크기가 제한된 입력을 갖는 가변구조제어 시스템을 위한 개선된 안정 영역 추정값

An Improved Estimate of the Asymptotic Stability Region for the Uncertain Variable Structure Systems with Bounded Control

최 한 호*
(Han Ho Choi)

Abstract : This paper deals with the problem of estimating the asymptotic stability region(ASR) of uncertain variable structure systems with bounded control. Using linear matrix inequalities(LMIs) we estimate the ASR and we show the exponential stability of the closed-loop control system in the estimated ASR. We show that our estimate is always better than the estimate of [3].

Keywords : linear matrix inequality(LMI), variable structure system, bounded control, switching surface, asymptotic stability region

I. 서론

가변구조제어 시스템의 가장 중요한 특성은 소위 정합조건(matching condition)을 만족시키는 변수변동이나 외란에 대하여 시스템이 영향을 받지 않는 스위칭평면에서의 슬라이딩 모드(sliding mode)가 존재한다는 것이다[1]. 실제 제어 시스템 구현에서 제어 입력 크기는 물리적인 구속조건들 때문에 제한이 된다. 최근 크기가 제한된 입력을 갖는 가변구조제어 시스템의 점근안정영역(ASR, Asymptotic Stability Region)을 측정하기 위한 방법들이 소개되었다[2,3]. 논문 [2]에서는 상태변수 변환을 사용하여 여러 개의 리아푸노프(Lyapunov) 함수를 결합하는 개념이 소개되었다. 여러 개의 리아푸노프 함수들을 사용하여 3개의 어트랙션 영역(domain of attraction)을 찾아내고 ASR을 보다 크게 얻기 위해 이들 3개의 어트랙션 영역을 조합하였다. 결국 추정된 ASR은 볼록(convex)하지 않으며 부시스템(subsystem) 행렬 놈(norm)을 사용하였기 때문에 어림짐작에의한 오차가 심하다. 그리고 [2]의 결과는 상태 변환 행렬을 사용하였기 때문에 간접적이며 복잡하다. 논문 [3]에서는 LMI를 이용하여 크기가 제한된 입력을 갖는 가변구조제어 시스템의 ASR을 추정하는 방법을 제시하였다. 그리고 [2]의 방법과 달리 상태변환을 요구하지 않고 같은 조건 밑에서 [2]의 결과를 사용할 때 보다 더 큰 ASR을 구할 수 있음을 수치적인 예를 들어 보였다.

본 논문에서도 LMI에 기반하여 크기가 제한된 입력을 갖는 가변구조제어 시스템의 ASR을 추정하는 방법을 제시한다. 그리고 제안된 방법이 같은 조건 밑에서 최근 논문 [3]의 방법보다 항상 같거나 나은 결과를 줄 수 있음을 증명하는데 이것이 본 논문의 주요 공헌이다.

* 책임저자(Corresponding Author)
논문접수 : 2003. 11. 25., 채택확정 : 2005. 1. 21.
최한호 : 동국대학교 전기공학과(hhchoi@dongguk.edu)

II. 문제 설정과 보조정리들

우리는 다음과 같은 동역학 방정식으로 표현 가능한 시스템을 고려한다

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) + \zeta(t)] \tag{1}$$

여기에서 $x(t) \in R^n$은 상태이고 $u(t) \in R^m$은 제어 입력이고 $\zeta(\cdot): R^+ \to R^m$는 불확실성을 일괄적으로 표현한 것이고 $A \in R^{n\times n}$은 시스템 특성 행렬이고 $B \in R^{n\times m}$은 입력 행렬이다. 위의 시스템 방정식은 다음을 만족시킨다고 가정한다.

A1: $\|\zeta(t)\| \le \rho$를 만족하는 상수 ρ가 존재한다.

A2: 입력행렬 B는 rank가 m이고 $m < n$이다.

A3: 입력은 $\|u\| \le \bar{u}$ 그 크기가 제한되어 있다.

A4: $\bar{u} - \rho = \mu > 0$ 를 만족시킨다.

A5: 쌍 (A, B)는 안정가능하다.

다음과 같이 선형 스위칭 평면을 정의하기로 하자.

$$\Omega = \{x : \sigma(x) = Sx = 0\} \tag{2}$$

여기에서 $S \in R^{m\times n}$는 rank가 m인 행렬이다. 이전의 가변구조제어기 관련 논문들 [1-4]를 참조하여 우리는 S가 다음의 성질들을 만족시킨다고 가정하는 것이 타당함을 알 수 있다.

P1: SB는 nonsingular 행렬이다. 이론전개의 복잡함을 피하기 위해 $SB > 0$이라고 가정한다.

