

한국과 미국의 초등수학 교과서(Harcourt Math) 비교 연구 -도형영역을 중심으로-

최 근 배 (제주교육대학교)

김 해 규 (제주교육대학교)

I. 서론

도형(기하)영역은 수학교육과정의 중요한 요소 중의 하나이다. 그 이유는 일상적인 생활의 상황을 설명하는 데 유용하며, 다른 수학영역과 다른 교과와 깊은 관련성을 지니고 있기 때문이다. 또한 NCTM(1989, 2000)에서도 기하적인 개념과 공간감이 좋은 학생은 수의 개념과 측정의 개념뿐만 아니라, 다른 상급의 수학 주제를 배우는데 더 유리하다고 주장하고 있다. 따라서 초등에서의 도형에 대한 올바른 개념형성이 수학학습에 지대한 영향을 미친다고 볼 수 있다.

제 7차 교육과정의 초등수학 교과서는 과거 어느 때보다도 많은 변화를 가져왔다고 할 수 있다. 활동중심, 실생활 중심, 학생중심으로의 전환이 그 변화의 추축이다. 이에 따라, 초등 수학교과서의 도형영역에서도 많은 변화를 가져왔다.

한편, NCTM의 기준은 미국의 수학과 교육과정과 교과서에 많은 영향을 주고 있다. 또한 우리나라의 수학과 교육과 관련된 많은 논문들에서도 NCTM의 기준을 많이 인용하고 있는 실정이고 이에 따라, 우리의 초등수학 교육과정과 교과서도 NCTM의 많은 영향을 받고 있다고 생각된다. 그러나 아무리 좋은 교과과정하의 교과서라고 할지라도 결국 교육을 이끌어 가는 핵심적인 주체는 교사이기 때문에 현행 교육과정에 얽매이기보다는 교육과정을 수정 혹은 보완하여 학생을 가르치는 방향으로의

전환이 필요하다고 생각된다.

현재까지 연구되어진 우리나라와 미국의 수학과 교육과정이나 교과서에 대한 비교분석 연구로는 김연미(1999), 나귀수 외(2003) 등을 들 수 있다. 김연미(1999)는 우리나라와 미국의 초등학교 저학년 수학교과서 및 교육과정을 비교분석 하였다.¹⁾ 나귀수 외(2003)는 미국의 캘리포니아주의 교육과정 중 우리의 관심분야인 기하영역과 관련된 연구에서 우리 교과서와 차이점을 각 주제별로 도입되는 시기와 순서를 중심으로 분석하고 있다.

각 연구들의 공통적인 특징은 단계별 상세한 내용의 비교분석이라기보다는 비교적 내용 전반에 대한 분석을 하고 있다는 것이다. 다시 말해서, 기하영역에서의 각 주제별로 도입하고 있는 내용, 시기와 순서를 중심으로 비교분석을 하였다. 그러나 우리 연구에서의 비교 관점은 NCTM(2000)의 기준과 연계된 미국의 초등수학 교과서 중 하나를 택하여, 우리나라의 제 7차 교육과정 초등수학 교과서와 도형영역을 중심으로 구체적 분석을 하자는 것이다. 좀더 구체적으로 말하면, 본 연구에서는 우리나라의 제 7차 교육과정 초등수학 <1-가>에서 <6-나> 단계 교과서(교육부, 2004)와 미국의 초등수학 교과서

* 본 논문은 2004년도 제주교육대학교 학술연구비지원에 의하여 연구되었음.

* 2005년 2월 투고, 2005년 4월 심사 완료

* ZDM분류 : D13

* MSC2000분류 : 97D10, 97U20

* 주제어 : 교육과정, 도형(기하)영역.

1) 우리나라의 제 6차 교육과정의 초등학교 저학년(1,2,3 학년)의 수학 교육내용 중 좀 더 심화시킬 필요가 있다고 생각되는 영역을 NCTM(1995)의 기준 외에 몇몇 주의 교육과정과 교과서를 비교 분석하였다. 영역별 교육과정 분석, 수학적 의사소통과 그룹 활동의 개선방안, 교과서 비교 등을 통해서 미국의 교과서들은 (1) 흥미유발 및 동기부여 (2) 실생활 및 타 학과와의 연계성 (3) 수학적 의사소통 및 소 그룹 활동 (4) 철저한 피드백의 고려라는 측면에서 우리가 참고할 만한 좋은 모델이 될 수 있다는 결론을 내리고 있다. 특히, 우리의 관심 영역인 기하영역에서, 미국과 우리의 교과서의 차이점으로, 미국의 저학년의 경우에는 내용의 연계성의 측면에서 입체도형을 1학년, 2학년, 3학년에서 계속 다루고 있음과 위상적 개념, 위치(위, 아래, 오른쪽, 왼쪽) 개념의 사용을 강조하고 있다.

Harcourt Math(이하 미국 교과서; Evan M. Maletsky et al., 2002a, 2002b, 2002c, 2002d, 2002e, 2002f)의 도형영역과 도형과 관련된 측정영역을 중심으로 다루고 있는 내용과 개념의 상세하고, 세부적인 비교분석을 목적으로, 각 단계별 주제들의 도입 시점, 순서뿐만 아니라 다루는 방식과 개념 등을 분석하고 수학적 용어문제, 도형의 분류문제, 공간감각 기르기를 중심으로 분석결과를 도출하고자 한다. 여기서 우리가 분석하고자하는 미국 초등수학 교과서인 Harcourt Math는 기본적으로 NCTM(2000)에서 제시하고 있는 기준과 연계된 교과내용으로 구성되어 있고, 그 내용 또한 충실하다고 판단된다. 이러한 점이 이 교과서를 선택한 주된 이유이다.

이러한 분석의 목적은 NCTM(2000)에서의 수학교육 방향에 대한 시사점을 제공하고, 향후 초등수학 교과서의 도형영역에서의 개선해야할 점을 고려하고, 교육의 주체인 교사들에게 우리나라의 현행 교과과정 초등수학 교과서의 도형영역과 도형과 관련된 측정영역의 내용을 다양하게 재구성하여 학생들을 가르치는데 도움을 주고자 함이다.

II. 연구방법

1. 연구대상

우리나라의 경우에는 제 7차 교육과정의 초등학교 교과서의 도형관련 영역을 연구의 주된 대상으로 삼았고, 미국의 경우에는 Harcourt School Publishers의 초등수학 교과서인 Harcourt Math²⁾에 수록된 도형관련 영역

- 2) 이 교과서의 개략적인 특징을 살펴보면 다음과 같다.
- 대략 6단원 30장으로 구성되어 있다. 특히, 도형(기하)영역은 2권(teacher's edition 기준)에서 다루고 있고, 우리와는 달리 <1단계>부터 <6단계>까지 매 단계마다 평면도형 및 입체도형과 관련된 내용을 다루고 있다. 또한 도형과 관련된 내용구성의 관점에 있어서, 미국의 경우는 우리보다 범주화시키는 경향이 강하다.
 - 혼련과 연습을 통한 수학교수 학습 이론을 전 영역, 전 단원에 걸쳐 계속 도입하고 있다.
 - 입체도형영역에서도 평면도형을 선수학습으로 계속 숙지시키고 있으며, 수와 연산 영역의 내용에 대한 '깜짝 퀴즈'형식의 문제가 제시된다.
 - 폴리아의 문제해결 4단계에 따른 문제해결 전략을 전 영역,

을 중심으로 하였다.

2. 연구절차

연구의 순서는 다음과 같은 단계로 제시하고자 한다. 첫째, 우리나라의 제 7차 교육과정과 NCTM(2000)의 기준에 나타난 초등수학과 관련된 도형영역의 단계별 목표를 비교분석한다.

둘째, 각 단계별 지도내용의 체계 표와 도입하고 있는 수학적 용어를 비교분석한다.

셋째, 각 단계별로 지도내용을 상세히 비교분석 한다.

III. 연구의 실제

1. 제 7차 교육과정과 NCTM(2000)의 기준에 나타난 도형영역의 단계별 목표 비교

가. 우리나라의 제 7차 초등학교 수학과 교육과정에 서 도형영역의 단계별 목표를 살펴보면 다음과 같다(강문봉 외, 2002).

<1-가> 생활에서 접하게 되는 기본적인 입체도형의 모양에 대한 감각을 익힌다.

<1-나> 기본적인 평면도형의 모양에 대한 감각을 기른다.

<2-가> 기본적인 평면도형의 구성요소를 파악하여, 구체물이나 그림의 이동을 탐구할 수 있다.

<2-나> 쌓기 나무로 여러 가지 입체 모양을 구성할 수 있다.

<3-가> 직각삼각형, 직사각형, 정사각형을 이해하며, 평면도형이나 무늬의 이동을 알 수 있다.

<3-나> 주어진 도형으로 규칙을 정해 여러 가지 무늬를 꾸밀 수 있다.

<4-가> 여러 가지 삼각형의 기본성질을 이해하고,

전 단원에 걸쳐 계속 도입하고 있다.

- 우리나라의 교과서와는 다르게 총 천연색 사진을 제시하여 실제로 살아 있는 다양한 실생활의 예를 도입하고 있다.
- 교과서의 말미 부분에 각 단계에서 사용되는 용어들을 사전식 배열방법으로 일목요연하게 정리하여 제시하고 있다.
- 교과서의 맨 뒤에 색인이 제시되고 있다.

내각의 합을 구할 수 있다.

<4-나> 수직과 평행, 여러 가지 사각형의 기본 성질을 이해하고, 주어진 도형으로 여러 가지 모양을 만들 수 있다.

<5-가> 직육면체와 정육면체의 기본 성질을 이해하고, 여러 가지 모양으로 주어진 도형을 덮을 수 있다.

<5-나> 도형의 합동과 대칭의 의미를 이해한다.

<6-가> 각기둥과 각뿔을 이해하고, 각기둥의 전개도를 그릴 수 있으며, 쌓기 나무로 조건에 맞는 입체도형을 만들 수 있다.

<6-나> 원기둥, 원뿔 및 회전체를 이해한다.

나. NCTM(2000)이 제시한 도형영역과 관련된 기준
2000년 NCTM에서 학교수학을 위한 원리와 기준을 제시하고 있는데, 초등수학과 관련된 기준은 Pre-K-2, 3-5, 6-8 단계(grade bands)로 구성되어 있다. 이들 기준들 중에서 기하와 관련된 기준의 교육프로그램에는 학생들이 성취해야 할 목표 4가지와 이를 위한 단계(grade band)별 목표를 세분화하여 제시하고 있다.

<목표 1> 2·3차원 기하적 모양의 성질과 특성을 분석할 수 있어야 하고, 기하적 관계에 관한 수학적 논의를 발달시킬 수 있어야 한다.

<목표 2> 좌표 기하와 다른 표현 구조를 이용하여, 위치를 규명하고 공간관계를 묘사할 수 있어야 한다.

<목표 3> 수학적 상황을 분석하기 위하여, 대칭성을 이용하거나 변환을 적용할 수 있어야 한다.

<목표 4> 문제를 해결하기 위하여, 시각화, 공간적인 추론과 기하적 모델링을 사용할 수 있어야 한다.

먼저, 위에 제시한 <목표 1>을 달성하기 위한, 학교 수업에서의 학생들이 성취해야 할 단계별 목표는 다음과 같다.

(1) Pre-K-2 단계

· 2·3차원 모양을 인식하고, 명명하고, 구성하고, 그리고, 비교하고, 분류할 수 있다.

· 2·3차원 모양의 특성과 부분을 묘사할 수 있어야 한다.

· 2·3차원 모양을 결합하고, 조건 결과를 탐구하고 예측할 수 있어야 한다.

(2) 3-5 단계

· 2·3차원 모양의 특성을 식별하고, 비교하고, 분석할 수 있어야 하며, 또한 그 특성을 묘사하기 위한 용어를 개발할 수 있어야 한다.

