한국수학사학회지 제18권 제2호(2005년 5월), 9-22

자연수 개념의 역사에 관한 분석적 고찰

서울대학교 대학원 고정화
lovehope@snu.ac.kr

본 연구는 자연수 개념이 역사적으로 전개된 방식을 이해하는 것이 수학적·교육적으로 매우 중요함에도 불구하고, 그 역사적 고찰이 미진한 상태에 있다는 데에 문제 의식을 갖고 출발하였다. 그리하여 자연수 개념이 역사적으로 어떻게 논의되어 왔는지 살펴보고자 하였다. 수학의 발달 과정에서 수가 어떤 의미를 지녔는지, 문화적·사회적 요소가 수 개념을 이해하는 방식과 수 개념의 발달에 어떤 영향을 주었는지 밝힘으로써 자연수 개념에 대한 이해를 풍부하게 하고자 하였다. 그리고 자연수 개념의 역사에 나타난 특징을 드러내고자 하였다.

주제어: 자연수 개념, 자연수 개념의 역사, 단위, 수와 양

0. 들어가는 말

수는 인류의 역사와 함께 시작된 개념이라고 해도 과언이 아니다. 수는 인간의 정신에서 나온 최초의 아이디어이며, 일상적인 경험과 깊이 관련되는 아이디어이기도 하다[5, p. 9]. 우정호에 의하면, 자연수는 수학자·철학자·심리학자·수학 교육학자들에게 끊임없이 문제를 제기해 왔을 뿐만 아니라[1, p. 168], 여러 가지 측면에서 접근할 수 있는 매우 복합적인 개념이기도 하다[1, p. 167]. 특별히 자연수는 수 체계의 가장 기본이 되는 수이고, 인간의 인지발달 과정에서도 가장 먼저 알게 되는 수이며, 아동의 학습 순서나 논리적·수학적 순서에서도 가장 기본이 되는 수이다. 그러므로 자연수에 대한 이해는 수학 교육의 기본이 되는 중요한 문제라고 할 수 있다.

자연수에 대한 이해의 중요성에 비추어볼 때, 자연수 개념에 대한 좀더 풍부한 논의가 요구된다고 할 수 있다. 특히, 특정 개념의 역사는 그 개념에 대한 이해를 풍부하게 해주고 그 주제를 넓은 관점에서 볼 수 있게 한다는 점에서 중요한 의미를 가진다. 역사를 통해 수학의 발달 과정에서 수가 어떤 의미를 지녔는지, 문화적·사회적 요소가 수 개념을 이해하는 방식과 수 개념의 발달에 어떤 영향을 주었는지 알 수 있기 때문이다.

본 연구에서는 자연수 개념이 역사적으로 전개된 방식을 이해하는 것이 이처럼 중

요함에도 불구하고, 지금까지 자연수 개념에 대한 역사적 고찰이 미진한 상태에 있다는 데에 문제의식을 갖고, 자연수 개념이 역사적으로 어떻게 논의되어 왔는지 살펴보고 그 특징을 분석하고자 한다. 수 개념의 역사는 수의 문화적 발달 과정에 따라 크게 그리스, 근세, 현대 세 시기로 구분할 수 있다. 그러므로 본 연구에서는 수에 대한 인식에 있어 그 이전과 크게 구분되는 그리스 시대와 근세, 그리고 수리철학의 성립이라는 맥락에서 수 '개념'에 대한 논의가 활발하게 이루어진 현대로 구분하여 살펴보고자 한다.

1. 자연수 개념의 역사

(1) 그리스 시대

이집트나 바빌로니아 시대에도 수에 대한 인식이 없었던 것은 아니지만, 그 시대는 그리스 시대와 분명하게 구분된다. 그리스 이전의 수에 관한 활동은 배타적인 계산 활동이었던데 반해, 그리스에는 수 철학이 존재하였다[4, p. 8]. 그리스인들은 수 계산이나 다른 활동 수학에 관심을 두지 않고, '수는 무엇인가?'라는 질문에 관심을 가진 것이다.[1] 수 개념과 관련하여 고대 그리스를 대표하는 학자로는 피타고라스(Pythagoras), 플라톤(Plato), 아리스토텔레스(Aristotle), 유클리드(Euclid)를 들 수 있다.[2]

