

SIMULINK를 이용한 비선형 동적 해석

김 성 겅*

서울산업대학교 기계설계자동화공학부

Nonlinear Dynamic Simulation using SIMULINK

Seong Keol Kim*

School of Mechanical Design and Automation Engineering, Seoul National University of Technology, Seoul 139-743, Korea
(Received 12 November 2004 / Accepted 31 December 2004)

Abstract : Analyses of dynamic models which were one and two degrees of freedom, and had the nonlinear springs and dampings with certain polynomial functions were performed from SIMULINK in MATLAB. Those consisted of 12 programs and were built on the basis of the preceding programs for the linear dynamic simulations. However the programs for the nonlinear simulations were quite different from those for the linear ones, and showed the results of the analyses in real time with animating. It was found that the programs would help us to solve any kind of nonlinear dynamic simulation with one and two degrees of freedom. Especially, the simulations for 1 DOF system with cubic nonlinear spring force showed the results for Duffing's equation, of which phenomena were jump-up and jump-down. It will be applied to the dynamic simulation of the car seat vibration with a passenger, of which model has the equivalent nonlinear springs and is two degrees of freedom.

Key words : Nonlinear spring(비선형 스프링), Nonlinear damping(비선형 감쇠), Nonlinear dynamic simulation(비선형 동적모사), Car seat vibration(자동차 시트진동), Duffing's equation(Duffing 방정식)

Nomenclature

- m : mass, kg
- k : nonlinear spring constant
- c : nonlinear damping coefficient
- $F(t)$: external excitation force, N

1. 서 론

일반적으로 비선형 방정식을 해석을 하기 전에 시스템을 구성하고 있는 파라미터 중 무엇이 비선형을 가지며, 어떤 형태의 비선형 함수인지 정의가 우선되어야 한다. 본 연구에서는 1 자유도 및 2 자유

도 동적 시스템을 해석의 대상으로 하였으며, 시스템 파라미터인 스프링 및 감쇠의 비선형성을 고려한다.¹⁾ 그리고 스프링 및 감쇠의 비선형 함수 형태는 어떤 형태의 다항식으로 표현 가능한 함수는 적용이 가능하도록 프로그램을 작성하고자 한다. 주어진 임의의 가진력에 대해 실시간으로 애니메이션이 작동되면서 그 해석 결과를 보여주는 비선형 동적 거동 해석프로그램을 작성하였으며, MATLAB 상용 프로그램 중 SIMULINK를 사용하였다.²⁾ 작성된 비선형 동적거동 해석 프로그램을 통해 스프링 및 감쇠가 다항식 형태의 비선형성 갖는 2자유도 시스템에 대해 해석이 가능하므로, 궁극적으로 자동차의 시트와 탑승자를 비선형 시스템으로 모델링³⁾을 하여 실시간 전산모사에 적용에 기초 연구로 활

*To whom correspondence should be addressed.
rhett@snut.ac.kr

용하고자 한다. 일반적으로 자동차의 시트의 재질은 폼(Foam)으로 유연하고, 변형이 큰 재료이므로 강성의 비선형성을 갖고 있다.⁴⁾

본 연구에서 개발되는 프로그램을 통해 많은 국내의 대학에서 사용되고 있는 MATLAB 상용 프로그램의 활용도를 확장하고, 연구의 도구로 사용된 SIMULINK를 이용하여, 다양한 공학 프로그램을 개발하는 계기가 될 수 있다.⁷⁾

2. 1자유도 비선형 동적해석

2.1 프로그램 개발

본 연구의 대상으로 한 1자유도 비선형 시스템은 한 개의 질량(m)과 한 개의 비선형스프링(k) 그리고 한 개의 비선형 감쇠(c)로 이루어져 있다.

2.1.1 상태방정식⁹⁾의 유도 및 프로그램의 구성

일반적인 예로 스프링에 의한 탄성력이 변위의 3승에 비례하고, 감쇠력 또한 속도의 3승에 비례를 한다고 가정하고, 1자유도 비선형 시스템의 운동방정식을 구성하면 식 (1)과 같으며, 상태 방정식으로 나타내기 위해 변형한 식은 식 (2)이다.

$$m\ddot{x} + c\dot{x}^2 + kx^2 = F(t) \quad (1)$$

$$[mD^2 + c\dot{x}^2D + kx^2]x = F(t), \quad D = \frac{d}{dt}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dt^2} \quad (2)$$

상태변수는 식 (3)과 같으며, 최종 상태방정식은 식 (4)이다.