P2: $(n-m)$차의 슬라이딩 모드 동역학이 안정하다.

결국 우리의 문제는 주어진 S에 대하여 ASR을 추정하는 방법을 제안하는 것이라 할 수 있다.

다음에 주어지는 보조 정리들은 주요 결과를 유도하는데 필수적인 것들이다.

보조정리 1 [3]: 시스템 (1)에서 성질 P1-2를 보장하는

슬라이딩 평면 행렬 S가 존재하면 다음 행렬식을 만족시키는 해 (ε, K, X)가 존재한다.

$$X > 0, \quad AX - BK^T + * < 0, \quad \varepsilon B^T = SX, \quad \varepsilon > 0 \tag{3}$$

여기에서 $*$는 대칭성에 의해서 쉽게 유추될 수 있는 행렬 블록을 의미한다

보조정리 2 [4]: 주어진 하나의 행렬 N와 두 개의 대칭행렬 Q와 R에 대하여 다음의 LMI를 고려하자.

$$\begin{bmatrix} Q & N \\ N^T & R \end{bmatrix} > 0 \tag{4}$$

위의 LMI가 성립할 필요충분조건은 다음 중 하나이다.

$$R > 0, \quad Q - NR^{-1}N^T > 0 \tag{5}$$

$$Q > 0, \ R - N^TQ^{-1}N > 0 \tag{6}$$

보조정리 3 [5]: 주어진 행렬 G와 대칭행렬 W에 대하여 다음의 행렬 부등식을 만족시키는 해 행렬 K를 찾는 문제를 생각하자.

$$W + G^TK^T + KG < 0 \tag{7}$$

위의 문제가 해 행렬이 존재할 필요충분조건은 다음 행렬 부등식이 어떤 실수 γ에 대하여 성립하는 것이다.

$$W - \gamma G^TG < 0 \tag{8}$$

III. 점근안정영역의 추정치

정리 1 : 시스템 (1)에서 성질 P1-2를 보장하는 슬라이딩 평면 행렬 S가 존재하면 행렬식 (3)과 다음 LMI를 만족시키는 해 $(\varepsilon, \delta, K, X)$가 존재한다.

$$\begin{bmatrix} X & K \\ K^T & I \end{bmatrix} > 0 \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & \delta I \end{bmatrix} > 0 \tag{10}$$

증명 : 보조정리 1과 3은 다음의 LMI를 만족시키는 ε_0, δ_0, X_0, γ_0가 존재함을 의미한다.

$$X_0 > \frac{1}{\delta_0} I > 0, \ \varepsilon_0 > 0, \ \varepsilon_0 B^T = SX_0, \quad AX_0 + X_0A^T - 2\gamma_0 BB^T < 0 \tag{11}$$

$\lambda_{\min}(X_0)$, $\lambda_{\max}(BB^T)$, γ_0값들이 유한하므로 다음을 만족시키는 양수 α가 항상 존재한다.

$$\lambda_{\min}(X_0) > \alpha \lambda_{\max}(BB^T)\gamma_0^2 > 0 \tag{12}$$

그리고 위 식을 만족시키는 임의의 양수 α에 대하여 X_0는 다음 식을 만족시킨다.

$$\alpha X_0 > \gamma_0^2 \alpha^2 BB^T, \quad \alpha X_0 > \frac{\alpha}{\delta_0} I \tag{13}$$

위의 식은 보조정리 2를 이용하여 다음과 같이 고쳐 쓰일 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \alpha X_0 & \alpha\gamma_0 B \\ * & I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} \alpha X_0 & I \\ * & \frac{\delta_0}{\alpha} I \end{bmatrix} > 0 \tag{14}$$

그리고 (11)은 다음을 의미한다.

$$\alpha X_0 > 0, \ \alpha\varepsilon_0 > 0, \ \alpha\varepsilon_0 B^T = \alpha SX_0, \quad \alpha AX_0 + \alpha X_0 A^T - 2\alpha\gamma_0 BB^T < 0 \tag{15}$$

결국 우리는 $X = \alpha X_0$, $K = \alpha\gamma_0 B$, $\varepsilon = \alpha\varepsilon_0$, $\delta = \delta_0/\alpha$가 행렬식 (3),(9),(10)를 만족시킴을 알 수 있다. ■

성질 P1-2를 만족시키는 슬라이딩 평면 $Sx = 0$가 주어졌고 스위칭 궤한 제어입력이 크기가 $\|u\| \le \bar{u}$의 형태로 제한되어 다음과 같이 주어졌다고 가정하자.