· 2·3차원 모양을 그들이 지닌 성질에 따라 분류할 수 있어야하며, 또한 삼각형, 피라미드와 같은 모양 부류(class)의 정의를 개발할 수 있어야 한다.

· 세분화, 결합, 변형된 모양의 결과에 관해서 탐구하고, 묘사하고, 추론할 수 있어야 한다.

· 합동과 닮음을 조사할 수 있어야 한다.

· 기하적 특성과 관계에 관한 추측을 만들고 검토할 수 있어야하며, 또한 결론을 정당화하기 위한 논리적 논의를 개발할 수 있어야 한다.

(3) 6-8 단계

· 2·3차원 물체들에 정의된 성질을 이용하여, 그들의 형태 사이의 관계를 정확히 묘사하고, 분류하고, 이해할 수 있어야 한다.

· 닮은 물체의 각, 변의 길이, 둘레, 넓이, 부피 사이의 관계를 이해할 수 있어야 한다.

· 합동, 닮음, 파타고라스 관계와 같은 기하적 아이디어와 관계에 관련된 귀납적, 연역적 논의를 만들거나 비평할 수 있어야 한다.

위에 제시한 <목표 2>을 달성하기 위한, 학교수업에서의 학생들이 성취해야 할 단계별 목표는 다음과 같다.

(1) Pre-K-2 단계

· 공간에서의 상대적 위치를 묘사하고, 명명하고, 해석할 수 있어야 하며, 또한 상대적 위치에 관한 아이디어를 적용할 수 있어야 한다.

· 네비게이션(navigation) 공간에서 방향과 거리를 묘사하고, 명명하고, 해석할 수 있어야 하며, 또한 방향과 거리 관한 아이디어를 적용할 수 있어야 한다.

· “(…에)가까이”와 같은 단순한 관계로 또한 지도 같은 좌표계에 있어서 장소(위치)를 찾고 명명할 수 있어야 한다.

(2) 3-5 단계

· 일상적 언어와 기하적 용어를 이용하여 위치와 움직임 묘사할 수 있어야 한다.

· 위치를 지정하기 위해서, 경로를 묘사하기 위해서,

좌표계를 만들거나 이용할 수 있어야 한다.

- 좌표계의 수평·수직선에 있는 점들 사이의 거리를 구할 수 있어야 한다.

(3) 6-8 단계

- 기하적 모양의 성질을 표현하거나 조사하기 위하여 좌표기하를 이용할 수 있어야 한다.

- 정다각형, 평행한 쌍, 수직인 변과 같은 특수한 기하적 모양을 조사하기 위하여 좌표기하를 이용할 수 있어야 한다.

위에 제시한 <목표 3>을 달성하기 위한, 학교수업에서의 학생들이 성취해야 할 단계별 목표는 다음과 같다.

(1) Pre-K-2 단계

- 옮기기(slide), 뒤집기, 돌리기를 인식하고 적용할 수 있어야 한다.

- 대칭성을 가지는 모양을 인식하고 만들 수 있어야 한다.

(2) 3-5 단계

- 2차원 모양의 옮기기, 뒤집기, 돌리기의 결과를 예측하고 묘사할 수 있어야 한다.

- 두 모양이 합동임을 보여주기 위한 움직임 또는 일련의 움직임을 묘사할 수 있어야 한다.

- 2·3차원 모양과 디자인에 있어서 선대칭과 회전대칭을 식별하고 묘사할 수 있어야 한다.

(3) 6-8 단계

- 뒤집기, 돌리기, 옮기기, 스케일링(축소 또는 확대)과 같은 변칙의 변환 하에 모양의 크기, 위치, 방향을 묘사할 수 있어야 한다.

- 변환을 이용하여, 물체의 합동, 닮음, 선대칭 또는 회전대칭을 조사할 수 있어야 한다.

끝으로, 위에 제시한 <목표 4>을 달성하기 위한, 학교수업에서의 학생들이 성취해야 할 단계별 목표는 다음과 같다.

(1) Pre-K-2 단계

- 공간적 기억과 공간적 시각화를 이용하여 기하적 모양의 정신적 이미지를 만들 수 있어야 한다.

- 서로 다른 조망으로부터 모양을 인식하고 표현할 수 있어야 한다.

- 기하에서의 아이디어를 수 및 측정에서의 아이디어에 관련 지을 수 있어야 한다.

- 자연환경에 있어서 기하적 모양과 구조를 인식할 수 있어야 하며, 또한 그들 위치의 특징짓기를 할 수 있어야 한다.

(2) 3-5 단계

- 기하적 물체를 구성하거나 그릴 수 있어야 한다.

- 물체, 패턴, 경로의 정신적 이미지를 만들고 묘사할 수 있어야 한다.

- 3차원 물체의 2차원적 표현으로부터, 3차원 물체를 식별하고 구성할 수 있어야 한다.

- 3차원 물체의 2차원 표현을 식별하고 그릴 수 있어야 한다.

- 수와 측정과 같은 수학의 다른 영역에 있는 문제를 해결하기 위하여 기하적 모델을 사용할 수 있어야 한다.

- 기하적 아이디어와 관계를 인식하고, 그것들을 다른 분야와 교실이나 일상에서 일어나는 문제에 적용할 수 있어야 한다.

(3) 6-8 단계

- 변의 길이 또는 각도와 같은 특정한 성질로 기하적 물체를 그릴 수 있어야 한다.

- 3차원 물체에 수반된 표면적과 부피와 같은 문제를 시각화하고 풀기 위하여, 그 물체의 2차원 표현을 사용할 수 있어야 한다.

- 문제를 표현하고 해결하기 위해, 단말장치와 같은 시각적 도구를 사용할 수 있어야 한다.

- 수치적, 대수적 관계를 표현하거나 설명하기 위하여 기하적 모델을 사용할 수 있어야 한다.

- 예술, 과학, 일상과 같은 수학교실 외부의 영역에서 기하적 아이디어를 인식하고 적용할 수 있어야 한다.

<논의> 우리나라 제 7차 초등학교 수학과 교육과정 중에서 기하영역의 단계별 목표와 미국의 NCTM(2000)이 제시한 초등수학과 관련된 도형(기하)영역의 기준은 원론적인 측면에서 비슷하다. 도형을 묘사·기술하기(<목표 1>), 비교·분류하기(<목표 1>), 공간감각 기르기(<목표 2>, <목표 3>) 등의 내용으로 구성된 교과과정을 따르고 있다. 그러나 우리의 경우는 기하영역에서의 주제들이 단계별로 단절된 듯한 느낌이 든다. 반면,

미국의 경우는 각 주제들이 반복(상위 단계에서 심화)되고, 범주화 및 포괄적으로 다루고 있다. 또한, 주목할 점은 미국의 경우는 Pre-K-2 단계, 3-5 단계와 6-8 단계의 기준으로 구별하고 있다는 것이다. 이는 초등학교의 교과과정과 중학교의 교과과정의 연계를 중시하고 있다는 점을 시사하고 있다.

2. 각 단계별 지도내용의 체계 표와 수학적 용어의 비교

우리나라 제 7차 교육과정 초등수학 교과서와 미국 초등수학 교과서의 도형(기하)영역과 도형과 관련된 측정영역에서 도입하고 있는 전반적인 내용은 비슷하지만 세부적으로는 다루는 순서나 도입하는 방법에 있어서 약간의 다른 점이 있다. 미국 교과서는 교과내용을 반복하는 경향³⁾(<표 1> 참조)이 있고, 우리의 경우보다 수학적 용어를 보다 일찍 도입하고⁴⁾, 또한 우리의 제 7차 교육과정 초등수학 교과서에서 도입하고 있지 않은 용어도 많이 사용하고 있다 (<표 2> 참조)⁵⁾

<논의> 우리가 분석하고 있는 미국의 교과서의 각

3) 기본적인 관념을 처음은 동작에서 시각적 이미지로, 이어서 기호를 표현한다는 양식에 맞추어 반복게시해서 그 관념을 나의 것으로 할 수 있다는 브루너(Bruner)가 제시한 나선형 교육과정(Spiral Curriculum)하의 교과서 형태를 가지고 있다. 이를테면, 도형영역에서 기본개념인 점, 직선, 선분 등을 <3단계>에서 시각적으로 도입하고, <4단계>에서 읽고, 쓰는 방법(수학적 기호)을 도입한 후, 그 후의 단계에서 내용을 계속 반복하고 있다.

4) 미국의 경우에는 수학용어를 계속 중복적으로 도입하고 있으나, 학년별로 정의되는 수준에서는 다르게 제시되고 있다. 예를 들어, 선(line)이라는 용어의 설명을 단계별로 살펴보면 다음과 같다.

<3단계>: A line is straight. It continues in both directions. It does not end.

<4단계>: A line is a straight path of points that goes on and on in both directions. It has no endpoints.

<5단계>: A line is an endless straight path. It has no endpoints.

<6단계>: A line is a straight path that extends without end in opposite directions.

5) 초등 6단계의 교과내용은 NCTM의 6-8 단계의 기준에 따라 구성되었기 때문에 도입하고 있는 수학적 내용과 용어가 우리의 경우보다 많다 (<표 1>, <표 2> 참조). 이를테면, 좌표평면의 도입이나 피타고라스 정리의 도입 등.

단계별 지도내용의 체계와 수학적 용어의 반복 심화(상위 단계)하는 구성적 특징은 NCTM(2000)의 기준에 기인된 것이다 (앞에서 살펴본 기하영역에서 학생들이 성취해야할 NCTM(2000)의 4가지 목표와 이를 위한 단계별 세부목표 참조). 이러한 점이 우리교과서와 큰 차이점이다. 즉, 우리의 경우는 구체적인 수학적 주제를 중심으로 그 목표를 설정하고 있다.

3. 각 단계별 내용 비교분석

가. 초등수학 교과서의 내용 전반에 대한 비교분석

1) 두 교과서 모두 입체도형 영역에서 다루고 있는 기본적인 도형은 구, 직육면체(미국의 경우는 직사각기둥: rectangular prism), 정육면체(미국의 경우는 cube), 원기둥(미국의 경우는 cylinder), 각기둥, 각뿔, 원뿔 등이고, 평면도형 영역에서 다루고 있는 기본적인 도형들은 원, 삼각형, 사각형(미국의 경우는 사변형; quadrilateral), 직사각형, 정사각형, 평행사변형, 사다리꼴, 마름모, 다각형, 정다각형 등이다.

2) <1 단계>에서 입체도형 및 평면도형과 관련된 용어의 도입에 있어서, 우리 교과서에서는 수학적 개념에 친숙하도록 생활 주변의 사물로부터 공통적인 성질을 추상화하여 「~모양」이라는 일상적인 용어를 사용하고 있다(<그림 1> 참조).