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}_1 = v \quad (3)$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m}x_1^2 & -\frac{c}{m}x_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F(t)}{m} \end{bmatrix} u \quad (4)$$

1자유도 비선형시스템의 해석을 위해 작성된 프로그램은 10개이며, 각각의 프로그램의 상관관계는 Fig. 1에서 보여준다.

2.1.2 해석을 위해 필요한 도구

해석을 수행하기 전에 SIMULINK²⁾ 내에서 해석을 위해 필요한 블록들은 선정해야 하며, Fig. 1은 1자유도 비선형 해석을 위해 작성된 프로그램이다.

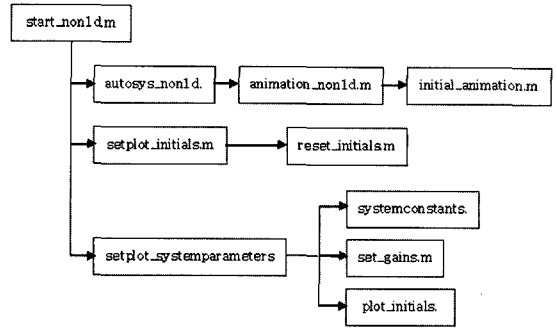


Fig. 1 Schematic of relationships of the programs for 1 DOF

이 그림을 보면, 운동방정식으로부터 유도된 상태 방정식에서, 사용자에게 의해 입력된 시스템의 스프링 상수 및 감쇠 값 등 상태변수들을 질량으로 나누어 나타내고 있으며, 외부의 힘은 그림과 같이 시간의 어떤 함수로도 나타내어 가할 수 있다. 또한, 해석의 결과는 실시간으로 보여주며, 사용자의 필요에 의해 주파수 영역에서도 그 결과를 볼 수 있다. 또한 비선형 스프링 함수와 비선형 감쇠 함수를 입력할 수 있는 부분이 있어, 이것들을 이용하여 어떤 종류의 비선형 스프링 및 감쇠 함수를 사용 가능케 하였다.

실제 해석을 수행하기 전에 작성될 각각의 입력 창들은 선형해석에서 작성된 프로그램들을 사용하였다. SIMULINK 내에서 해석을 위해 필요한 블록들을 선택하여 작성하였으며, Fig. 2에 나타내었다.

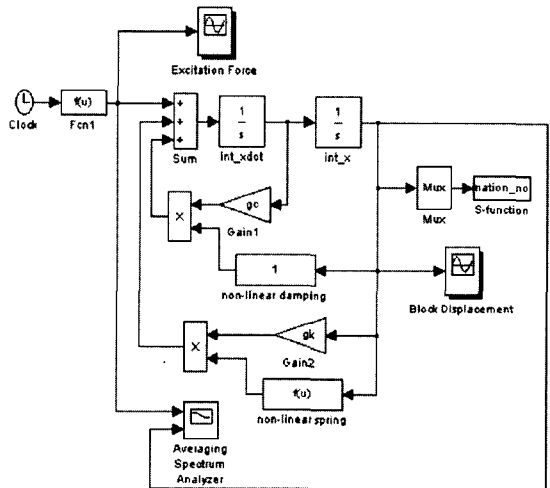


Fig. 2 SIMULINK program for the 1 DOF nonlinear system

2.2 전산모사(Simulation) 및 해석결과

2.2.1 해석조건

본 논문에서 작성된 프로그램을 사용하여, 시스템 파라미터 중에서 감쇠 값은 상수로 고정하고 3차의 비선형 함수인 스프링에 의한 탄성력을 변화시킨 해석과 3차의 비선형 함수인 스프링에 의한 탄성력은 고정시키고, 속도의 선형함수 및 속도의 3차함수의 최고차 항의 계수를 변화시킨 해석을 수행하였다. 해석 조건은 Table 1에 제시하였다.

Table 1 Conditions for the whole simulations

Items	
Method for simulation	Runge-Kutta
Total time	40 seconds
Time interval	0.005 second

2.2.2 시간영역에서의 해석

1) 해석 I

해석 I에서는 시스템 파라미터 중 스프링에 의한 탄성력을 3차의 비선형 함수로 고정시키며, 감쇠에 의한 감쇠력을 속도의 1차의 선형 함수로 정하고, 4가지로 변화시키면서 해석을 수행하였다. 본 해석에서 외력의 크기는 100N으로 고정하였으며, 낮은 주파수에서 점차로 주파수를 증가시키는 sine sweep 및 높은 주파수에서 점차로 주파수를 감소시키는 sine sweep을 하였다 시스템 파라미터의 조건은 Table 2, 그리고 시간영역 및 주파수 영역에서의 해석 결과는 Fig. 3과 Fig. 4에 나타내었다.