가. 피타고라스

그리스의 철학은 우주와 그 안의 만물을 이해하는 데 목적을 두었는데, 피타고라스는 그러한 맥락에서 '만물은 수이다'라고 하여 수를 '있는 그대로의 모든 것'으로 정의한다[4, p. 10]. 피타고라스에게 수는 단순히 상상의 산물에 불과한 것이 아니라, 나무나 돌의 존재성과 같은 의미에서 존재하는 것이었다. 피타고라스에게는 수 개념을 이루는 더 기본적인 개념이 무엇인가 하는 질문은 성립하지 않는다. '만물은 수이다'라는 주장에서 알 수 있듯이, 수는 자연을 설명하는 근본 원리, 즉 궁극의 원인이자 모든 수학이 도출되는 절대적인 것으로 환원 불가능한 것이기 때문이다.

1) 수 개념 발달의 역사적 측면을 지식의 발달에서 반성의 역할에 초점을 두어 논의하고 있는 [7]과 고대 문헌에 나타난 수와 관련된 표기 체계를 중심으로 수 개념의 발달 단계를 살펴보고 있는 [8]은 수 개념의 발달 단계에서 그리스의 수 개념이 각각 '개념에 기초한 산술 수준', '추상적인 수 개념 수준'으로서 특별한 의미를 지니는 것으로 보고 있다.
2) 이 외에도 그리스에서는 단위와 수에 관한 논의가 다양하게 이루어졌는데, 그에 관해서는 [10]을 참조하라.

나. 플라톤

철학자이자 수학자였던 피타고라스와는 달리, 플라톤은 독자적으로 수학을 하지 않은 철저한 철학자였다. 브레이너드(Brainerd)에 따르면, 이런 이유로 하여 플라톤의 수학에 대한 입장은 주로 피타고라스의 권위에 의존하고 있다[4, p. 12]. 그리고 수에 대한 플라톤의 관점은 수학적 대상에 대한 그의 철학적인 이해에 종속된다고 할 수 있다.

플라톤의 철학은 인간의 정신과 독립적인 이데아의 존재에 기초하여 전개된다. 플라톤에 따르면, 수학적 대상은 감각으로 지각 가능하고 변화하는 가시계에 속한 것이 아니라 언제나 동일성을 유지하는 가지계에 속한 것으로 사고로만 파악되는 사고의 대상이다[2, p. 58]. 한편, 인식의 과정은 회상으로 설명된다. 영혼이 이미 직관하였지만 망각 상태에 있는 참된 실재를 상기함으로써 보편성과 완전성을 갖춘 개념에 대한 지식을 얻게 된다. 플라톤에게 있어 개념은 사물들의 원형으로, 대상이 존재하기 이전에 우주와 신의 마음속에 존재하며, 어떤 경험을 하기 전에 이미 마음속에 처음부터 부여된 것이다. 그러므로 플라톤에게 대상으로부터의 추상화라는 개념은 적용될 수 없다. 수 개념 역시 지각되는 대상에 대한 감각 작용을 통해 마음속에 들어오는 것이 아니라, 정신이나 다른 모든 물질과 독립된 하나의 실재로서 사유를 통해 얻어진다고 할 수 있다.

다. 아리스토텔레스

아리스토텔레스는 개념이나 지식은 물질적인 세계에 기원하며 감각작용을 통해 얻어진다고 보았다. 그에 따르면 지각되는 대상은 '질료'와 '형식'으로 이루어지는데, 감각 작용이 일어나면 대상의 순수한 형식이 비물질적인 방식으로 마음 안에 들어오게 된다. 이것이 곧 추상화 과정이다. 아리스토텔레스는 수학적 대상 역시 물질적 사물과 분리될 수 없는, 그러나 분리해서 생각할 수 있는 것이라고 본다. "이 모든 대상과 같은 종류의 다른 것들은 수와 공간적인 크기가 사물과 동떨어져 존재할 수 없다는 것을 분명히 보여준다."[11, p. 184] 그러므로 수와 크기 개념도 감각적인 대상으로부터 추상화를 통해 얻어진다.