<표 1> 우리나라 교과서와 미국 교과서의 도형영역과 그 측정 지도내용 체계표

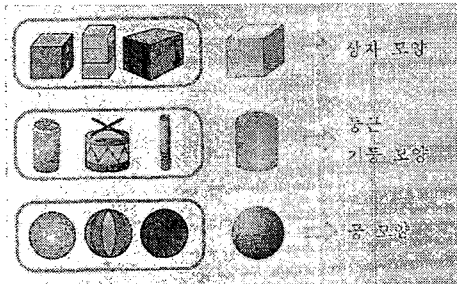
단계		지도 내용	
		우리나라	미국
1단계	가	· 여러 가지 입체모양	· 입체도형(solid figure)과 평면모양(plane shape) · 공간감각 (같은 크기 · 모양, 대칭 등) · 패턴
	나	· 여러 가지 평면모양 · 점판에서 공간감각 기르기	
2단계	가	· 기본적인 평면도형 · 구체물의 이동에서 공간감각 기르기	· 평면모양 · 입체도형
	나	· 입체도형의 구성(쌓기 나무)	
3단계	가	· 각과 평면도형 · 평면도형의 이동에서 공간감각 기르기	· 평면 · 입체도형 · 선분과 각, 직선 관계 · 원과 그 구성요소 · 다각형, 삼각형, 사변형 · 합동과 대칭 · 둘레, 넓이, 부피
	나	· 원과 그 구성요소 · 거울을 통한 공간감각 기르기	
4단계	가	· 각과 여러 가지 삼각형 · 삼 · 사각형의 내각의 크기	· 직선, 반직선, 각, 직선관계 · 합동인 도형과 대칭인 도형 · 각도 · 원과 그 구성요소, 원주 · 삼각형 분류, 사변형 분류 · 다각형의 둘레와 면적 · 입체도형의 전개도, 직사각기둥의 부피
	나	· 수직과 평행 · 여러 가지 사각형 · 다각형과 정다각형 · 여러 가지 모양 만들기	
5단계	가	· 직육면체와 정육면체의 성질 · 여러 가지 모양으로 주어진 도형 덮기 · 직 · 정사각형의 둘레와 넓이, 평행사변형의 넓이, 삼각형의 넓이	· 선과 각(도), 각과 다각형 · 원 · 합동 · 닮음인 도형, 대칭인 도형 · 삼각형 분류, 사변형 분류 · 변환(transformation) · 다면체와 피라미드 · 둘레(원, 다각형)와 면적(직 · 정사각형, 삼각형, 평행사변형, 부정형도형 등) · 전개도와 표면적, 직사각기둥의 부피
	나	· 합동과 대칭 · 사다리꼴의 넓이	
6단계	가	· 각기둥과 각뿔의 성질 · 쌓기 나무로 모양 만들기 · 직 · 정육면체의 겉넓이와 부피	· 점, 직선, 평면, 각과 각 관계, 직선들의 분류(평행, 수직 등) · 삼각형, 사변형, 2차원 도형 그리기, 원 · 입체도형의 형태, 입체도형 여러 각도에서 보기, 입체도형의 모델(전개도) · 작도하기(합동인 선분 · 각, 각 · 선분의 이동분선, 평행선), 닮음과 합동인 도형 · 비 · 비례와 닮은 도형 · 둘레 어렵하기와 찾기, 원주, 피타고라스 정리 · 넓이 추정하기와 구하기, 평행사변형과 사다리꼴 넓이, 원의 넓이, 기둥과 뿔의 표면적 · 부피 추정하기와 구하기, 피라미드 · 실린더의 부피 · 기하적 패턴 · 평면도형의 변환, 바닥갈기, 입체도형의 변환, 대칭
	나	· 원기둥, 원뿔, 회전체 · 원주와 원주율, 원의 넓이, 원기둥의 겉넓이, 원기둥의 부피	

<표 2> 우리나라 교과서와 미국 교과서의 도형 영역과 그 측정영역에서의 사용된 용어⁶⁾

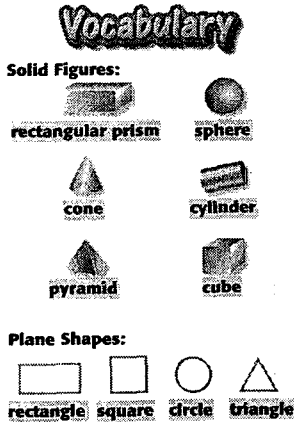
단계	용어		
	우리나라	미국	
1단계	가	· 상자 모양, 동근기둥 모양, 공 모양	· 직사각기둥, 구, 원뿔, 원기둥, 피라미드, 입방체(cube), 직사각형, 정사각형, 원, 삼각형, 쌓기, 굴리기, 옮기기, 표면(평면 한 면), 코너(corner), 변, 대칭선, 위, 아래, 왼쪽, 오른쪽, 패턴
	나	· 네모 모양, 세모 모양, 동그라미 모양	
2단계	가	· 선분, 직선, 사각형, 삼각형, 원	· 원, 정사각형, 삼각형, 직사각형, 타원(oval), 코너(corner), 변(side), 합동, 대칭, 대칭선, 돌리기, 뒤집기, 옮기기, 직사각기둥, 구, 원뿔, 원기둥, 피라미드, 입방체(cube), 면(face), 모서리(edge), 코너, 둘레
	나		
3단계	가	· 각, 각의 꼭지점· 변, 직각, 직각삼각형, 직사각형, 정사각형	· 면, 모서리, 꼭지점, 직선, 점(point), 선분, 반직선, 각, 직각, 교차선, 평행선, 원의 중심· 반지름· 지름, 다각형, 사변형, 오각형, 육각형, 팔각형, 등변삼각형, 이등변삼각형, 부등변삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형, 예각삼각형, 평행사변형, 마름모, 바닷갈기(tessellation), 합동, 대칭선, 옮기기, 뒤집기, 돌리기, 닮음, 둘레, 평방단위 (square unit), 넓이, 부피, 입방단위 (cubic unit)
	나	· 원의 중심, 원의 반지름, 원의 지름	
4단계	가	· 각도, 이등변삼각형, 정삼각형, 예각, 둔각, 예각삼각형, 둔각삼각형	· 점(point), 직선, 선분, 반직선, 평면, 각, 각의 꼭지점, 직각, 예각, 둔각, 교차선, 평행선, 수직선, 합동, 옮기기, 돌리기, 뒤집기, 변환, 닮음, 회전대칭, 선대칭, 각도, 원, 원의 중심· 반지름· 지름· 현, 원주, 등변삼각형, 이등변삼각형, 부등변삼각형, 평행사변형, 마름모, 사다리꼴, 다각형, 삼각형, 사변형, 오각형, 육각형, 팔각형, 정다각형, 둘레, 넓이, 2·3차원 도형, 전개도, 부피, 입방단위(cubic unit)
	나	· 수직, 수선, 평행, 평행선, 평행선 사이의 거리, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 다각형, 삼각형, 사각형, 오각형, 육각형, 정삼각형, 정사각형, 정오각형, 정육각형, 대각선	
5단계	가	· 직육면체, 면, 모서리, 꼭지점, 정육면체, 평행한 면, 밀면, 수직인 면, 옆면, 겨냥도, 전개도, 둘레, 단위넓이, 넓이, 밀면, 높이	· 점, 직선, 반직선, 선분, 평면, 각, 평행선, 교차선, 수직선, 각도, 다각형, 정다각형, 원, 현, 지름, 반지름, 중심각, 합동, 닮음, 선대칭, 회전대칭, 등변삼각형, 이등변삼각형, 부등변삼각형, 빗변, 레그, 삼각수, 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 변환, 평행이동, 반사, 회전, 다면체, 기둥, 피라미드, 밀면, 둘레, 원주, 넓이, 밀면, 높이, 전개도, 표면적, 부피
	나	· 합동, 대응점, 대응변, 대응각, 선대칭도형, 대칭축, 선대칭 위치에 있는 도형, 점대칭도형, 점대칭 위치에 있는 도형, 대칭의 중심	
6단계	가	· 입체도형, 각기둥, 각기둥의 밀면· 옆면· 모서리· 꼭지점· 높이, 삼각기둥, 사각기둥, 오각기둥, 각뿔, 각뿔의 밀면· 옆면· 모서리· 꼭지점· 높이, 삼각뿔, 사각뿔, 오각뿔, 각기둥· 각뿔의 전개도, 직육면체의 겹넓이, 부피, 부피단위, 들어	· 선분, 반직선, 각의 꼭지점, 맞꼭지각, 인접각, 보각, 여각, 평행선, 수직선, 예각· 둔각· 직각삼각형, 정다면체, 반지름, 지름, 현, 호, 부채꼴(sector), 다면체, 옆면(lateral face), 밀면, 꼭지점, 전개도, 합동, 이등분, 중점, 닮은 도형, 대응변, 대응각, 원주, 파이(pi), 빗변, 레그, 피타고라스 정리, 넓이, 표면적(겹넓이), 부피, 프랙탈, 변환, 평행이동, 회전, 반사, 바닷갈기, 선대칭, 대칭선, 회전대칭, 회전의 중심점
	나	· 원기둥, 원기둥의 밀면· 옆면· 높이, 원기둥의 전개도, 원뿔의 밀면· 옆면· 모선· 꼭지점· 높이, 회전체, 회전축, 구, 구의 중심· 반지름, 단면, 원주율	

6) 우리나라의 경우는 '약속하기'를 중심으로, 미국의 경우에는 각 단원초기에 도입되는 '수학용어(math vocabulary)'를 중심으로 하였다.

미국의 교과서에서는 입체도형의 경우는 구체적인 수학적 모형으로부터 수학적 용어(구, 원뿔(cone), 입방체(cube), 실린더, 직사각기둥, 피라미드)를 도입하고 있다 (<그림 2> 참조). 평면도형인 경우에는 입체도형의 표면의 모양으로부터 원, 정사각형, 삼각형, 직사각형과 같은 수학적 용어를 도입하고 있다.



<그림 1> <1-나> 입체모양



<그림 2> <1 단계> 입체도형과 평면모양

<논의> 미국의 도입방법보다 우리의 방법이 좀더 수학적 체계 (여러 가지의 개별적 사실로부터 공통점을 추상화)를 강조하는 것으로 생각된다(<그림 1>, <그림 2> 참조). 그러나 도형의 도입⁷⁾ 시기에 있어, 미국의

경우는 우리보다 다루는 도형의 수 (이에 따른 용어)가 많지만 (<그림 2> 참조), 대신에 쉽게 접할 수 있는 구체적인 수학적 모형물을 이용하며, 도형의 인식 및 식별에 관한 수학적 논의(<그림 3>, <그림 4> 참조)를 일찍 도입하고 있다.

미국의 경우는 초등학교 교과서에 도입되는 기본도형을 범주화해서 다룰 수 있다는 장점 있고, 도형의 다양한 분류기준을 접할 수 있다는 유리한 점이 있다.

3) 우리 교과서에서 도입해서 다루고 있는 면의 개수에 의한 입체도형의 용어는 직육면체와 정육면체뿐이다. 미국의 경우는 이 용어를 두 입체도형의 밑면(base)의 형태를 강조하는 용어인 직사각기둥과 정사각기둥(입방체; cube)이라는 용어를 일반적으로 사용하고 있다.

<논의> 초등에서 다루는 다면체의 종류가 적고, 모두 기둥의 용어로 통일이 가능하다. 따라서 도형에 대한 개념이미지 형성의 관점에서 기둥의 용어가 더 유리하다고 생각된다. 즉, 용어자체(‘밑면의 형태’ 기둥; ‘직사각’ 기둥)에서 도형의 이미지를 쉽게 만들 수 있다.

4) 미국 교과서의 경우는 도형의 구성성분에 의한 분류 및 식별 문제를 우리보다 많이 강조하고 있다. 이를테면, 평면도형과 입체도형을 변, 모서리, 면의 개수에 의한 분류문제를 <1단계>에서부터 도입(<그림 3>, <그림 4> 참조)하고 또한 매 단계마다 이러한 분류문제를 다루고 있다.

<논의> 여러 가지 관점에서 주어진 도형들을 분류 및 식별하는 문제는 도형(기하) 교육의 근본이고 또한 핵심적인 것이다. 이러한 점에서, 우리 교과서도 도형을 다양한 관점에서 분류하는 문제를 보다 일찍 도입해서 매 단계마다 다루 것이 좋을 듯 하다. 차후 우리의 초등 수학 교과서 개정에서 이러한 점을 좀더 중시하여야 할 것이다.