1 자유도 비선형 시스템에 대한 해석에서는 Duffing⁶⁾ 방정식에서도 알 수 있듯이 낮은 주파수에서 점차로 주파수를 증가시키면서 가진하는 경우 점프업(Jump-up) 현상이 발생이 되고, 반대로 높은 주파수에서 점차로 주파수를 감소시키면서 가진하는 경우 점프다운(Jump-down) 현상이 점프업 주파수보다는 낮은 주파수에서 발생된다.

Table 2 Conditions for the analysis I

Items	
Excitation force	$F \sin(0.15t^2 + t)$ (N), $F = 100$
Mass	5 (kg)
Elastic force by spring	$2000x + 250x^3$ (N/m)
Damping coefficient	6 (Ns/m)

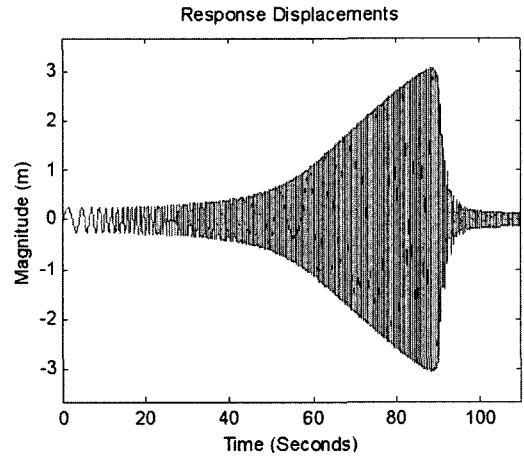


Fig. 3 Results of simulation for $m = 5$, $k = 2000x + 250x^3$, $c = 6$, $x(0) = 0$ and $F_{max} = 100$ (increasing sine sweep)

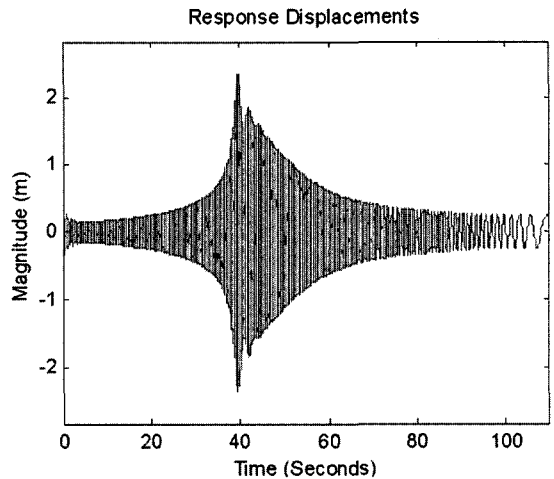


Fig. 4 Results of simulation for $m = 5$, $k = 2000x + 250x^3$, $c = 6$, $x(0) = 0$ and $F_{max} = 100$ (decreasing sine sweep)

2) 해석 II

해석 II에서는 스프링에 의한 탄성력을 3차의 비선형 함수로 고정시키며, 감쇠에 의한 감쇠력을 속도의 3차의 비선형 함수로 정하고, 최고차항의 계수를 3가지로 변화시키면서 해석을 수행하였다. 본 해석에서 외력의 크기는 100N으로 고정하였으며, 낮은 주파수에서 점차로 주파수를 증가시키는 sine sweep만을 사용하였다. 해석을 위해 사용된 조건은 Table 3, 그리고 해석 결과는 Fig. 5에 나타내었다.