$$u(t) = -\bar{u}\frac{Sx}{\|Sx\|} \tag{16}$$

여기에서 우리는 (16)과 같은 형태의 제어기는 실제에서 매우 많이 쓰이며 무한차원시스템의 경우에도 적용됨에 유의해야 한다[6]. 정리 1은 (3),(9),(10)을 만족시키는 양한정 행렬 X와 행렬 K가 존재함을 의미한다. 리아푸노프 함수를 $V(x) = x^TX^{-1}x$라고 정의하자. (1)과 (16)의 폐회로 응답 궤적을 따른 리아푸노프 함수의 도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2x^TX^{-1}[Ax \pm BK^TX^{-1}x + B(u + \zeta)] \\ &= -x^TQx \\ &\quad - 2x^TX^{-1}B(\bar{u}\frac{Sx}{\|Sx\|} - K^TX^{-1}x - \zeta) \end{aligned} \tag{17}$$

여기에서 행렬 Q는 다음과 같이 주어진다.

$$-Q = X^{-1}(AX - BK^T + *)X^{-1} \tag{18}$$

보조정리 1과 정리 1은 $S = \varepsilon B^TX^{-1}$, $Q > 0$을 의미하므로 가정 A1과 A4를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &\le -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 \\ &\quad + \frac{2}{\varepsilon}\|Sx\|(\|K^TX^{-1}x\| - \mu) \end{aligned} \tag{19}$$

그러므로 $\Xi_0 = \{x : x^TX^{-1}KK^TX^{-1}x \le \mu^2\}$영역에서 다음의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{dV}{dt} \le -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 \le 0 \tag{20}$$

위의 식은 초기치가 $x(0) \in \Xi \subset \Xi_0$의 조건을 만족시킨다면 아래의 영역 Ξ에서 $x = 0$가 지수함수적으로 안정함(exponential stability)을 의미하고 Ξ를 (1)과 (16)의 폐회로 시스템에 대한 ASR의 추정치로 삼을 수 있음을 의미한다.

$$\Xi = \{x : V(x) = x^TX^{-1}x \le \mu^2\} \tag{21}$$

조건 $\Xi \subset \Xi_0$는 $X^{-1} > X^{-1}KK^TX^{-1}$이 성립하면 만족된다. 보조정리 2에 의하여 $X^{-1} > X^{-1}KK^TX^{-1}$는 (9)이 성립하면 만족되고 (10)은 $X^{-1} < \delta I$를 의미하므로 $\Xi_s \subset \Xi \subset \Xi_0$이 성립하고 단순화된 ASR의 추정치 Ξ_s를 얻을 수 있다.

$$\Xi_s = \left\{ x : \|x\| \le \frac{\mu}{\sqrt{\delta}} \right\} \tag{22}$$

정리 2 : 성질 P1-2를 만족시키는 슬라이딩 평면 $Sx=0$가 주어졌고 스위칭 궤한 제어입력이 (16)과 같이 주어졌다고 가정하자. 불확실성을 갖는 시스템 (1)과 제어기 (16)의 폐회로 응답은 영역 (22)에서 지수함수적으로 안정하다.

IV. 주요 결과

다음에 주어진 최소화문제를 고려해보자.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \delta \\ &\text{subject to} \quad (3),(9),(10) \end{aligned} \tag{23}$$

위 문제를 해결하는 최적값 δ_*를 사용하면 (22)를 최대로 할 수 있는데 위의 최소화 문제는 구속조건들이 nonconvex 형태이므로 풀기 어렵게 보인다. 논문 [3]의 결과를 참조하면 우리는 (3)를 만족시키는 모든 X가 다음과 같이 매개변수화 될 수 있음을 보일 수 있다.

$$X = \Phi W \Phi^T + \varepsilon B(SB)^{-1}B^T \tag{24}$$

여기에서 Φ는 S의 널공간(null space)을 이루는 기저벡터(basis vector)들을 열로 갖는 행렬, 즉 Φ는 S^T의 Orthogonal complement로 $S\Phi=0$을 만족시키는 rank가 $n-m$인 임의의 $n\times(n-m)$행렬이고 $W\in R^{(n-m)\times(n-m)}$는 대칭행렬이다. 그리고 구속조건 (3),(9),(10)는 다음과 같이 고쳐 쓰일 수 있다.

$$W = W^T, \quad \varepsilon > 0 \tag{25}$$

$$A\Phi W\Phi^T + \varepsilon AB(SB)^{-1}B^T - BK^T + * < 0 \tag{26}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi W\Phi^T + \varepsilon B(SB)^{-1}B^T & K \\ K^T & I \end{bmatrix} > 0 \tag{27}$$

$$\begin{bmatrix} \Phi W\Phi^T + \varepsilon B(SB)^{-1}B^T & I \\ I & \delta I \end{bmatrix} > 0 \tag{28}$$

결국 우리는 최소화 문제 (23)은 다음의 LMI 최소화 문제와 동치임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \delta \\ &\text{subject to} \quad (25),(26),(27),(28) \end{aligned} \tag{29}$$

그리고 다음의 LMI최적화에 기반한 알고리즘을 활용하여 ASR의 추정치를 구할 수 있다.