또한, 수와 관련하여 아리스토텔레스는 단위가 수를 파생시키는 최초 원리로서 그 존재가 가정되어야 한다고 보고 있으며, 이산적인 수와 연속적인 크기를 구분해야 한다고 본다. 셀 수 있는 양은 '다수성(plurality)'이고, 측정할 수 있는 양은 '크기(magnitude)'라는 것이다[11, p. 184]. 그 구분의 근거는 가분성으로서 유한한 단계로 나누어지는 양이 이산성을 특징으로 하는 수이며, 무한히 나누어지는 양이 연속성을 특징으로 하는 크기이다. 그러므로 수는 이산적인 것에 한정된다.

라. 유클리드

유클리드는 아리스토텔레스의 영향을 받아 양을 이산적인 것과 연속적인 것을 구분하고 이산적인 수는 산술과, 연속적인 크기는 기하학과 관련되는 것으로 간주하였다.[3] 그는 원론에서 단위와 수 개념을 정의의 형식으로 제시하고 있는데 구체적으로 수 개념이 정의되기는 원론이 처음이다. 유클리드가 원론 Ⅶ권에서 제시하고 있는 단위와 수에 대한 정의는 각각 다음과 같다.

- 정의 1 : 단위는 존재하는 사물들 각각을 하나라고 부르게 하는 것이다.
- 정의 2 : 수는 단위들로 이루어진 다수이다.

위의 정의에 따르면, 수는 개별적이고 구체적이며 불가분한 대상들의 모임이다. 그리고 단위는 수를 발생시키는 원리로서 사물의 단수성(singularity)과 관련된 특징을 추상하여 나온 개념이다. 그러므로 수는 이산적인 집합에만 적용되며, 단위의 불가분성은 이산적인 양의 본질이다.

유클리드의 수 개념 정의의 가장 특징적인 것 중의 하나는 일(단위)이 수로 간주되지 않는다는 것이다.[4] 또한 유클리드는 집합과 그 집합에 포함되는 대상들을 정의하지 않고 출발점으로 삼고 있으며, 수를 단위들의 집합으로 정의하였다. 하지만 단위의 본성에 대해서는 엄밀하게 규정하지 않음으로써 원론에 제시된 수는 직접적인 의미에서 물리적인 것과 추상화되는 것 모두의 범위에 걸쳐 있다[6, p. 14]. 유클리드는 그 당시까지 이루어진 수학적인 업적을 집대성하면서 체계로서의 수학을 정립하고자 하였던 만큼, 단위와 수에 대한 정의 역시 산술을 좀더 체계적으로 설명하고자 하는 의도를 담고 있었다고 할 수 있다.

(2) 근세

중세는 수에 관한 중요한 주장이 제기되지 않았으며, 호기심과 모호성을 특징으로 하는 수점술이 수 지식을 휩쓸었을 정도로 수학적으로 암흑기였다. 중세 이후 초기 교과서가 등장하던 시기에는 유클리드적인 전통에서 수가 단위들의 집합이라는 정의가 가장 일반적으로 사용되었다. 그리고 단위에도 많은 관심이 주어졌는데, 주로 단위는 수와 측정의 시작, 수의 기원이지만 수는 아니라는 견해가 지배적이었다. 또한 그 당시에는 양을 설명하고 수와 관련짓고자 하는 시도가 있었는데 주로 수는 이산적인 양에 제한되었다[6, pp. 20-26]. 이러한 단위, 수, 양에 대한 설명은 그리스적인 것이었

3) 실제로 원론의 Ⅰ권~Ⅶ권, Ⅺ권~ⅩⅢ 권은 기하학을, Ⅶ권~Ⅸ권은 산술을 다루며, Ⅹ권에서만 수와 크기라는 용어가 함께 나온다[11, p. 184].

4) 역사적으로 수에 대한 유클리드의 정의는 뉴턴의 정의와 함께 가장 보편적으로 사용되었다[5, p. 72]. 다만 유클리드가 단위를 수로 인정하지 않은 점을 수정하여 "수는 단위 또는 단위들의 모임이다."를 수에 대한 보편적인 정의로 사용하였다.

다. 스테빈(Stevin) 이후 그리스적인 관점이 도전을 받으면서 수 개념에도 큰 전환이 이루어졌다.