Table 3 Conditions for the analysis II

Items	
Excitation force	$F \sin(0.15t^2 + t)$ (N), $F = 100$
Mass	5 (kg)
Elastic force by spring	$2000x + 250x^3$ (N/m)
Damping force by damper	$6\dot{x} + c\dot{x}^3$ (Ns/m), $c = 7.5$

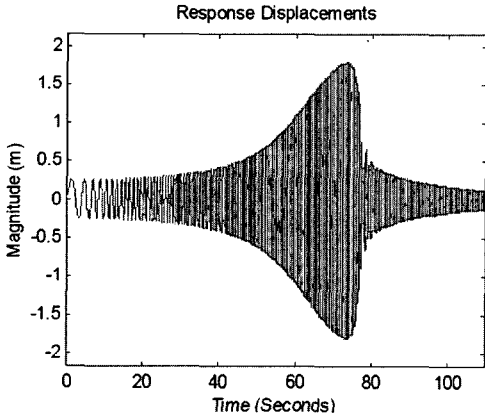


Fig. 5 Results of simulation for $m = 5, k = 2000x + 250x^3, c = 6\dot{x} + 7.5\dot{x}^3, x(0) = 0$ and $F_{max} = 100$

Table 4 Conditions for the analysis III

Items	
Excitation force	$F \sin(0.15t^2 + t)$ (N), $F = 100$
Mass	5 (kg)
Elastic forces by spring	$2000x + kx^3, k = 5$ (N/m)
Damping coefficient	6 (Ns/m)

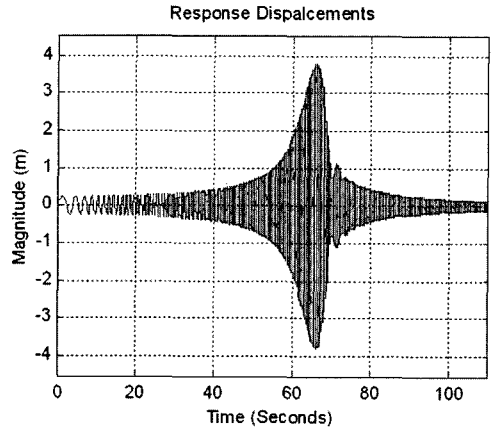


Fig. 6 Results of simulation for $m = 5, k = 2000x + 5.0x^3, c = 6, x(0) = 0$ and $F_{max} = 100$

3) 해석 III

해석 III에서는 스프링에 의한 탄성력을 3차의 비선형 함수로 선정하고 최고차수의 계수를 4가지로 변화시키면서 해석을 수행하였다. 감쇠에 의한 감쇠력은 선형함수로 고정하고, 외력의 크기는 100N으로 고정하였으며, 낮은 주파수에서 점차로 주파수를 증가시키는 sine sweep을 하였다. 해석을 위해 사용된 조건은 Table 4, 그리고 해석 결과는 Fig. 6에 나타내었다.

2.2.3 해석결과 및 고찰

해석 I의 결과에서, 점프업 주파수가 점프다운 주파수 보다 높은 주파수에서 나타났으며, 그 크기 또한 점프업 현상에서 점프다운 현상보다 크게 도출되어, 일반적인 다항함수의 비선형 강성을 갖는 Dumping 방정식의 경향을 동일하게 보여주었다. 또한, 감쇠계수가 증가할수록 감쇠의 일반적인 현상인 응답의 크기가 감소되었으며, 감쇠계수가 증가할수록 점프업 주파수가 감소하였고, 점프업 현상의 뚜렷함도 점차로 축소되었다. 해석 II에서는 감쇠력의 비선형성이 증가할수록 동일한 가진력에 대

해 그 응답의 크기는 점차로 감소를 하였으며, 점프업 주파수도 감소를 하였다. 그리고 비선형성이 증가할수록 점프업 현상이 뚜렷해지는 정도가 감소하였다. 해석 III에서는 스프링에 의한 탄성력의 비선형성이 증가할수록 그 응답의 크기는 거의 동일하였으며, 점프업 주파수는 감소를 하였다.

3. 2자유도 동적해석

3.1 프로그램의 개발

본 연구에서의 2자유도 비선형시스템은 두 개의 질량과 두 개의 비선형스프링 그리고 두 개의 선형 또는 비선형 감쇠로 이루어져있다.

3.1.1 상태방정식의 유도 및 프로그램의 구성

스프링의 강성에 의한 탄성력과 감쇠에 의한 감쇠력을 식 (5)와 같은 비선형 함수형태를 갖는다고 가정하면, 운동방정식은 식 (6)과 같으며, 상태 방정식으로 나타내기 위해 변형한 식은 식 (7)이다.