7) 입체인 경우의 용어는 <1단계>에서부터 ‘입체도형(solid figure)’으로 사용하고 있지만, 평면인 경우에는 그 용어를 <2단계>까지는 ‘평면모양(plane shape)’으로 도입하고 <3단

계>부터 ‘평면도형(plane figure)’으로 사용하고 있다. 이는 우리가 살고 있는 현실 세계와 관련된 듯하다. 즉, 입체인 경우는 눈으로 볼 수 있지만, 평면인 경우는 볼 수 없기 때문이라고 생각된다.

Use solids. Sort them by the number of flat surfaces.
Color the pictures to match the sentence.

<p>1 I have 1 flat surface.</p>	<p>2 I have 2 flat surfaces.</p>
<p>3 I have 6 flat surfaces.</p>	<p>4 I have 5 flat surfaces.</p>

<그림 3> <1단계> 입체도형의 분류

Use shapes. Sort by the number of sides and corners.
Draw the shapes. Write the names.

<p>1 Find a shape with 4 sides and 4 corners.</p>	<p>2 Find a different shape with 4 sides and 4 corners.</p> <hr/> <hr/>
<p>3 Find a shape with 0 sides and 0 corners.</p> <hr/> <hr/>	<p>4 Find a shape with 3 sides and 3 corners.</p> <hr/> <hr/>

<그림 4> <1단계> 평면모양의 분류

5) 미국 교과서의 경우는 공간감각 기르기 활동을 모든 단계에 걸쳐 도입하고, 그 내용 또한 우리의 경우보다 폭넓고 다양하다. 이를테면, 바닥깔기(tessellation)⁸⁾, 프랙탈(fractal), 회전대칭(rotational symmetry) 등.

미국 교과서에서는 회전대칭인 도형(<그림 5> 참조)과 관련된 내용을 많이 다루고 있지만, 우리의 경우에는 회전대칭의 특수한 경우인 점대칭인 도형만을 다루고 있다.

8) 우리 교과서의 경우는 <5-가>의 무늬 만들기에서 패턴블럭을 사용하여 바닥깔기 개념을 약간 도입하고 있다.



Activity

MATERIALS: paper, straightedge, scissors

<p>STEP 1</p> <p>On a sheet of paper, draw an equilateral triangle. Label the center point. Cut it out.</p>	<p>STEP 2</p> <p>Label the corners of the triangle 1, 2, and 3.</p>	<p>STEP 3</p> <p>Turn the triangle about its central point. How does the triangle fit back into the space?</p>
--	--	---

<그림 5> <4단계> 회전대칭인 도형과 관련된 활동

<논의> 대칭성은 도형을 구별하는 문제에 유용한 도구로 사용된다. 크게 보면, 대칭성은 자연에 존재하는 물리적 현상을 설명하는 데 많은 역할을 한다. 이러한 점에서, 우리 교과서의 회전대칭을 단지 점대칭(회전대칭의 특수한 경우: 180도 회전) 문제만 다루고 있다는 점이 아쉽다.

6) 미국 교과서에서만 다루고 있는 내용은 도형의 닮음, 피타고라스 정리 등이 있고, 우리 교과서에서만 다루고 있는 것은 회전체와 관련된 내용이다.

7) 기본도형

가) 점(point), 직선, 평면, 선분, 반직선: 우리 교과서 <2-가>에서는 곧은 선과 굽은 선을 분류하고, 점에 대한 설명 없이 「두 점을 끝까지 이은 선」으로 「선분」을 약속하고, 그 후에 「선분을 양쪽으로 끝없이 늘린 곧은 선」으로 「직선」을 도입하고 있는 반면, 미국 교과서에서는 <3단계>에서 이러한 개념을 도입하고 있는 데, 먼저 「직선」의 용어를 「곧고, 양쪽 방향으로 연장되고, 끝없는 것」으로 도입하고, 「정확한 위치(position) 또는 장소(location)로 「점(point)」를 설명한 후에 「선분」을 「끝점이라고 부르는 두 점 사이의 직선의 부분」으로 도입하고 있다. 미국의 경우는 우리와는 달리 「반직선(ray)」의 용어와 평면(plane)에 대한 용어도 <4단계>에서 도입하고 있다.

직선의 표현에 있어서도 미국 교과서는 우리 교과서와는 달리 끝없이 연장된다는 관점에서 양방향의 화살표를 사용하여 표현하고 있다.

우리 교과서에서는 직선이나 선분을 읽거나 쓰는 방

법을 약속하기와 함께 도입하고 있는 반면, 미국의 경우에는 <3단계>에서 직선과 선분의 용어를 도입하고, <4단계>에서 직선과 선분을 읽고, 쓰는 방법(수학적 기호 포함)을 도입하고 있다.

<논의> 점(point), 직선, 평면의 용어는 모든 기하적 정의의 근거가 되고, 무정의 용어로 받아들이고 있다. 미국의 초등교과서의 경우는 이러한 기본적인 용어를 설명의 방식으로 그 의미를 전달하고, 시각적 표현(점(point)은 점(dot)⁹⁾ 등)을 도입하고 있다. 그러나 이러한 수학적 개념의 인식이 초등에서는 쉬운 문제가 아니고, 아마도 이러한 문제가 우리의 초등학교 수학교과서의 내용전개 및 표현 방식에 영향을 준 듯하다. 우리의 경우, 기하적 무정의 용어인 점, 직선, 평면의 도입에 관해서는 상당한 논의가 필요하다고 생각된다.

나) 사각형: 우리 교과서에서는 「4개의 선분으로 둘러싸인 도형」으로 정의하고 있다. 주목할 점은 우리와는 달리 미국의 경우에는 변의 개수를 중시하는 용어인 사변형(quadrilateral)이란 용어를 사용하고, 또한 기본도형의 용어를 약속하기(정의) 형태로 도입하고 있지 않다는 것이다.

<논의> 우리 교과서의 사각형 약속하기를 신중하게 살펴보면, 오히려 미국의 경우처럼 사변형의 용어가 좀더 잘 어울릴 것 같다. 그리고 기본도형을 약속하기로 도입(우리의 경우)하려면 오개념을 줄이기 위하여, 좀더 구체성이 있게 도입하는 것이 좋을 듯하다. 이를테면, 4개의 선분으로 둘러싸인 도형은 3차원공간상에서도 나타날 수도 있고(한 평면에 놓여 있지 않게), 따라서 사각형의 경우 「4개의 선분으로 둘러싸인 평면도형」으로 구체화하는 것이 바람직하다고 생각된다.¹⁰⁾

다) 각: 우리나라 교과서에서의 「각」의 약속하기는 「한 점에서 그은 두 직선으로 이루어진 도형」으로 다루고 있는 반면, 미국 교과서에서는 먼저 반직선(ray)의

용어를 도입하고, 「같은 끝점을 갖는 두 반직선에 의하여 형성된 것」으로 그 용어를 도입하고 있다.

우리 교과서에서는 「직각」을 삼각자를 이용하여 정의하고 있는 반면, 미국 교과서에서는 「정사각형 코너를 형성하는 각」으로 정의하고 있다.

우리 교과서에서는 각의 구성성분(꼭지점, 변)과 각을 읽거나 표현하는 방법을 각의 약속하기를 도입하는 시점에서 다루고 있는 반면, 미국의 경우에는 <3단계>에서 각의 정의를 다루고 <4단계>에서 각의 구성성분을 통하여 각을 그리고, 읽고, 쓰는 방법을 도입하고 있다. 특히, 쓰는 방법에 있어서 우리와는 달리 각의 수학적 기호 「∠」도 사용하고 있다.

<논의> 직각을 표시하는 수학적 기호(□)의 측면에서 보면, 미국 교과서에서 도입하고 있는 방식이 우리의 방식 보다 일관성이 있고, 또한 학생들에게 좀더 친숙할 것이라고 예상된다. 수학적 기호의 사용에 특히 초등학교의 경우에는 항상 신중해야 하겠지만 각의 기호 「∠」는 학생들에게 각에 대한 개념이미지를 형성하는 데 도움을 줄 수 있다고 생각되며, 우리의 경우도 이 기호의 도입에 대한 연구에 좀더 관심을 가져야 한다고 생각된다.

라) 삼각형: 미국의 경우에는 등변삼각형(equilateral triangle), 이등변삼각형(isosceles triangle), 부등변삼각형(scalene triangle)과 같은 용어도 사용하고 있다. 즉, 같은 길이를 갖는 변의 개수에 의한 삼각형의 분류 문제를 다루고 있다. 그러나 우리의 경우는 각의 종류에 따른 삼각형의 분류(예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형)만 다루고 있다. 물론, 같은 길이를 갖는 변의 개수에 의한 용어인 이등변삼각형이란 용어를 사용하고는 있지만 분류의 문제와는 다르다. 또한 미국의 경우는 직각삼각형에서 우리와는 달리 「빗변(hypotenuse)」과 「레그(leg)」라는 변의 특성과 관련된 구체적인 용어도 도입하고 있다.

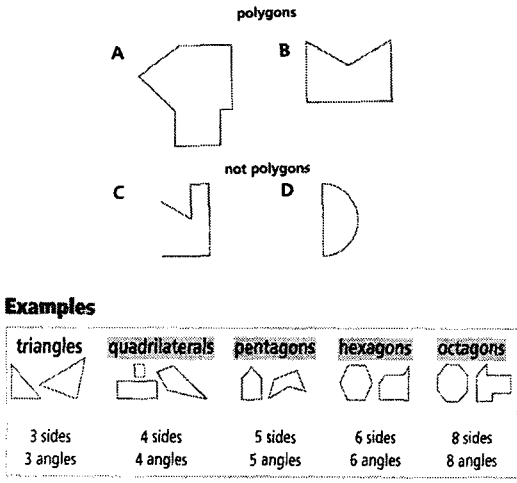
<논의> 도형영역은 분류의 문제가 주 관심사이다. 즉, 다양한 관점에서 도형을 바라보는 훈련이 필요하다. 이러한 점에서 우리 교과서도 변에 의한 삼각형의 분류 문제도 도입하는 것을 고려해야 한다고 생각된다.

마) 다각형: 미국 교과서에서는 「닫힌 도형」과 「열린 도형」이라는 용어를 먼저 도입한 후, 「끝은 변을 가지는 닫힌 평면도형」으로 「다각형」의 용어를 도입하고

9) 우리의 경우에는 정확한 위치나 장소를 의미하는 'point'나 이것의 시각적 표현인 'dot' 모두를 점으로 부르고 있다. 여기서, 명심해야 할 점은 「dot」은 'point'를 표현한 것이지, 'point'인 것은 아니다. 라는 사실이다.

10) 참고로, 미국의 책에서 사용하는 「다각형」의 용어를 소개한다(Barnett Rich and Philip A. Schmidt, 2000): 「A polygon is a closed plane figure bounded by straight line segments as sides」

있다(<각주 10> 참조). 또한 다각형인 경우와 아닌 경우의 예를 도입하고, 볼록이 아닌 다각형의 경우도 다루고 있다.¹¹⁾ (<그림 6> 참조)



<그림 6> <3단계> 다각형

우리 교과서의 경우에는 삼각형과 사각형을 다루고 난 후, <4-나>에서 「선분으로만 둘러싸인 도형」으로 ‘다각형’을 정의하고 있고, 다각형이 되지 않는 예를 도입하고 있지 않다. 또한 우리의 경우에는 주로 볼록 다각형만 취급하고 있다.

<논의> 학생들의 수학적 개념형성의 효율성을 위하여 정의에 부합하는 또는 부합하지 않는 다양한 예를 도입해서 다루어야 한다고 생각된다. 또한 이러한 점은 학교현장에서 학생을 가르치는 교사의 역할에도 상당히 중요한 요인이 된다.