가. 스테빈

스테빈이 수에 대한 관점에 획기적인 전환을 가져오게 된 것은 측정이라는 실용적인 문제를 설명하고자 한 데에서 비롯된 것이다. 스테빈은 실제적인 관점과 인식론적인 관점에서 그리스적인 관점에 도전하고 있다[11, p. 184]. 먼저, 그는 산술론(L'Arithmetique) 제1권에서 다음과 같은 정의를 제시한다.

- 정의 1 : 산술은 수에 관한 학문이다.
- 정의 2 : 수는 각 사물의 양이 설명되는 것이다.

스테빈은 "단위는 설명하고자 하는 사물의 양이 '하나'라고 말할 수 있게 하는 수이며, '이'는 그것이 '이'라고 불리게 하는 것이다. '이분의 일'은 그것이 '이분의 일'이라고 불리게 하는 것이다."[13, p. 494 재인용]라고 하여, 수는 각 사물의 양을 설명하는 수단이며, 단위도 수라고 말하고 있다. 그리고 "부분은 전체와 같은 내용(본질)으로 되어 있으며, 단위는 단위들의 multitude(집합)의 부분이므로, 단위는 단위의 multitude와 같은 본질이며, 단위들의 multitude의 본질은 수이므로, 단위의 본질은 수이다"[13, pp. 495-496]와 같은 삼단논법을 통해 단위가 수라는 것을 설득력 있게 주장하고 있다.

한편, 스테빈은 수를 이산적인 양에 제한하여 설명하고자 한 기존의 관점에 대해 새로운 입장을 제시한다. 그에 따르면, 수는 각각의 사물의 양적인 측면이 드러나게 하는 것으로, 이산적인 것과 연속적인 것의 구분은 존재론적 범주에 속한 것이 아니라, 양화되는 대상의 부수적인 성질일 뿐이다[11, p. 186]. 예컨대, 개 1마리에서 수 1은 이산적이지만, 1미터라고 할 때 수 1은 연속적인 것이다. 스테빈은 연속적인 양에 수의 성질을 부여하고, 수에 연속성을 부여하여 크기와 수를 동일시하였다. 그의 수 개념은 대상의 양적인 측면을 설명하는 것으로, 측정의 실제를 일반화하여 구성한 것이다. 이러한 스테빈의 관점은 실제적인 필요가 동기가 되어 얻어진 개념으로 이론적인 수학과 응용수학 사이의 경계를 사라지게 하였다[11, p. 187].

나. 뉴턴

뉴턴(Newton)은 자신의 많은 다른 수학적 연구에 비해 산술에 관한 아이디어를 덜 중요한 것으로 보았지만, 실제로 그의 수 개념은 역사적으로 가장 보편적으로 사용된 것 중의 하나이며 특히 1900년 경 많은 교과서에서 채택되었다. 그는 수를 단위들의 개수라기보다 '어떤 양에 대하여 같은 종류의 다른 어떤 양에 의해 추상화된 비'라고

정의한다[6, p. 43 재인용]. 이 정의에 따르면, 수는 사물들의 비교로부터 유도되는 순수한 추상물이다. 이산적인 양에서는 개개의 사물들 중의 하나가 비교를 위한 단위가 되며, 연속적인 양에서는 고려되고 있는 양의 한정된 부분이 단위가 된다. 수에 대한 뉴턴의 정의는 주로 후자의 경우에 초점을 둔 것이라고 할 수 있다. 연속적인 양의 경우 자연적인 단위가 존재하지 않고, 양의 한정된 부분이 측정 단위가 되며, 양은 표준으로 상정한 단위와 비교함으로써 평가되게 된다[5, 72]. 수를 두 양 사이의 비로 정의하면, 수는 자연수, 분수, 무리수라고 하는 세 가지 층을 이루게 된다. 측정되는 양이 단위를 정확하게 몇 배 포함하면 자연수가 되고, 측정되는 양이 측도의 약수 부분이면 분수가 되고, 단위와 측정되는 양 사이의 공통 측도가 존재하지 않으면 무리수가 된다.