$$F_{s1} = k_1 x_a^3, \quad F_{s2} = k_2 x_b^3, \quad F_{d1} = c_1 \dot{x}_a^3, \quad F_{d2} = c_2 \dot{x}_b^3 \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_a + c_1 \dot{x}_a^3 + k_1 x_a^3 + c_2 (\dot{x}_a^3 - \dot{x}_b^3) + k_2 (x_a^3 - x_b^3) &= F(t) \\
 m_2 \ddot{x}_b + c_2 (\dot{x}_b^3 - \dot{x}_a^3) + k_2 (x_b^3 - x_a^3) &= 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
 [m_1 D^2 + (c_1 + c_2) \dot{x}_a^2 D + (k_1 + k_2) x_a^2] x_a - k_2 x_b^3 - c_2 \dot{x}_b^3 &= F(t) \\
 [m_1 D^2 + c_2 \dot{x}_b^2 D + k_2 x_b^2] x_b - k_2 x_a^3 - c_2 \dot{x}_a^3 &= 0 \\
 D &= \frac{d}{dt}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dt^2}
 \end{aligned} \tag{7}$$

상태변수는 2자유도이므로 식 (8)이 되고, 최종 상태방정식은 식 (9)이다.

$$x_1 = x_a, \quad x_2 = \dot{x}_1 = v_a, \quad x_3 = x_b, \quad x_4 = \dot{x}_3 = v_b \tag{8}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(k_1+k_2)x_1^2 & -\frac{c_1+c_2}{m_1}x_2 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_1}x_2^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_2}{m_2}x_1^2 & \frac{c_2}{m_2}x_2 & -\frac{k_2}{m_2}x_3^2 & -\frac{c_2}{m_2}x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F(t)}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{9}$$

2자유도 비선형 해석을 위해 작성된 프로그램은 모두 12개이며, 각각의 프로그램의 상관관계는 Fig. 7에 나타내었다.

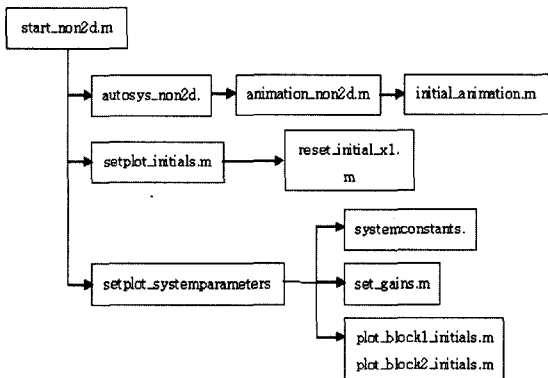


Fig. 7 Schematic of relationships of programs for 2 DOFs

3.1.2 해석을 위해 필요한 도구

SIMULINK 내에서 2 자유도 비선형해석을 위해 필요한 블록들을 선택하여 작성하였으며, 그 결과를 Fig. 8에 보여준다. 해석을 위해 필요한 각각의 입력 창들은 1자유도 비선형해석과 같이 선형해석에서 작성된 프로그램들을 사용하였다.

3.2 전산모사 및 해석결과

3.2.1 해석의 조건

1자유도 비선형 해석조건인 Table 1과 동일하게

사용하였다.

3.2.2 시간영역에서의 해석

1) 해석 I

스프링에 의한 탄성력을 3차의 비선형 함수로 선정하고, 각 자유도에서의 탄성력의 최고차수를 2가지로 변화시키면서 해석을 수행하였으며, 각각의 해석에 대해 낮은 주파수에서 점차로 주파수를 증가시켜 가진시키는 방법과 높은 주파수에서 점차로 낮은 주파수로 가진시키는 방법에 대한 해석을 실시하였다. 본 해석에서는 각 자유도에서의 감쇠 값은 상수로 고정하였고, 각 자유도에서의 외력은 첫 번째 자유도에서만 가진력을 작용하였다 시스템 파라미터의 조건은 Table 5에서, 그리고 $k_1 = 250$ 와 $k_2 = 250$ 에 대한 해석 결과는 Fig. 9와 Fig. 10에 나타내었다.

Table 5 Conditions for the analysis I

Items	
Excitation force	$F \sin(0.15t^2 + t)$ (N), $F_1=100$ and $F_2=0$
Mass	$m_1 = 5, m_2 = 1$ (kg)
Elastic forces by spring	$F_{s1} = 4500x + k_1x^3, k_1 = 50$ and 250 (N/m)
Dampings	$F_{s2} = 100x + k_2x^3, k_2 = 50$ and 250 (N/m)
	$c_1 = 6, c_2 = 2$ (Ns/m)

2) 해석 II

스프링에 의한 탄성력을 3차의 비선형 함수로 선정하고, 각각의 감쇠력을 속도의 선형함수로 선정하고 각각의 자유도에서 감쇠계수를 5가지로 변화시키면서 해석을 수행하였다. 해석을 위해 사용된 조건은 Table 6과 같으며, $c_1 = 6$ 과 $c_2 = 2$ 에 대한 해석 결과는 Fig. 11에 나타내었다.