바) 원: 미국의 경우에는 지름의 특징을 설명하기 위한 수단으로 ‘현(chord)’을 도입하고 있다. 또한 <4단계>에서 원주와 지름과의 관계의 활동을 통해서 원주는 지름의 길이의 약 3배 정도로 인식시킨다. 그리고 <5단계>에서 원주율의 기호 π 와 그 값을 대략적인 값 3.14

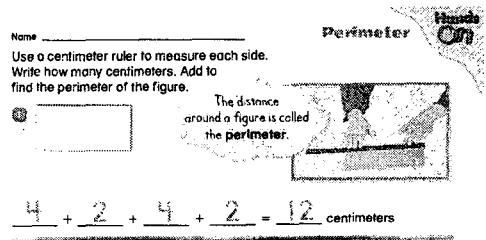
11) 어떠한 것을 정의한다는 것은 그 정의에 부합하지 않은 예가 있다는 사실을 반증하고 있다. 주어진 정의에 부합하지 않는 예가 많이 다름으로써, 원래 알고자하는 개념에 좀 더 충실할 수 있다(브루너(Bruner)). 이러한 관점에서 수학적 개념형성에 있어 교사의 역할이 중요하다.

로 사용한다. 우리의 경우에는 <6-나>에서 원주와 원주율을 다루고 있는데 원주율을 나타내는 수학적 기호인 π 를 도입하고 있지 않다.

<논의> 우리의 경우도 원과 관련된 내용을 단계에 걸쳐 도입하는 경우라면 원주율을 나타내는 기호인 π 를 사용함이 바람직하다고 생각된다. 왜냐하면, 3.14로 사용하는 경우에는 학생들로 하여금 기하적인 개념 형성의 문제가 단순한 수치적 계산의 문제로만 간주될 수 있기 때문이다.

8) 도형의 측정

가) 우리의 경우는 도형의 측정을 <5-가>, <6-가>와 <6-나>에서 도입하고 있는 반면, 미국의 경우는 <2단계>에서 둘레의 길이 개념 (<그림 7> 참조)을 도입하면서부터 매 단계마다 다루고 있다.

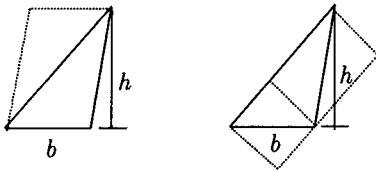


<그림 7> <2단계> 도형의 둘레

<논의> 수 영역을 배우는 동기부여와 수를 통한 도형들의 비교의 관점에서, 일찍 도입하는 것(난이도와 일관성 고려)이 필요하다.

나) 우리 교과서에서는 직사각형의 넓이 공식을 이용한 평행사변형의 넓이를 구하는 공식을 유도하고, 이를 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 공식을 유도하고 있다. 한편, 미국의 교과서에서는 직사각형의 넓이 공식을 이용하여 삼각형과 평행사변형의 넓이를 구하는 공식을 유도하고 있다.

<논의> 밑변의 길이 b 와 높이 h 를 알고 있는 등각 삼각형의 경우에는 우리의 접근 방식이 좀더 유리하다 (<그림 8> 참조). 좌에 있는 방식은 우리의 방식이고, 우에 있는 방식은 우리가 분석하고 있는 미국 교과서의 방식이다. 미국의 경우는 평행선을 이용한 예각 삼각형으로의 등적변형을 해야 한다.



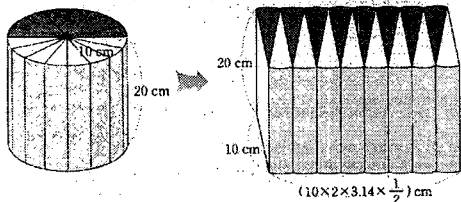
<그림 8> 삼각형의 넓이

다) 우리 교과서에서는 마름모의 넓이를 구하는 공식을 유도할 때, 직사각형을 이용한 넓이공식과 마름모의 두 대각선을 이용한 넓이공식을 도입하고 있는 반면, 미국의 교과서는 마름모는 평행사변형의 일종이므로 직사각형을 이용한 공식만 취급하고 있다.

<논의> 수학교육이 관계적 이해를 추구한다는 점과 많은 공식(도구적 이해)은 학생들로 하여금 수학학습을 기피하게 한다는 점에서, 계산 공식은 가능하면 적을수록 좋다고 생각한다.

라) 미국 교과서에서는 각기둥과 각뿔의 겹넓이는 도입하고 있지만 원기둥의 겹넓이는 도입하고 있지 않다. 참고로, 미국의 경우에는 원기둥의 전개도를 도입하고 있지 않다. 실제로, 우리가 도입하고 있는 원기둥의 전개도는 주어진 원기둥으로부터 만들기 활동이 학생들에게 쉽지는 않다. 이유는, 원과 직사각형의 한 변이 접하기 때문이다.

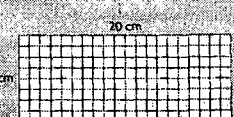
마) 우리 교과서에서는 원기둥의 부피를 구하는 공식을 유도하기 위한 활동으로 원기둥 조각내기 활동 (<그림 9> 참조)을 하는 반면, 미국의 경우에는 「얼마나 많은 개수의 단위입방체가 실린더에 포함되는가?」의 활동 (<그림 10> 참조)을 한다. 미국의 경우가 부피의 개념을 형성하는데 좀 더 충실하다.



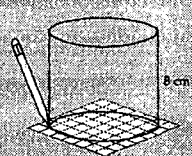
<그림 9> <6-나> 원기둥의 부피

Activity

- Use one piece of graph paper to cut out a rectangle 20 cm long and 8 cm wide. Without overlapping, roll the rectangle (the short way) and tape it to form a cylinder.



- Stand the cylinder on the second piece of graph paper. Trace around the base of the cylinder. Count the whole centimeter squares and the parts of centimeter squares inside the tracing.



Think and Discuss

- About how many cubes would fit on the bottom layer of the cylinder?
- About how many layers of cubes can fit inside the cylinder?
- What is the approximate volume of the cylinder?

<그림 10> <6 단계> 원기둥의 부피

나. 각 단계별 세부적인 분석

1) 1단계

우리나라 교과서와 미국 교과서 모두 먼저 생활 주변에서 자주 접할 수 있는 입체모양을 다루고, 나중에 평면모양을 도입하고 있다. 이 단계의 주된 목표는 이들 입체·평면모양을 여러 가지 방법으로 식별 또는 분류하는 문제가 중심이 되고 있다

가) 우리나라 교과서: <1-가>에서는 입체적인 모양으로 상자 모양, 동근기둥 모양, 공 모양을 도입하고, 도형의 규칙(패턴) 찾기, 굴리기를 통한 모양의 분류문제 등을 다루고 있으며, <1-나>에서는 평면모양으로 네모, 세모, 동그라미 모양을 다루고, 점판을 이용하여 같은 모양 그리기, 규칙(패턴) 찾기 활동 등으로 구성되어 있다.

나) 미국 교과서: 입체도형(solid figure)과 평면모양(plane shape), 공간감각, 패턴 등으로 구성되어 있다.

(1) 입체도형과 관련된 세부내용

(가) 직사각기둥(rectangular prism), 구(sphere), 원뿔(cone), 실린더(cylinder), 피라미드(pyramid), 입방체(cube)와 같은 구체적인 수학적 기본입체도형(<그림 2> 참조)과 그 용어를 숙지시킨 후에 생활주변에서 자주 접할 수 있는 입체적인 모양과 관계를 짓는 활동을 하고 있다.

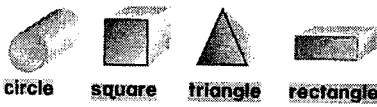
(나) 쌓기(stacking), 옮기기(sliding), 굴리기(rolling)와 같은 성질을 이용하여 입체도형을 구별하거나 분류하기

(다) 평평한 표면(flat surface)의 개수에 의하여 입체도형을 구별하거나 분류하기¹²⁾(<그림 3> 참조)

(2) 평면모양과 관련된 세부내용

(가) 입체도형의 평평한 표면(flat surface)으로써 평면모양을 식별하고, 원(circle), 정사각형(square), 삼각형(triangle), 직사각형(rectangle)과 같은 구체적인 수학적 용어를 사용하고 있다. 입체도형과 마찬가지로 우리 교과서의 용어(네모모양, 세모모양, 동그라미 모양) 보다 일찍 수학적 용어를 도입하고 있다(<그림 11> 참조).

(나) 변(side)과 코너(corner)와 같은 용어를 도입하고, 그들의 개수를 이용하여 평면모양을 구별하거나 분류하기¹³⁾(<그림 4> 참조)



<그림 11> <1단계> 평면모양

(3) 공간감각 익히기와 관련된 세부내용

(가) 일치하는 모양(같은 크기와 같은 모양) 만들기 및 식별하기: 점판 사용

(나) 평면모양의 대칭선 그리기, 식별하기와 대칭인 모양 만들기¹⁴⁾(<그림 12> 참조)

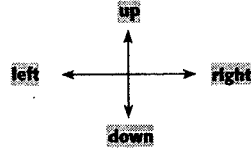
(다) 물체의 놓인 위치 등을 다루고 위치와 방향(위, 아래, 왼쪽, 오른쪽 등)과 관련된 문제 해결하기¹⁵⁾(<그림 12> 참조)

Vocabulary

This shape has a **line of symmetry**. It can be folded to make both parts match.



These words tell about direction and location.



<그림 12> <1단계> 공간감각

(4) 패턴을 식별, 묘사, 확장하는 내용을 도입하고 있다.

2) 2단계

(가) 우리나라 교과서¹⁶⁾: <2-가>에서는 선분과 직선, 사각형, 삼각형¹⁷⁾, 원¹⁸⁾과 관련된 약속하기가 도입되고, 공간감각 익히기를 위한 모양 옮기기, 모양 뒤집기, 모양 돌리기, 규칙 찾기 등을 다루고 있다. <2-나>에서는 정육면체를 이용한 쌓기 놀이를 통하여 여러 가지의 입체모양을 만들어 보는 활동과 이렇게 만들어진 입체모양을 위, 앞, 옆에 본 모양새를 그려보는 문제를 다루고 있다.

(나) 미국 교과서: 평면모양과 입체도형을 다루고 있다.

(1) 평면모양과 관련된 세부내용

(가) 평면에 그려진 모양으로부터 원, 정사각형, 삼각형, 직사각형, 타원(oval)¹⁹⁾ 식별하기

(나) 평면모양에서 변(side)과 코너(corner) 식별하기

(다) 평면모양을 두 개의 합동(congruent)²⁰⁾인 모양으

12) 우리 교과서에서는 <5-가>에서 직육면체의 성질을 조사할 때에 도입된다.

13) 이와 같은 방식으로 평면도형을 분류하는 문제는 우리의 경우에는 다루고 있지 않다.

14) 대칭선(line of symmetry)이란 용어는 종이접기 활동을 통하여 도입하고 있다. 우리 교과서에서는 <5-나>의 도형의 대칭 영역에서 다루고 있다.

15) 우리 교과서에서는 도입하고 있지 않다.

16) <1단계>에서의 「~모양」의 용어가 <2단계>에서 「(도)형」이라는 구체적인 수학적 용어로 바뀐다.

17) 「3개의 선분으로 둘러싸인 도형」으로 도입되지만, 「3개의 선분으로 둘러싸인 평면 도형」으로 좀더 구체화함이 바람직하다 (<각주 10> 참조).

18) 「물체(동근 깡통, 컵, 동전)의 본을 떠 그린 동그란 모양의 도형」으로 약속함. 본 뜬 모양을 이용하지 않고 원 그리기와 그 원의 구성요소(중심, 반지름, 지름)와 관련된 내용은 우리 교과서 <3-나>와 미국교과서 <3단계>에서 도입된다.

19) 우리의 경우에는 이 용어를 사용하지 않음.