다. 칸트

칸트(Kant)는 철학자로서 수 개념을 자신의 철학적 관점에 따라 설명하고 있다. 칸트에 따르면, 인간이 외부 세계로부터 감각을 받아들이지만, 감각이나 지각 자체로부터 지식(개념)을 얻는 것이 아니라, 주체와 대상 사이의 상호 작용을 통해 정신이 지식을 구성한다. 그리고 정신이 지각을 구성한다고 할 때, 이 구성은 공간과 시간에 대한 직관 때문에 가능하다. 칸트의 수 개념은 시간에 대한 직관과 깊이 관련되어 있다. 그에 따르면, 양의 순수한 스키마는 수, 곧 하나에 하나를 연속적으로 더해가는 것을 파악하는 표상이다. 그러므로 칸트에게 있어 수는 직관 속에서, 시간을 발생시킴으로써 다면적인 것을 종합한 단일체이다[6, pp. 47-48].

라. 가우스

가우스는 수를 설명하려는 철학적인 시도에 대해 의구심을 가졌다. 그는 수학자적 관점에서 수를 양(크기)과 관련지어 설명하고자 하였다. 그에 의하면, 수학의 주제는 부분을 생각할 수 있는 모든 광범위한 양과, 그것에 의존하지만 물질적인 양과는 독립적인 양을 포함한다. 수 개념도 양과 관련하여 설명된다. 산술에서 모든 양은 기지의 양(단위)을 몇 번이나 반복하는지 또는 단위와 같은 양이 되기 위해서는 그것의 약수 부분을 몇 번이나 포함하고 있는지에 의해 결정된다.

(3) 현대 수리철학

19세기 마지막 사반세기는 수학사를 현대로 구분하는 하나의 분기점이 되었는데, 특히 음수와 복소수 등이 발달하면서 자연수와 분수 중심의 수 체계가 확장되게 되었다. 자연수 개념에 대한 논의 역시 이 시기의 중요한 이슈였다. 바이어슈트라스(Weierstrass)와 데데킨트(Dedekind)에 의해 실수를 자연수에서 단계적으로 도출할 수

있다는 것이 증명되어 수에 대한 이해가 자연수에 대한 이해로 돌아가게 되었다[9, p. 517]. 수학적 진리의 근거를 밝히고자 하는 수학기초론의 확립을 위해 등장한 직관주의, 논리주의, 형식주의는 자연수에 관한 입장을 각각 제시하였다.

가. 데데킨트, 페아노

수리철학적 논의가 본격화되기 이전에도 위와 같은 수학사적인 배경 하에서 수를 설명하고자 하는 시도가 있었다. 1887년에 수의 본질과 의미에 관한 데데킨트의 논문과 그의 이론을 바탕으로 자연수가 갖는 특성을 찾아내어 공리로 제시한 페아노(Peano)의 이론이 그것이다. 데데킨트와 페아노는 모두 자연수가 수열을 형성한다는 사실과 그것이 어떤 유한 혹은 단순 무한수열에 있는 항을 표현하는데 사용될 수 있다는 사실에 호소함으로써 수 개념을 정의하고 있다[4, p. 54]. 다시 말해, 자연수 체계의 가장 현저한 특징이 순서 짓기에 있다고 보고 서수적인 의미에서 자연수를 설명하고자 한 것이다.

데데킨트는 자연수 전체의 집합이 하나의 기본 원소와 하나의 대응 사상에 의해 차례로 얻어지는 사상의 상 전체라고 설명한다. 페아노는 그 중에서 자연수의 계열만이 만족하는 특성을 찾아내어 '0', '자연수'(음이 아닌 정수), '~의 후자'라는 세 가지 무정의 용어와 다섯 가지 공리로 제시하였다.

1. 1은 자연수이다.
2. x가 어떠한 자연수라면, x의 후자도 자연수이다.
3. x와 y가 자연수이고 동일한 후자를 갖는다면, x와 y는 동일한 자연수이다.
4. 1은 어떠한 자연수의 후자도 아니다.
5. 1을 포함하고 그 집합에 속하는 수의 후자를 포함한다면, 그 집합은 자연수를 포함한다.(수학적 귀납법의 원리)

페아노의 관점은 자연수의 본질적인 속성은 어떤 대상물에서 출발해서 바로 다음의 것, 그리고 그것의 바로 다음의 것이라는 과정을 무한히 계속해나갈 때 나타나는 것임을 말해준다. 다섯 가지 공리는 '그 다음', '무한히 계속 한다'와 같은 직관적인 개념을 논리적인 엄밀성에서 정리한 것이다[3, p. 102]. 데데킨트와 페아노의 수 개념은 개별적인 수의 의미보다 전체로서의 자연수에 대해 참이 되는 생성적 속성을 강조한다는 점에서 원자론적이라기보다는 총체적이다[4, p. 63].