ASR 추정 알고리즘 :

Step 1: 주어진 S에 대하여 $\Phi\in R^{n\times(n-m)}$를 구하라.

Step 2: LMI최적화 알고리즘을 사용하여 (29)를 풀어라.

Step 3: (22)식에 LMI최소화 문제 (29)를 해결하는 최적값 δ_*을 대입하여 ASR의 추정치 Ξ_*를 구하라.

$$\Xi_* = \left\{ x : \|x\| \le \frac{\mu}{\sqrt{\delta_*}} \right\} \tag{30}$$

주 1 : 정리 1에 의하여 주어진 P1-2를 만족시키는 S에 대하여 (3),(9),(10)를 만족시키는 해 $(\varepsilon, \delta, K, X)$가 항상 존재한다. 그리고 (3),(9),(10)와 동치인 LMI (25),(26),(27),(28)를 만족시키는 해 $(\varepsilon, \delta, K, W)$가 항상 존재할 것이므로 우리는 [7]의 LMI Control Toolbox와 같은 LMI 최적화 소프트웨어를 사용하여 아주 쉽고 효율적으로 위 알고리즘 Step 2의 과정을 실행하여 ASR의 추정치를 항상 구할 수 있다.

정리 3 : (22)에 주어진 ASR의 추정치 Ξ_s는 [3]에서 주어진 추정치 (31)보다 항상 좋거나 같다.

$$\Xi_{[4]} = \left\{ x : \|x\| \le \frac{\mu}{\sqrt{f_*}} \right\} \tag{31}$$

여기에서 $f_* = l_* \cdot k_*$는 다음의 nonconvex 최소화 문제를 해결하는 최적값이다.

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad f = l \cdot k \\ &\text{subject to} \quad (3),(33) \end{aligned} \tag{32}$$

그리고 (33)은 다음과 같이 정의된다.

$$X > I, \quad lI > X, \quad k(2X - I) > KK^T \tag{33}$$

증명 : 만약 우리가 위 nonconvex 최소화 문제 (32)를 해결하는 최적 argument들을 $(X_*, K_*, l_*, k_*, \varepsilon_*)$라고 했을 때 (3)으로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{f_*}X_* > 0, \quad \frac{1}{f_*}(AX_* - BK_*^T + *) < 0, \\ &\frac{\varepsilon_*}{f_*}B^T = \frac{1}{f_*}SX_*, \quad \frac{\varepsilon_*}{f_*} > 0 \end{aligned} \tag{34}$$

그리고 (33)으로부터 다음이 성립함을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{f_*}X_* &= \frac{k_*l_*}{f_*^2}X_* > \frac{k_*}{f_*^2}X_*^2 \\ &\ge \frac{k_*}{f_*^2}(2X_* - I) > \frac{1}{f_*^2}K_*K_*^T \\ \frac{1}{f_*}X_* &> \frac{1}{f_*}I \end{aligned} \tag{35}$$

즉 $X = X_*/f_*$, $K = K_*/f_*$, $\varepsilon = \varepsilon_*/f_*$, $\delta = f_*$가 항상 (3),(9),(10)를 만족시킴을 알 수 있다. 이것은 다음의 부등식이 성립함을 의미한다.

$$f_* = \delta \ge \delta_*, \quad \frac{\mu}{\sqrt{f_*}} = \frac{\mu}{\sqrt{\delta}} \le \frac{\mu}{\sqrt{\delta_*}} \tag{36}$$

여기에서 δ_*는 nonconvex 최소화 문제 (23) 또는 등가의 LMI 최소화 문제 (29)를 해결하는 최적값이다. 결국 우리는 LMI 최소화 문제 (29)를 풀어 구해진 ASR의 추정치가 [3]에서 제안된 값보다 항상 같거나 나은 결과를 줄 수 있음을 알 수 있다. ■

주 2 : [3]에서는 nonconvex 최소화 문제 (33)을 직접 푸는 것이 목적함수 $l \cdot k$가 nonconvex하여 어려우므로 (3)과 (31)을 만족시키는 임의의 feasible 초기값 (l_0, k_0) 부근에서 $l \cdot k = \text{constant} + l_0 \cdot k + l \cdot k_0$로 선형화하여 반복적인(iterative) LMI 최적화에 의하여 ASR의 추정치를 구하는 알고리즘이 제시되었다. 그러므로 [3]의 ASR추정 알고리즘은 초기값 (l_0, k_0)에 따라 결과가 바뀔 수 있으며 iteration수도 많아 질 수 있다. 반면에 본 논문에서 제안된 방법은 한번의 LMI 최적화만이 필요하고 초기값에 무관하다.