20) 우리의 경우 <5-나> 도형의 합동영역에서 용어를 도입하고 있다.

로 나누기 위한 대칭선 그리는 문제: 점판 사용

(라) 문제해결(모형 만들기): 평면모양을 만들기 위하여 평면모양을 분리 또는 합치기





(마) 평면모양 움직이기: 뒤집기(flip), 돌리기(turn), 옮기기(slide)

(2) 입체도형과 관련된 세부내용

(가) 입체도형 구별하기: 주어진 입체도형의 모양에 가까운 물건 찾기

(나) 입체도형의 면(face)²¹으로부터 평면모양 만들기 이름 쓰기

(다) 면(face), 모서리(edge)와 코너(corner)²²의 개수에 의한 입체도형 분류하기²³(<그림 13> 참조)

Solid figure	Number of faces	Number of edges	Number of corners
 cube	6 faces	_____ edges	_____ corners
 sphere	_____ faces	_____ edges	_____ corners
 pyramid	_____ faces	_____ edges	_____ corners
 rectangular prism	_____ faces	_____ edges	_____ corners

<그림 13> <2단계> 입체도형 분류

(라) 문제 해결(모형 만들기): 여러 개의 정육면체를 이용하여 만든 입체도형에 사용된 정육면체의 개수를 추측하고 실제로 그 입체도형 만들어서 검증하기

21) 미국 교과서에서 입체도형의 면(face)은 평면 모양이고, 입체도형상의 평평한 표면(flat surface)으로 정의하고 있다.

22) 입체도형에서 두 개의 면이 만나는 곳을 모서리(edge), 모서리들이 만나는 곳을 코너(corner)로 정의하고 있다. <3단계>에서 코너가 꼭지점(vertex)이라는 용어로 사용된다. 우리 교과서에서는 이러한 용어들이 <6-가>에서 처음으로 나타난다.

23) 우리의 경우에는 <5-나>에서 직육면체의 특징을 살펴볼 때 도입된다. 미국의 경우에는 다양한 입체도형을 이러한 관점에서 분류하는 활동을 도입하고 있다. 도형의 분류 및 인식의 관점에서 우리도 이러한 문제를 보다 빠른 단계에서 도입함이 요구된다.

3) 3단계

가) 우리나라 교과서: <3-가>에서는 각, 직각, 직각삼각형²⁴, 직사각형²⁵, 정사각형²⁶의 약속하기와 도형 옮기기, 도형 뒤집기, 도형 돌리기와 같은 공간 감각 기르기의 내용으로 구성되어 있다. <3-나>에서는 원과 구성요소(중심, 지름, 반지름)와 관련된 약속하기와 그 내용을 중심으로 다루고, 공간감각을 익히기 위한 물체의 거울상 알아보기, 규칙에 따라 무늬 꾸미기 등으로 구성되어 있다.

나) 미국 교과서: 입체도형과 평면도형²⁷, 다각형, 합동과 대칭, 측정영역인 둘레, 면적, 부피와 관련된 내용으로 구성되어 있다.

(1) 입체도형과 평면도형을 다루는 세부내용

(가) 생활 주변의 사물을 묘사하기 위하여 입체도형의 이름 사용하기, 입체도형을 구성하는 면(face), 모서리(edge), 꼭지점(vertex)의 개수 헤아리기

(나) 두 개 또는 그 이상의 입체도형으로 만들어진 모형에서, 사용된 입체도형 식별하기

(다) 직선(line), 선분(line segment), 반직선(ray), 각, 직각(right angle)을 식별하고, 직각보다 작거나 큰 각으로 각 구별하기²⁸, 주어진 도형을 각 및 직각의 개수와 선분의 개수로 비교하기

(라) 두 직선 사이의 관계 묘사하기: 평행선(parallel lines)²⁹, 교차선(intersecting lines)³⁰

24) 미국 교과서에서는 <3단계>의 다각형 영역에서 삼각형들의 각에 의한 분류를 할 때 직각삼각형의 용어를 도입하고 있다.

25) 우리 교과서에서는 「네 각이 모두 직각인 사각형」을 직사각형으로 정의하고 있다. 미국 교과서에서는 <1단계>에서부터 직사각형(rectangle)을 기본도형으로 취급하여, 그 용어 정의를 하고 있고, 그 특징으로서 <3단계>의 선분과 각 영역, 사변형 영역에서 「네 각이 직각이다」라는 사실을 설명하고 있다.

26) 우리 교과서에서는 「네 각이 모두 직각이고, 네 변의 길이가 모두 같은 사각형」으로 정의하고 있는 반면 미국교과서에서는 직사각형과 같은 방법으로 다루고 있다.

27) 미국 교과서에서는 이 단계부터 용어가 「평면모양(plane shape)」에서 「평면도형(plane figure)」로 구체화된다.

28) 각의 척도를 도입하지 않고 가위나 책 등의 벌어진 정도로 알아본다.

29) 우리의 경우 <4-나>에서 도입하고 있다.

30) 우리의 경우에는 이 용어를 도입하고 있지 않다.

(마) 원 그리기와 원의 구성요소(중심, 지름, 반지름) 식별하기

(바) 문제해결 전략(좀더 단순화하여 문제 풀기): 소 마큐브의 정사각형의 모든 개수 찾기 등

(2) 다각형과 관련된 세부내용

(가) 다각형을 식별, 묘사, 구별하기: 변 또는 각의 개수에 의한 분류와 구별

(나) 삼각형을 식별, 묘사, 구별하기³¹⁾

- 같은 길이를 갖는 변의 개수에 의한 삼각형 이름: 등변삼각형³²⁾, 이등변삼각형, 부등변삼각형³³⁾

- 각에 의한 삼각형 이름: 직각삼각형, 둔각삼각형, 예각삼각형

(다) 사변형(quadrilateral)을 식별, 묘사, 구별하기³⁴⁾: 변(평행인 변의 쌍의 개수 등)과 각(직각 등)을 조사하여 사변형 이름과 분류하기(평행사변형, 마름모, 직사각형, 정사각형)

(라) 패턴을 만들기 위한 평면도형 결합하기: 바닥 깔기(tessellation), 바닥깔기 가능한 도형(tessellate) 찾기

(마) 문제해결 전략: 패턴 찾기

(3) 합동 및 대칭과 관련된 세부내용

(가) 합동인 도형의 묘사와 식별하기

(나) 평면도형에서 대칭선 그리기와 식별하기

(다) 닮음도형³⁵⁾ 그리기와 식별하기

(라) 옮기기(slide), 뒤집기(flip), 돌리기(turn)

(바) 문제해결 전략(계층에 따른 일람표(list) 만들기): 여러 개의 직육면체로 구성된 두 입체도형이 합동인가?

(4) 둘레³⁶⁾, 면적, 부피와 관련된 세부내용

(가) 평면도형이나 물체의 둘레의 길이 추정과 구하기

(나) 평면도형의 면적 구하기: 평방단위(square unit) 사용하기

(다) 문제해결 기술: 일반화 만들기

(라) 부피 추정과 구하기: 입방단위(cubic unit) 사용하기

4) 4단계

가) 우리나라 교과서: <4-가>에서는 각도, 삼각형과 사각형의 내각의 크기의 합³⁷⁾, 삼각형을 구성하고 있는 변을 길이와 각의 크기에 따른 분류(이등변삼각형, 정삼각형³⁸⁾, 예각삼각형, 둔각삼각형)를 도입하고 있다. <4-나>에서는 두 직선의 관계인 수직과 평행, 평행선사이의 거리와 평행선과 한 직선이 만날 때의 각, 여러 가지 사각형(사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 직사각형과 정사각형) 및 다각형 등과 관련된 내용을 중심으로 구성되어 있다.

나) 미국 교과서: 평면도형, 측정과 평면도형 분류하기, 평면도형의 둘레의 길이와 면적, 입체도형과 부피 등을 다루고 있다.

(1) 평면도형과 관련된 세부내용

(가) 직선, 반직선, 각과 그들의 관계 식별하기

- 기하 용어인 점, 직선, 선분, 반직선, 평면(plane)을 그리기, 읽기, 쓰기(수학적 기호 사용하기)

- 각을 그리기, 읽기, 쓰기(수학적 기호 사용하기)

(나) 직선들의 평행, 수직, 교차 식별하기와 그리기, 읽기, 쓰기(수학적 기호 사용하기)

(다) 합동과 닮음인 도형을 식별하고, 도형의 옮기기(slide), 뒤집기(flip), 돌리기(turn)의 결과 예측하기

(라) 대칭인 도형: 선대칭(line symmetry)과 회전대칭(rotational symmetry)인 도형 식별하기

(마) 문제해결 전략(모델 만들기): 닮은 도형들과 대칭

31) 우리 교과서에서는 <4-가>에서 다루고 있다.

32) 우리 교과서에서의 용어는 정삼각형이고, 이 용어를 사용하고 있지 않다. 미국의 경우에 이러한 용어의 사용은 분류의 관점에 의한 것이다.

33) 등변삼각형의 용어와 마찬가지로, 우리 교과서에는 이 용어를 도입하고 있지 않다. 이는 같은 길이를 갖는 변의 개수에 의한 삼각형의 분류문제를 다루고 있지 않음에 기인된 것이다.

34) 우리 교과서에서는 <4-나>에서 다루고 있는데, '사변형(quadrilateral)'이란 용어 대신에 '사각형'으로 그 용어를 사용하고 있다.

35) 우리 교과서에는 도입되지 않은 개념이다. 우리 교과서에서 비와 비례식의 개념을 도입하고 있다는 점에서 간단한 도형의 닮음과 관련된 내용을 도입하는 것을 고려할 만하다.

36) 이 용어는 <2단계>의 길이 영역에서 처음으로 도입(<그

림 7> 참조)되고 있는 반면, 우리의 경우에는 <5-가>에서 처음으로 사용하고 있다 (직·정사각형의 둘레의 길이).

37) 미국 교과서에서는 <5단계>에서 도입하고 있다.

38) 「세 변의 길이가 같은 삼각형」으로 약속하기를 도입하고 있다. 그러나 약속하기의 개념을 살펴보면 오히려 미국에서의 경우처럼 등변삼각형(equilateral triangle)이라는 용어가 더 적절할 것 같다. 실제로, 정삼각형이란 용어는 영문용어인 「regular 3-gon」을 옮긴 것이다.

성을 포함한 문제를 풀기 위하여 모델 만들기

(2) 측정과 평면도형 분류하기와 관련된 세부내용

(가) 돌리기와 각도(degree)

(나) 각도기(protractor) 사용하기

(다) 원 그리기와 원의 구성요소(중심, 현(chord)³⁹, 지름, 반지름) 인식하고 기호 사용하기

(라) 원주를 추정하고 지름의 길이와의 관계 탐색

- 원기둥이나 캔과 같은 모양의 물체를 실로 감싸고, 감싼 실의 길이로부터 원주를 추정, 물체의 본을 떤 후 지름의 길이 구하고 두 값 비교하기

(마) 변의 길이에 따른 삼각형 분류하기: 등변삼각형, 이등변삼각형, 부등변삼각형

(바) 사변형 구별하고 분류하기

(사) 문제해결 전략(벤 다이어그램 그리기): 도형의 변의 길이에 따른 분류문제

(3) 평면도형의 둘레의 길이와 면적과 관련된 세부내용

(가) 다각형을 식별하고, 변들의 길이를 더함으로써 다각형의 둘레의 길이 찾기

(나) 공식을 사용하여 다각형(직·정사각형)의 둘레의 길이 어렵하기와 찾기

(다) 평면도형의 면적을 어렵하고 찾기

(라) 면적과 둘레의 길이 사이의 관련성 탐구하기

- 둘레의 길이가 다른 두 도형은 같은 면적을 가질 수 있다.