나. 직관주의

직관주의자들은 수학이 논리로 환원된다거나 단순히 무의미한 기호를 사용하는 게임이라는 관점을 부정한다[4, p. 94]. 수학은 유의미한 개념을 다루며, 수학적 개념이

나 대상은 수학에 관해 생각하는 정신과 독립해서 존재하는 것이 아니라 정신활동에 의해 얻어지는 것이라고 본다. 따라서 개념을 끌어내는 직관이야말로 수학의 가장 근원적인 기초가 된다[3, p. 37].

직관주의자의 한 사람인 크로네커(Kronecker)는 수에 대한 자신의 관점을 "정수는 신이 만들고 그 밖의 모든 것은 인간의 작품이다."라는 말로 표현한다. 자연수는 신이 부여한 것이며, 인간의 이해를 넘는 것으로 수용한다는 것은 직관에 의해 자명한 것으로 받아들인다는 것이다. 그는 집합론에 기초한 논리적 도입 방법은 정수를 직접 받아들이는 것보다 더욱 믿을 수 없으며, 오히려 정수는 직관적으로 분명하여 소위 더 안전한 기초를 필요로 하지 않는다고 보았다.

푸앵카레(Poincaré) 역시 크로네커와 마찬가지로 직관이 어떤 공리적 구조에 선행하기 때문에 자연수를 정의하거나 공리적 기초에서 자연수의 성질을 구성할 필요가 없다고 본다. 그는 기호를 이용하여 수를 정의하는 논리학파의 접근법이 선결문제 요구의 오류를 포함한다는 점에서 반대하였다[12, p. 158].[5] 그가 보기에 수는 직관에 의해 파악되는 것이지 정의할 수 있는 것이 아니다.

직관주의 수리철학의 창시자인 브로우베르(Brouwer)는 자연수 전체라는 하나의 무한 집합은 허구라고 보아 인정하지 않았으며, 그러한 집합의 존재성은 논증될 성질의 것이 아니라고 보았다. 다만 무한한 과정으로서의 자연수의 계열 1, 2, 3, ...은 수학의 가장 기본적인 존재로 인정하였다. 그에게 있어 자연수 전체는 생성되어지는 것이지 존재하는 것이 아니다[3, p. 42].

다. 논리주의

논리주의는 수학의 모든 개념을 논리학 안에서 정의하고, 순수 논리학적인 증명방법과 논리학의 기본 원리로 모든 순수 수학의 정리를 증명하고자 하였다. 수 개념에 대한 정의 역시 그러한 맥락에서 설명된다. 논리주의를 대표하는 프레게(Frege)와 러셀(Russell)은 집합, 즉 류에 관한 이론을 지지하는 논리적 구조를 구성하고자 하였다. 칸토어(Cantor) 역시 집합을 중심으로 수 개념을 정의하였지만, 그것은 논리주의적 관점과는 약간의 거리가 있다. 칸토어는 집합의 농도, 동치 관계에 의해 수 개념을 정의한다. 두 집합의 대등성을 일대일 대응 관계에 의해 정의하고, 수를 대등한 집합의 공통 성질로 정의한다. 이는 자연수를 내포적으로 정의한 것이다. 칸토어는 수를 집합에 기초하여 정의하지만 물리적인 집합뿐 아니라 직관이나 사고와 같은 심리학과 분리하여 수를 생각하지 않았다[6, p. 360]. 이와 대조적으로 프레게와 러셀과 같은 논리주의자들은 심리학의 결함을 제거하고 철저하게 논리적으로 수를 설명하고자 하였다.

5) 부랄리-포르티(Burali-Forti)는 0을 공집합의 원소의 개수로 정의하는데, 공집합 자체가 원소를 가지지 않은 집합이라는 점에서 정의하는데, 이는 피정의항이 정의항에 이미 포함되어 있다는 것이다[12, p. 158].