Table 6 Conditions for the analysis II

Items	
Excitation force	$F \sin(0.15t^2 + t)$ (N), $F_1=100$ and $F_2=0$
Mass	$m_1 = 5, m_2 = 1$ (kg)
Elastic forces by spring	$F_{s1} = 4500x + k_1x^3, k_1 = 50$ (N/m)
Damping coefficients	$F_{s2} = 100x + k_2x^3, k_2 = 50$ (N/m)
	$c_1=1.2, 3, 6, 12, 30$ (Ns/m)
	$c_2=0.4, 1, 2, 4, 10$ (Ns/m)

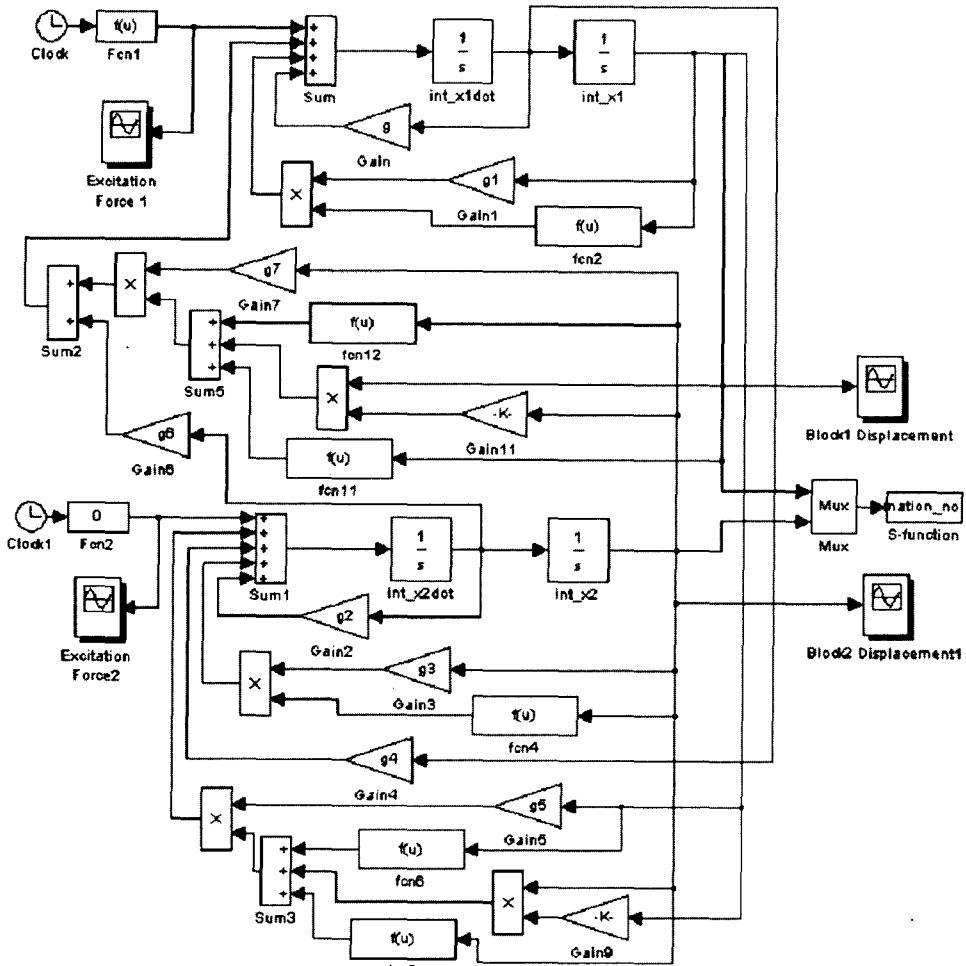


Fig. 8 SIMULINK program for the 2 DOFs nonlinear system