- 면적이 다른 두 도형은 같은 둘레의 길이를 가질 수 있다.

(마) 면적이거나 둘레의 길이가 주어진 다각형에서 알려지지 않은 변의 길이를 찾기 위하여 공식 사용하기

(바) 문제해결 전략: 면적이거나 둘레의 길이를 포함한 문제를 풀기 위하여 면적이거나 둘레의 길이의 패턴(규칙) 찾기

(4) 입체도형 및 부피와 관련된 세부내용

(가) 꼭지점, 모서리, 면의 개수에 의하여 입체도형 식별하기: 입방체(cube), 직사각기둥(rectangular prism), 삼각기둥(triangular prism), 삼각피라미드(triangular prism), 정사각피라미드(square prism)

(나) 패턴(전개도)에 의하여 입체도형 식별하기

(다) 직사각기둥의 부피 어렵하기와 찾기

(라) 문제해결 기술: '너무 많은/적은' 정보의 기술을 이용한 입체도형의 부피 찾기

5) 5단계

가) 우리나라 교과서: <5-가>에서는 직육면체⁴⁰와 정육면체⁴¹의 성질과 관련된 내용(꼭지점, 모서리, 면, 겨냥도, 전개도 등)을 다루고 있다. 또한 평면도형의 둘레와 넓이를 도입하고 있는데, 주로 직사각형, 정사각형, 평행사변형, 삼각형과 관련된 내용이다. <5-나>에서는 도형의 합동과 합동인 삼각형의 그리기, 도형의 대칭(선대칭, 점대칭), 사다리꼴과 마름모의 넓이와 관련된 내용을 다루고 있다.

나) 미국 교과서: 평면도형, 평면·입체도형 분류하기, 둘레와 면적, 표면적(겉넓이)과 부피와 관련된 내용을 다루고 있다.

(1) 평면도형과 관련된 세부내용

(가) 종류가 다른 각(직각, 예각, 둔각 등)과 직선관계(평행, 교차, 수직 등)를 식별하기

(나) 각도기 사용하여 각을 재거나 각 그리기

(다) 각과 다각형

- 다각형과 정다각형

- 평각(straight angle)의 크기는 180도라는 사실을 이용하여, 다각형을 구성하는 각의 합 구하기, 활동을 통하여 삼각형 및 사변형의 내각의 합은 각각 180도, 360도가 된다는 사실 알아보기

(라) 원 그리기, 원의 구성요소 인식과 측정하기(중심각(central angle) 등)

(마) 합동과 닮음 식별하기

(바) 대칭인 도형: 대칭선 그리기, 회전대칭인 도형 식별하고 회전각도 알아보기

(사) 문제해결 전략(패턴 찾기): 나열된 도형으로부터 패턴(규칙) 찾기

39) 우리나라 교과서에서는 도입하고 있지 않다. 미국의 경우 지름의 특성을 수학적으로 잘 설명할 수 있다는 장점이 있다.

40) 미국 교과서에서는 '직사각기둥(rectangular prism)' 라는 용어를 흔히 사용한다.

41) 미국 교과서에서는 '입방체(cube)' 또는 '정사각기둥(square prism)' 라는 용어를 흔히 사용한다.

- (2) 평면·입체도형 분류하기와 관련된 세부내용
- (가) 변의 길이에 의한 삼각형 분류와 각도에 의한 삼각형 분류하기
- (나) 변과 각의 특성에 의하여 사변형 분류하기
- (다) 좌표평면⁴²⁾에서의 도형의 변환(transformation)
- 평행이동(translation): 직선방향으로 도형 밀기
 - 반사(reflection): 직선위로 도형 뒤집기
 - 회전(rotation): 점이나 꼭지점 주위로 도형 돌리기
- (라) 입체도형⁴³⁾ 분류하기: 입체도형 이름과 꼭지점, 모서리, 면의 개수
- 삼각기둥, 직사각기둥, 오각기둥, 육각기둥
 - 삼각피라미드, 정사각피라미드, 오각피라미드, 육각피라미드
 - 실린더, 원뿔(cone), 구
- (마) 보는 위치로부터 입체도형 식별하기: 위, 옆, 앞에서 본 평면도형 그리기와 본 모양으로부터 입체도형 식별하기
- (바) 문제해결 기술: 일반화하기
- (3) 둘레 및 면적과 관련된 세부내용
- (가) 다각형의 둘레의 길이 추론하기와 구하기
- (나) 원주 찾기와 원주율
- (다) 직·정사각형의 면적 찾기
- (라) 면적과 둘레의 길이 관련성
- 둘레의 길이를 변화시키지 않고 도형의 면적 변화시키기
 - 면적을 변화시키지 않고 도형 둘레의 길이 변화시키기
- (마) 삼각형의 면적 구하기와 공식 만들기: 모눈종이 상에서의 활동(직각 삼각형인 경우를 먼저 행하고 일반적인 삼각형인 경우로) - 직사각형의 면적을 이용함
- (바) 평행사변형의 면적 구하기: 모눈종이 상에서의 활동 - 직사각형의 면적을 이용함
- (사) 부정형 도형의 면적 추정 또는 구하기
- (아) 문제해결 전략: 부정형의 도형을 정형적인 도형

- (삼각형, 직사각형 등)으로 분할 - 단순화하여 문제 풀기
- (4) 표면적(겉넓이)과 부피와 관련된 세부내용
- (가) 3차원 입체도형에 대한 2차원 패턴(표면) 인식하기: 전개도
- (나) 직사각기둥의 표면적(겉넓이) 구하기
- (다) 직사각기둥의 부피 구하기
- (라) 둘레, 면적, 부피의 측도(measure)의 적절한 단위 식별하기
- (마) 문제해결 기술: 공식 이용하기

6) 6단계

가) 우리나라 교과서: <6-가>에서는 입체도형⁴⁴⁾과 관련된 내용으로, 각기둥, 각뿔, 각기둥과 각뿔의 전개도, 쌓기 나무와 관련된 내용으로 쌓은 모양 인식하기, 규칙 찾기, 개수 구하기와 위, 앞, 옆에서 본 모양 알아보기와 본 모양으로부터 쌓은 모양 인식하기, 직육면체와 정육면체의 겉넓이, 부피단위와 쌓기 나무를 이용한 부피 찾기, 부피와 길이 단위사이의 관계 등과 관련된 내용으로 구성되어 있다. <6-나>에서는 원기둥과 그 전개도, 원뿔, 회전체⁴⁵⁾, 회전체의 단면, 원주와 원주율, 원의 넓이, 원기둥의 겉넓이, 원기둥의 부피와 관련된 내용들을 중심으로 다루고 있다.

나) 미국 교과서: 기하적 도형, 평면도형, 입체도형, 합동과 닮음, 비·비례식과 닮은 도형과 관련된 내용, 측정 영역에서는 길이와 둘레, 면적, 부피를 다루고 있다. 또한 기하적 패턴, 기하와 움직임 등의 내용도 도입하고 있다.

(1) 기하적 도형과 관련된 세부내용

- (가) 기하적인 용어(점, 직선, 평면, 선분, 반직선 등)를 사용하여 도형 묘사하기
- (나) 각의 이름과 표현, 측정, 그리기
- (다) 각의 관계 이해하기⁴⁶⁾: 맞꼭지각(vertical angle),

42) 우리 교과서에서는 좌표평면을 도입하고 있지 않다.
 43) 다각형인 면을 가지는 입체도형을 '다면체'로 정의하고 있고, '기둥'은 「두 개의 합동인 밑면(base)을 가지는 다면체」로 용어를 사용하고 있다. 또한 피라미드(pyramid)의 용어는 「단지 한 개의 밑면(base)을 가지는 다면체」로 도입하고 있다.

44) 입체도형이란 용어는 <6-가>에서 처음으로 약속하기로 도입하여 사용하고 있다. 그러나 미국의 경우는 <1단계>부터 사용하고 있다.
 45) 미국 교과서에서는 도입하고 있지 않다. 우리의 경우는 기본적인 입체도형의 구성문제와 공간감각 기르기의 측면이 강조되어 있다.
 46) 우리 교과서에서는 맞꼭지각, 인접각, 여각, 보각과 관련된

인접각(adjacent angle), 여각(complementary angle), 보각(supplementary angle)

(라) 직선 분류하기: 평행, 수직, 교차

(2) 평면도형과 관련된 세부내용

(가) 삼각형을 분류하고, 삼각형의 각도를 포함한 문제 해결하기

(나) 문제해결 전략(패턴 찾기): 정다각형을 삼각형으로 분할하여 한 각의 크기 찾기

(다) 사변형 식별, 분류, 비교하기⁴⁷⁾: 각, 변의 길이, 평행

- 직사각형: 4개의 직각을 가지는 평행사변형

- 마름모: 4개의 합동인 변을 가지는 평행사변형

- 정사각형: 4개의 합동인 변을 가지는 직사각형, 4개의 직각을 가지는 마름모

(라) 2차원 기하적 도형 그리기

(마) 원의 구성요소 식별하기⁴⁸⁾: 반지름, 지름, 현, 호, 부채꼴(sector)

(3) 입체도형과 관련된 세부내용

(가) 입체도형의 이름과 분류하기: 다면체, 원기둥, 원뿔(cone) 등

(나) 입체도형을 여러 각도에서 본 모양 그리기와 본 모양으로부터 입체도형 식별하기

(다) 기둥과 피라미드의 모델 만들기: 전개도

(라) 문제해결 전략(더 간단한 문제 풀기): 더 간단한 도형을 탐구하여 원래의 도형과 관련된 문제풀기

(4) 합동 및 닮음과 관련된 세부내용

(가) 합동인 각과 선분 작도하기와 식별하기

(나) 선분과 각의 이등분선 작도하기

(다) 평행선 작도하기

(라) 닮음과 합동인 도형 식별하기

(5) 비·비례식 및 닮은 도형과 관련된 세부내용

(가) 대응변과 대응각⁴⁹⁾: 두 도형이 닮음이면, 대응각

내용은 취급하고 있지만 그 용어는 도입하고 있지 않다.

47) 같은 길이를 표시하는 수학적인 기호를 사용한다. 우리 교과서에서는 사용하고 있지 않다. 초등학교 고학년의 경우에는 우리도 도형학습의 효율성을 고려한다는 관점에서 이 기호를 도입함이 좋을 것 같다.

48) 현, 호, 부채꼴의 용어는 우리 교과서에서는 도입하고 있지 않다.

49) 우리 교과서에서는 도형의 합동에서 도입하고 있다.

은 합동이고, 대응변들의 길이는 같은비를 가진다.

(나) 비례식을 이용하여 알려지지 않은 변의 길이 구하기

(6) 측정영역에서 길이 및 둘레와 관련된 세부내용

(가) 둘레의 길이 어렵하기

(나) 다각형 둘레의 길이 구하기: (형)식 사용하기

(다) 문제해결 전략(다이아 그램 그리기): 둘레의 길이를 찾기 위한 다이어그램 그리기

(라) 원주 구하기

(마) 활동을 통하여 직각삼각형의 빗변과 레그 사이의 관계 알아보기, 피타고라스 정리⁵⁰⁾와 그 역을 어떻게 사용하는지 탐구하기

(7) 측정영역에서 면적과 관련된 세부내용

(가) 면적 어렵하기와 직사각형과 삼각형의 면적 구하기

(나) 평행사변형과 사다리꼴의 면적⁵¹⁾ 구하기

(다) 원의 면적 구하기: 조각내기 활동⁵²⁾

(라) 공식을 사용하여 원의 면적 구하기

(마) 피라미드와 기둥의 표면적 구하기: 전개도 등을 이용

(8) 측정영역에서 부피와 관련된 세부내용

(가) 직사각기둥과 삼각기둥의 부피⁵³⁾ 구하기와 어렵하기

(나) 문제해결 전략(모델 만들기): 모서리 길이의 변화와 부피 변화의 관계

(다) 직사각피라미드의 부피⁵⁴⁾를 구하기 위한 공식 사용하기: 직사각기둥의 부피 및 직사각피라미드의 부피와

50) 우리 교과서에서는 도입하고 있지 않다.