프레게는 집합에 직접 수를 부여하기보다는 하나의 수로 규정될 수 있는 집합들을 포괄할 수 있는 '개념'을 가지고 수를 정의한다[3, p. 32]. 0은 '그 외연 속에 어떤 대상도 속하지 않은' 이라는 개념의 외연이다. '0과 동일한'이라는 개념에는 딱 하나의 대상, 즉 수 0이 해당한다. 그러므로 '0과 동일한'이라는 개념에 속하는 수가 1이다.

프레게와 달리 러셀은 수를 집합(류)에 의해 진술하고 있지만, 이는 표면적인 것일 뿐 수의 본질에 관해서는 의견을 같이 하고 있다고 할 수 있다. 그는 칸토어의 대등성 개념과 유사하게 두 집합 사이의 일대일 대응관계를 기초로 수를 정의한다. 주어진 집합 M의 기수는 'M과 대등한 모든 집합의 집합'으로 정의된다. 프레게와 러셀의 자연수 개념은 칸토어에 의한 내포적 개념 정의와 대비되는 외연적 개념 정의라고 할 수 있다.

라. 형식주의

형식주의는 고전수학을 공리체계로 구성하고 그것의 무모순성을 직접 증명하고자, 수학을 의미 없는 기호에 의해 형식화된 체계에 불과하다고 보고, 기호가 가지는 어떤 물리적인 의미를 찾기보다는 체계의 내적 일관성에 관심을 두었다. 그러므로 수에 대한 물리적, 심리적 기초를 거부한다.

형식주의자인 힐베르트(Hilbert)는 "산술에서, 우리는 다음과 같은 수의 기호를 갖는다. 1, 11, 111, 1111. 직관적 통찰에 의하면 각 기호는 1의 연속으로 형성되는 독특한 특징을 갖는다. 우리의 연구 대상인 수의 기호들은 그 자체로는 어떠한 의미도 가지지 않는다."[6, p. 382 재인용]라고 말한다. 자연수는 하나의 특정 기호인 것이며, 수를 기호로 정의한다는 것은 수에 어떤 일정한 의미를 부여하지 않는다는 것이다. 그러므로 이들에게 수학적 대상의 진리성이나 의미, 존재성에 관한 문제가 아무런 의미를 갖지 못한다.

2. 자연수 개념의 역사에 나타난 특징 분석

앞에서는 자연수 개념에 대하여 역사적으로 어떤 논의가 있어왔는지 살펴보았다. 여기서는 앞서의 논의를 토대로 자연수 개념의 역사적 전개에 나타난 특징을 분석해 보고자 한다. 자연수 개념의 역사는 다음과 같은 특징을 보여주고 있다.

첫째, 자연수 개념은 단선적인 발달을 통해 완성된 개념이 아니라 다양한 해석이 주어진 것임을 알 수 있다. 이는 자연수 개념이 원시 시대부터 암묵적인 형태로라도 존재하였으며, 어린 아동에게도 자연수에 대한 원시적인 관념이 존재할 정도로 너무나 기초적인 개념이라는 데에 연유한다. 앞에서 살펴본 바와 같이, 고대 그리스 시대

에는 주로 철학적인 설명에 관심을 가졌으며, 실제로 각 학자들은 수학적인 대상, 수 개념을 자신들의 철학적 입장에 기초하여 설명하고 있다. 이 시기에 수는 만물의 근원으로 설명되기도 하였으며(피타고라스), 이데아의 세계에 존재하는 실재로(플라톤), 구체적인 사물로부터 추상되는 것으로(아리스토텔레스), 단위들의 집합으로(유클리드) 설명되기도 하였다. 중세를 지나 근세에는 측정 과정에서 양적인 측면을 드러내는 수단으로서의 의미, 두 양 사이의 비, 시간에 대한 직관에 의해 파악되는 개념으로 이해되었으며, 현대에 이르러서는 직관과 기호에 의해 설명되기도 하고 집합과 논리에 의해 기수와 서수의 의미가 부여되기도 하였다.