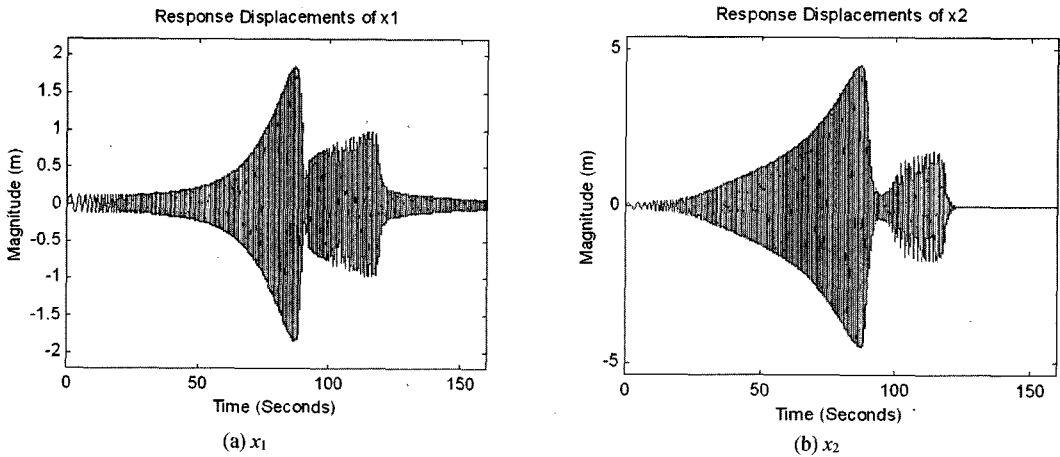


Fig. 9 Results of simulation in $F_{1max}=100$, $m_1=5$, $k_1=4500x_1 + 250.0x_1^3$, $c_1=6$, $F_{2max}=0$, $m_2=1$, $k_2=100x_2 + 250.0x_2^3$, and $c_2=2$ (increasing sine sweep)

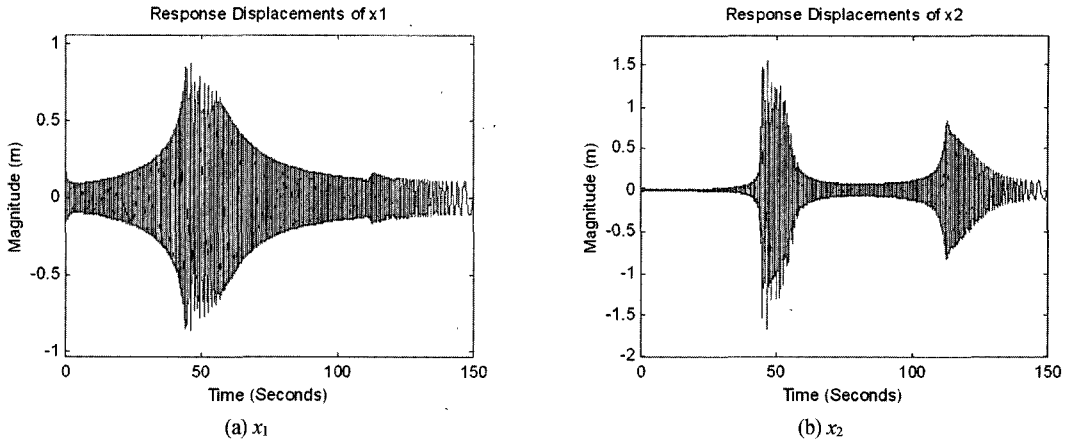


Fig. 10 Results of simulation in $F_{1max}=100$, $m_1=5$, $k_1=4500x_1 + 250.0x_1^3$, $c_1=6$, $F_{2max}=0$, $m_2=1$, $k_2=100x_2 + 250.0x_2^3$, and $c_2=2$ (decreasing sine sweep)