주 3 : 우리는 (16)과 같은 형태의 제어기만 고려했는데 (37)과 릴레이 형태의 제어기에도 우리의 결과가 적용됨을 (38)에 주어진 부등식과 (17)-(21)을 이용하여 쉽게 보일 수 있다.

$$u_i(t) \;=\; -\,\overline{u}\,\mathrm{Sign}\,(\sigma_i) \tag{37}$$

$$x^T S^T \frac{\sigma}{\|\sigma\|} = \|\sigma\| \;\le\; \sum \sigma_i \mathrm{Sign}(\sigma_i) = \sum |\sigma_i| \tag{38}$$

본 논문에서 제시된 방법을 조금 변형하고 주어진 임의의 벡터놈 $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_q$ 간의 크기와 관련된 부등식 (39)을 이용하면 (16)이나 (37)이외의 다양한 형태의 입력구속조건을 갖는 제어시스템의 안정영역의 추정치를 구할 수 있을 것이다.

$$k_1 \|x\|_p \le \|x\|_q \le k_2 \|x\|_p \tag{39}$$

여기에서 k_1, k_2 는 적절한 상수이다.

V. 결론

본 논문에서 입력의 크기가 제한된 가변구조제어시스템의 ASR을 추정하는 문제를 다루었다. 이전에 제안된 방법 [2]는 상태 변환 행렬을 사용하였기 때문에 간접적이다. 본 논문에서 제시된 방법과 [3]의 방법은 상태변환을 요구하지 않기 때문에 직접적이며 상대적으로 덜 복잡하다는 장점이 있다. 반복적인(iterative) LMI 최적화에 의하여 ASR의 추정치를 구해야하고 초기값에 따라 결과가 바뀔 수 있는 [3]의 방법보다 한번의 LMI 최적화에 의하여 결과를 구하고 초기값에 무관한 장점을 갖는 본 논문에서 제시된 방법이 항상 좋은 ASR의 추정치를 구해준다는 것을 증명한 것이 우리의 주요 공헌이다.

참고문헌

[1] V. I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *IEEE Trans. Automat. Contr.,* vol. 22, pp. 212-222, 1977.

[2] S. M. Madani-Esfahani, M. Hached and S. H. Zak, "Estimation of sliding mode domains of uncertain variable structure systems with bounded controllers," *IEEE Trans. Automat. Contr.,* vol. 35, pp. 446-449, 1990.

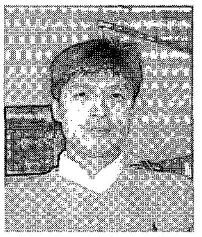
[3] 최한호, 국태용, "크기가 제한된 제어기를 갖는 가변구조제어 시스템의 점근 안정 영역 추정," 제어자동화시스템 공학 논문지, 제9권, 제8호, pp. 616-622, 2003.

[4] A. Albert, "Conditions for positive and nonnegative definiteness in terms of pseudoinverses," *SIAM J. Appl. Math.,* vol. 17, pp. 434-440, 1969.

[5] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in system and Control Theory,* Philadelphia, SIAM, 1994.

[6] Y. Orlov, "Discontinuous unit feedback control of uncertain infinite dimensional systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.,* vol. 45, pp. 834-843, 2000.

[7] P. Gahinet, A. Nemirovski and A. J. Laub, *LMI Control Toolbox User's Guide,* Natic, MA:The MathWorks Inc., 1995.



최 한 호

1966년 8월 25일생. 1988년 2월 서울대학교 제어계측공학과(공학사). 1990년 2월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학석사). 1994년 8월 한국과학기술원 전기 및 전자공학과(공학박사). 1994년 9월~1998년 2월 대우전자 전략기술 연구소. 1998년 3월~2003년 2월 안동대학교 전자공학교육과. 2003년 3월~현재 동국대학교 전기공학과. 관심분야는 가변구조제어이론, 마이콤 기반 제어, 가상현실 및 로보틱스.