plastic Deformation, Int. J. Plast., Vol. 3, pp. 211~247.
- [2] H. M. Zbib, E. C. Aifantis, 1988, On the Localization and Post-localization Behavior of Plastic Deformation I On the Initiation of Shear Bands, Res. Mech., Vol. 23, pp. 261~277.
- [3] J. Ning, E. C. Aifantis, 1994, On anisotropic finite deformation plasticity II. A two-component model, Acta Mech., Vol. 106, pp. 73~85.
- [4] J. E. Paulun, R. B. Pecherski, 1992, On the relation for plastic spin, Arch. Appl. Mech., Vol. 62, pp. 376~385.
- [5] E. H. Lee, 1984, Finite Deformation Effects in Plasticity Analysis, Numerical Analysis of forming Processes, Ed. J. F. Pittman, O. C. Zienkiewicz, R. D. Wood and J. M. Alexander, John Wiley & Sons Ltd., pp. 373~391.
- [6] Y. F. Dafalias, 1982, A Missing Link in the Macroscopic Constitutive formulation of Large Plastic Deformation, Plasticity today, Modeling, Methods and Application, Proc. Int. Symp. On Current Trends and Results in Plasticity, CISM, Udine Italy, pp. 135~151.
- [7] Y. F. Dafalias, 1983, Corotational Rates for Kinematic hardening at Large Plastic Deformation, J. App. Mech., Vol. 50, pp. 561~565.
- [8] Y. F. Dafalias, 1985, The Plastic Spin, J. Appl. Mech., Vol. 52, pp. 865~871.
- [9] J. K. Dienes, 1979, On the Analysis of Rotation and Stress Rate in Deforming Bodies, Acta Mech., Vol. 32, pp. 217~232.
- [10] J. E. Paulun, R. B. Pecherski, 1985, Study of corotational rates for kinematic hardening in finite deformation plasticity, Arch. Mech., Vol. 37, No. 6, pp. 661~677.
- [11] J. E. Paulun, R. B. Pecherski, 1987, On the application of the plastic spin concept for the description of anisotropic hardening in finite

- deformation plasticity, *Int. J. Plas.*, Vol. 3, pp. 303~314.
- [12] B. Loret, 1983, On the effects of plastic rotation in the finite deformation of anisotropic elasto-plastic materials, *Mech. Mat.*, Vol. 2, pp. 287~304.
- [13] Z. Mroz, H. P. Shrivastava, R. N. Dubey, 1976, A Non-Linear Hardening Model and Its Application to Cyclic loading, *Acta Mech.*, Vol. 25, pp. 51~61.
- [14] J. L. Chaboche, 1986, Time-Independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity, *Int. J. Plas.*, Vol. 2, pp. 149~188.
- [15] A. Phillips, J. L. Tang, M. Ricciuti, 1974, Some New Observation on Yield Surfaces, *Acta Mech.*, Vol. 20, pp. 23~39.
- [16] A. Phillips, C. W. Lee, 1979, Yield Surfaces and Loading Surfaces Experiments and Recommendations, *Int. J. Sol. Struc.*, Vol. 15, pp. 715~729.
- [17] A. Khan, S. Huang, 1995, *Continuum Theory of Plasticity*, John Wiley & Sons. Inc., New York, pp. 215~229.
- [18] Z. Guo, O. Watanabe, 1995, Effects of Hypoelastic Model and Plastic Hardening on Numerical Simulation, *JSME Int. J.*, pp. 531~540.
- [19] M. F. Shi, J. C. Gerdeen, E. C. Aifantis, 1993, On finite deformation plasticity with directional softening Part II. Two-component model, *Acta Mech.*, Vol. 101, pp. 69~80.
- [20] M. Kuroda, 1996, Roles of Plastic Spin in Shear banding, *Int. J. Plas.*, Vol. 12, No. 5, pp. 671~693.
- [21] M. Kuroda, 1995, Plastic spin associated with a corner theory of plasticity, *Int. J. Plas.*, Vol. 11, No. 5, pp. 547~570.
- [22] J. Ning, E. C. Aifantis, 1994, I, On anisotropic finite deformation plasticity Part I. A two-back stress model, *Acta Mech.*, Vol. 106, pp. 55~72.
- [23] J. C. Christoffersen, J. W. Hutchinson, 1979, A Class of Phenomenological Corner Theories of Plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 27, pp. 465~487.
- [24] S. Kobayashi, S. I. Oh, T. Altan, 1989, *Metal Forming and the Finite Element Method*, Oxford Press Inc., New York, pp. 84~110.
- [25] M. A. Crisfield, 1997, *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structure*, John Wiley & Sons Ltd., West Sussex, England, Vol. 2, pp. 46~55.
- [26] 이병섭, 황두순, 윤수진, 홍성인, 1999, 이동경화를 고려한 좌굴 및 소성 불안정성 유동에 관한 연구, 한국소성가공학회 1999년도 춘계학술대회 논문집, pp. 98~101.
- [27] 황두순, 이병섭, 이용성, 윤수진, 홍성인, 재료의 특징에 따른 국부화에 대한 수치해석적 연구, 한국소성가공학회, 제9권, 제4호, pp. 395~403.