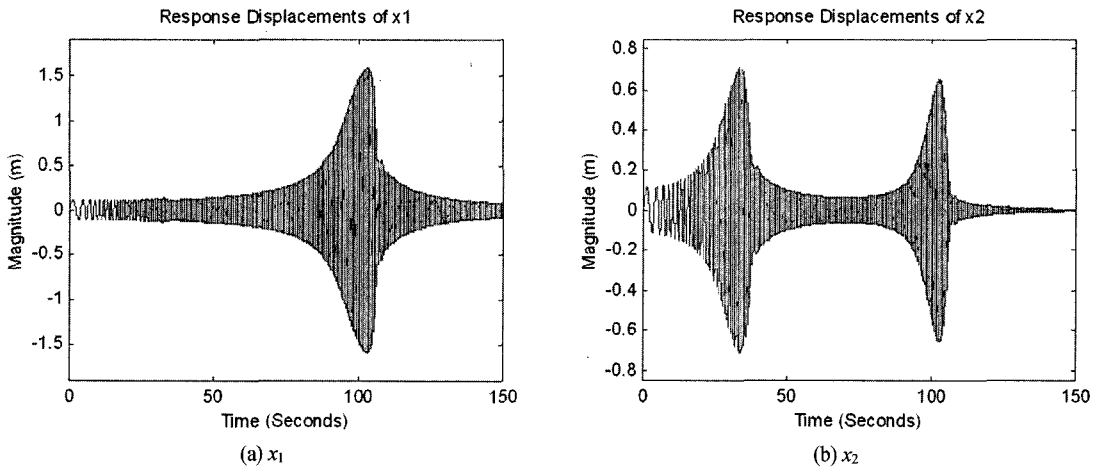


Fig. 11 Results of simulation in $F_{1max}=100$, $m_1=5$, $k_1=4500x_1 + 250.0x_1^3$, $c_1=6$, $F_{2max}=0$, $m_2=1$, $k_2=100x_2 + 250.0x_2^3$, and $c_2=2$ (increasing sine sweep)

3.2.3 해석결과 및 고찰

해석I에서는 첫 번째 자유도에서만 가진력을 낮은 주파수로부터의 증가 및 높은 주파수로부터의 감소 sine sweep 해석에 대해서는 스프링에 의한 탄성력의 비선형성에 따라 점프업 및 점프다운 현상이 각각의 자유도에서 한 개 또는 두 개가 나타났다. 해석 II에서는 각각의 자유도에서 감쇠계수가 증가할수록 감쇠증가의 일반적인 현상인 각 자유도에서 점프업 주파수 크기와 그 응답크기의 증가되었으며, 감쇠 계수가 낮은 조합에서는 첫 번째 자유도에서도 두 개의 점프업 현상이 뚜렷하게 나타났으나, 감쇠계수가 증가할수록 첫 번째 자유도에서의 점프

업 현상은 한 개로 축소되었다.

4. 결론

1) 1자유도 비선형 시스템에서 스프링에 의한 탄성력은 변위의 비선형성을, 감쇠에 의한 감쇠력은 속도의 비선형성을 갖는다. 작성된 10개의 프로그램을 사용하여 다양한 비선형 탄성력과 비선형 감쇠력에 대한 해석을 수행하였으며, 그 결과가 점프업 현상 및 점프다운 현상 등 비선형 탄성력을 갖는 1자유도 비선형 시스템의 Duffing 방정식의 결과를 보여주어 그 타당성을 증명하였다.

- 2) 2자유도 비선형 시스템의 해석을 위해, 두 개의 비선형 스프링에 의한 탄성력과 두 개의 비선형 감쇠에 의한 감쇠력을 추가하여 12개의 프로그램을 작성하였다. 비선형 탄성력 변화에 대한 해석 그리고 선형 감쇠력 변화에 대한 해석 등 다양한 해석을 수행하였다.
- 3) 본 연구를 통해 작성된 프로그램인 비선형 동적 거동 해석 프로그램은 궁극적으로 자동차의 시트와 탑승자를 비선형 시스템으로 모델링하여 전산모사를 하려는 목적으로 작성되었다.

References

- 1) A. H. Nayfeh, Nonlinear Oscillations, John Wiley & Sons, NY, 1979.
- 2) The MATH WORKS Inc., Simulink (User's Guide), Prentice Hall, NJ, 1996.
- 3) S. K. Kim, S. W. White, P. Davies and A. K. Bajaj, "Simplified Models of the Vibration of Mannequins in Car Seats," Journal of Sound and Vibration Vol.264, No.1, pp.49-90, 2003.
- 4) S. W. White, S. K. Kim, A. K. Bajaj, P. Davies, D. Showers and P. Liedtke, "Experimental Techniques and Identification of Nonlinear and Viscoelastic Properties of Flexible Polyurethane Foam," Nonlinear Dynamics, Vol.22, No.3, pp.281-313, 2000.
- 5) V. S. Vladimirov, Equations of Mathematical Physics, Marcel Dekker, 1971.
- 6) W. Weaver Jr., S. P. Timoshenko and D. H. Young, Vibration Problems in Engineering, John Wiley & Sons, NY, 1990.
- 7) H. S. Han, J. W. Seo, G. S. Rho, S. J. Heo and K. H. Kim, "Dynamic Modeling of Automotive Shock Using Simple Nonlinear Models," Transactions of KSAE, Vol.11, No.5, pp.156-162, 2003.