51) 미국 교과서에서는 사다리꼴의 면적을 구하는 공식을 유도하는 활동은 밑변에 수직인 하나의 변을 가지는 특수한 형태의 사다리꼴을 사용하여 결국 직사각형의 면적(같은 폭을 두 개 붙임)을 이용하는 방법을 택하고, 일반적인 형태의 사다리꼴인 경우는 생각과 토론의 형식으로 물음을 주고 있는 반면, 우리 교과서 <5-나>에서는 미국 교과서의 방식과 주어진 사다리꼴을 두 개의 삼각형으로 나누는 활동을 도입하고 있다.

52) 우리나라 교과서에서는 원의 외접 사각형의 면적과 원안에 포함된 단위 정사각형의 개수를 이용하여 원의 넓이를 구하는 활동도 도입하고 있다.

53) 직사각기둥의 부피를 이용한 직각삼각기둥의 부피를 다루고, 일반적인 삼각기둥인 경우는 공식을 사용한다. 우리 교과서에서는 삼각기둥의 부피는 다루고 있지 않다.


54) 우리 교과서에는 다루고 있지 않다.

의 관계를 알아보는 활동으로부터 공식 유도 (<그림 14> 참조).

Activity

You need: prism and pyramid nets, tape, rice

- Cut out the nets for the prism and the pyramid. Fold along the dashed lines and use tape to make an open prism and an open pyramid.
- Compare the height of the prism with the height of the pyramid.
- Compare the base of the prism with the base of the pyramid.
- Fill the pyramid with rice. Pour the rice into the prism. Repeat until the prism is full.
- What is the relationship between the heights and bases of the prism and pyramid?
- What is the relationship between the volume of the pyramid and the volume of the prism?



<그림 14> <6 단계> 직사각피라미드의 부피

(라) 조작을 통한 실린더의 부피 근사하기: 얼마나 많은 개수의 단위 입방체가 실린더에 포함되는가? (<그림 10> 참조)

(마) 실린더의 부피 찾기: 공식사용

(9) 기하적 패턴과 관련된 내용

기하적 도형들의 패턴을 인식, 묘사, 확장하기와 프랙탈(fractal)⁵⁵⁾ 등을 다루고 있다.

(10) 기하와 움직임 영역에서의 세부내용

(가) 평면도형의 변환: 평행이동(translation), 회전(rotation), 반사(reflection)

(나) 평면의 바닥깔기(tessellation)

(다) 문제해결 전략(모델 만들기): 모델 만들기 전략을 사용하여 바닥깔기를 포함한 문제 풀기

(라) 입체도형의 변환

(마) 선대칭과 회전대칭 식별하기

IV. 결론

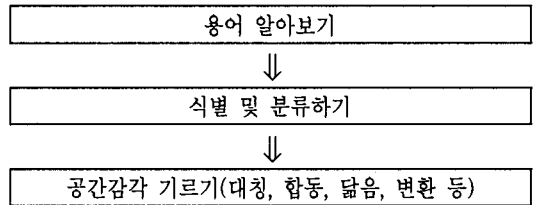
우리나라 제 7차 교육과정 초등수학 교과서와 미국 초등수학 교과서 모두 기본적으로 학생들의 인지 발달 수준, 학습의 위계도와 난이도를 고려한 교과과정이지만,

55) 우리나라 교과서에서는 이 용어를 사용하고 있지 않다.

기하영역에서 내용의 구성체계, 도입 시기, 방법에 있어 차이점이 있었다. 이러한 차이점은 김연미(1999)의 연구에서도 지적된 바와 같이 미국의 경우는 NCTM(2000)의 규준에 따라 교과서의 내용을 구성하였기 때문이다.

특히, 우리의 분석에 의하면, 도형의 도입 방법에 있어서 미국의 경우는 대체로 단계적 도입방법을 따르고 있다. 먼저 직관적으로 도형을 도입한 후 상위 단계에서 그 도형의 구성성분을 읽고, 쓰고, 수학적 기호를 도입하고 있다. 이는 우리의 약속하기(읽고, 쓰고, 수학적 기호 포함)로 도입하는 것과는 상당히 다른 점이 있다.

한편, 전체적인 맥락에서는 두 교과과정의 기하영역은 모두 <그림 15>와 같은 개략적인 구성체계를 지니고 있다. 두 교과서의 분석을 통하여 교과서의 내용을 어떻게 구성하고 있는 가에 대한 결과를 이러한 구성체계의 각 항목의 관점에서, 우리의 현행교과서의 개선방안을 중심으로 언급하고자 한다.



<그림 15> 도형(기하)영역 구성체계

먼저, 수학적 용어의 관점에서 두 교과서의 분석 결과를 알아보자. 우리 교과서의 경우에는 기본도형의 수학적 용어를 약속하기 형태로 도입하고 있는 반면, 미국의 경우는 기본적 수학적 모형(<그림 2> 참조)을 통하여 용어를 도입하여, 반복 숙지시키고, 우리 교과서에서 기본도형의 약속하기에 주어진 내용은 성질로서 다루는 경향이 있고, 또한 각 기본도형에서 파생된 특수한 형태의 도형에 관한 용어는 분류의 관점에서 성질의 특성을 이용하여 그 용어를 도입하고 있다. 예를 들어, 우리의 경우 「~삼각형에 대하여 알아봅시다」라는 차시 하에 ~삼각형에 대한 약속하기가 도입되고 있다. 다시 말해서, 각각의 주제들이 분리되어 도입되고 있다. 미국의 경우는 「삼각형 분류하기」라는 소제목 하에 변의 길이와 각의 종류에 따른 분류를 통해서 여러 가지의 특수한 형

태의 삼각형과 관련된 용어를 포괄적으로 도입한다. 이러한 점은 관계적 이해를 중시하고 있음을 시사하고 있고, 우리의 교과서가 좀더 보완해야 할 부분 중 하나이다.

우리가 일상에서 흔히 접할 수 있는 다양한 물체를 추상화한 수학적 모형을 다양한 관점에서 바라보고, 이들 모형의 성질을 조사하거나 분류·구별하는 것이 도형교육의 기본이라고 할 수 있다. 미국의 경우는 이러한 문제를 우리의 경우보다 많이 강조하고 있다. 예를 들어, 초등 저학년부터 도입된 <그림 3>, <그림 4>, <그림 13>과 같은 도형의 분류문제를 전 단계에 걸쳐 도입하고 있지만, 우리의 경우는 그러한 종류의 분류문제를 <6-가>에서만 도입하고 있다. 또한 앞에서 언급한 수학적 용어도입의 경우를 보더라도 미국의 교과서에서는 분류문제를 핵심사항으로 다루고 있다. 이는 우리가 교과서의 구성에 좀더 중시해야 할 점이다. 도형을 분류하고 구별하는 문제는 도형을 바라보는 관점에 따라서 달라질 수 있다는 것이다. 이를테면, 칠판에 그려진 두 개의 도형, 원과 삼각형을 보고 같은 도형이라고 말하는 학생이 있다면, 어떤 교사는 교사자신의 생각으로 그 학생의 생각이 틀렸다고 말할지도 모르나, 유능한 교사라면 그 학생이 원과 삼각형을 같은 도형으로 분류한 기준이 있다는 사실에 유념해야 한다. 특히, 초등수학 도형교육에 있어서 교사는 항상 이러한 점을 간과하지 말아야 할 것이다.

끝으로, 공간감각 기르기 부분에서는 우리의 교과서도 이것을 많이 도입하고 있지만, 미국의 경우는 보다 일찍 대칭성 문제(<그림 12> 참조)를 도입하고 계속해서 이러한 문제를 반복하고 있고, 또한 우리가 도입하고 있지 않은 회전대칭(<그림 5> 참조), 닭음, 바다깎기, 프렉탈 등의 문제도 다루고 있다. 공간감각 기르기를 위한 미국의 다양한 활동들을 우리가 고려해 보직하다. 왜냐하면, 공간감각은 수학의 타 영역을 공부하는 데 유리할 뿐만 아니라 우리의 현실 세계를 관찰하고 이해하는 데에도 도움을 주기 때문이다.

아무리 좋은 교과서라고 할지라도 결국 교육을 이끌어 가는 핵심적인 주체는 교사이기 때문에 현 교육과정에 얽매기보다는 교육과정을 수정 혹은 보완하여 학생을 가르치는 방향으로 사고의 전환이 필요하다고 생각된다.

특히, 도형영역은 초등수학 교과영역에서 많은 부분을 차지하고 있고 또한 학생들의 사고력향상에 많은 영향을 미친다. 이 논문에서 분석된 결과가 교육의 주체인 교사가 우리의 현행 교과과정의 초등 수학교과서의 도형영역 내용을 다양하게 재구성하여 학생들의 기하개념 형성에 도움을 주었으면 한다.

참 고 문 헌

- 강문봉 · 김수미 · 송상현 · 박교식 · 박영배 · 유현주 · 이종영 · 정동권 · 정은실 · 정영옥 (2002). 초등수학교육의 이해. 서울: 경문사.
- 교육부 (2004). 수학 <1-가> ~ <6-나> 교과서, (주) 대한 교과서 주식회사.
- 김연미 (1999). 한국과 미국의 초등학교 저학년 수학 교과서 및 교육과정의 비교와 분석, 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 9(1), pp. 121-132.
- 나귀수 · 황혜정 · 임재훈 (2003). 수학과 교육과정에서의 내용 비교연구-우리나라, 미국의 캘리포니아 주, 영국, 일본을 중심으로-, 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 13(3), pp. 403-428.
- Barnett Ruch (revised by Philip A. Schmidt) (2000). Schaum's outlines Geometry (3rd Edition), McGraw-Hill Companies, Inc.
- Evan M. Maletsky et al. (2002a). Harcourt Math (Math-Grade 1), Harcourt, Inc.
- Evan M. Maletsky et al. (2002b). Harcourt Math (Math-Grade 2), Harcourt, Inc.
- Evan M. Maletsky et al. (2002c). Harcourt Math (Math-Grade 3), Harcourt, Inc.
- Evan M. Maletsky et al. (2002d). Harcourt Math (Math-Grade 4), Harcourt, Inc.
- Evan M. Maletsky et al. (2002e). Harcourt Math (Math-Grade 5), Harcourt, Inc.
- Evan M. Maletsky et al. (2002f). Harcourt Math (Math-Grade 6), Harcourt, Inc.
- NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, VA., The National Council of Teachers of Mathematics, Inc. 구광조 ·

오병승·류희찬 공역 (1992). 수학교육과정과 평가의 새로운 방향. 서울: 경문사.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA., The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

**A Comparative study on Elementary School Mathematics Textbooks
in Korea(7th Curriculums) and America(Harcourt Math)
-focused on the Area of Geometry-**

Choi, Keunbae

Dept. of Math. Edu., Jeju National University of Education, Jeju 690-781, Korea

E-mail: kbchoe@jejeu.ac.kr

Kim, Hae-Gyu

Dept. of Math. Edu., Jeju National University of Education, Jeju 690-781, Korea

E-mail: kimhag@jejeu.ac.kr

In this article, we compared and analyzed the Korean 7th National Mathematics textbooks and Harcourt Math textbooks in America focused on the area of geometry for the elementary school students.

We expect that this article would contribute to the elementary school teacher for the reorganization of the elementary school mathematics curriculums.

* ZDM classification : D13

* 2000 Mathematics Classification : 97D10, 97U20

* key word : Curriculum of education, Area of geometry.