그렇다고 자연수 개념의 역사가 발달이라는 측면에서 전혀 설명될 수 없는 것은 아니다. 명백히 유클리드의 정의에서는 단위가 수로 인정되지 않았지만, 스테빈에 이르러서는 단위가 수라는 것을 입증하고자 하는 노력이 있었다는 점, 또 이산적인 양과 연속적인 양 사이의 명확한 구분을 없애고 대상의 양적인 측면을 설명하는 것으로 수를 설명하고자 한 것은 기존의 관점을 비판하여 발전시킨 것이라고 할 수 있다.

둘째, 역사적으로 자연수 개념에 관한 논의는 단위 및 이산량과 연속량 사이의 관계 문제라고 할 만큼 그에 관한 논의가 활발하게 이루어졌음을 알 수 있다. 그리스 시대부터 현대 이전까지 단위 및 이산량과 연속량 사이의 관계 문제는 끊임없는 논의의 대상이었으며, 그 만큼 수 개념과 관련하여 중요한 위치를 차지하였다. 단위를 어떻게 보는가 하는 문제는 이산량과 연속량 사이의 관계 문제와도 밀접한 관계가 있다. 단위를 소위 '자연적인' 단위로 한정하여 생각할 경우, 수는 주로 이산적인 양을 설명하는 것과 관련된다. 그러나 단위를 소위 '인위적인' 단위로 확장하여 사용할 경우, 수는 연속적인 양을 설명하는 데에로 확장된다.

아리스토텔레스로부터 시작된 이산량과 연속량의 구분은 유클리드에게로 이어졌고, 유클리드는 수를 단위들의 집합으로 정의하였는데, 이때 단위는 자연적인 단위로 분할을 생각할 수 없는 것이었다. 그 결과 수는 유한한 단계까지만 나누어지는 이산량에만 적용 가능한 것으로 보게 되었다. 하지만 단위가 분할이 가능한 것으로 간주되기 시작하면서는 이산량과 연속량 사이의 관계에 대해서도 새로운 관점이 제기되게 된 것을 알 수 있었다. 스테빈은 단위가 분할 가능한 것이며, 이산량과 연속량의 구분은 양화되는 대상에 따른 부수적인 것일 뿐이라는 관점을 제기하여 단위 및 이산량과 연속량 사이의 관계 문제에 획기적인 전환을 가져왔다. 스테빈뿐만 아니라 뉴턴, 가우스 등은 수를 양의 측정 과정 속에서 양적인 측면을 드러내는 수단으로 이해함으로써 관계나 비에 의해 수를 혁신적으로 정의할 수 있었다. 양(연속량)의 측정과 관련하여 수를 이해할 때 단위는 분할 가능한 것이 되며, 이산량과 연속량의 구분은 더 이상 절대적인 것이 아니라 양화되는 대상에 따른 부수적인 것이 된다. 한편, 현대 수리철학에 이르면 수를 양과 다시 분리하여 순수학적인 방법으로 수를 규정하고자 시도하고 있다.

셋째, 역사적으로 제시되어온 자연수 개념은 각 시대의 관심사를 그대로 반영하고 있음을 알 수 있다. 앞에서 구분한 그리스, 근세, 현대는 각각 철학자적 관점, 수학자적 관점, 수리철학자적 관점으로 대변된다고 할 수 있다.

그리스의 수에 대한 설명은 주로 철학자의 관점에서 수 개념의 본질을 밝히는 데 있었다고 할 수 있다. 고대 그리스를 중심으로 이루어진 수에 관한 논의들은 주로 '수는 무엇인가?'라는 질문을 '수는 어디에서 나왔는가?'라는 의미로 해석하고 있다. 그들은 수의 존재론적 근거를 밝히는데 관심을 가졌기 때문에, 실세계 및 그 안에서의 특정한 활동과 수 사이의 관계를 설명해 줄 수 있는 크기 개념을 수와 철저하게 구분하여 사용하였다. 피타고라스와 플라톤의 경우 수를 실재론적 입장에서 규정하고 있다. 수는 인간의 정신과 독립적으로 구체물의 실재성과 같은 의미로 존재한다는 것이다. 플라톤은 이러한 입장을 철학적으로 뒷받침하고 있다. 아리스토텔레스는 수가 실재하는 것이지만 독립된 이데아의 세계에 실재하는 것이 아니라 구체적인 사물 안에 존재한다고 본 점에서 플라톤과 구분된다. 그에 의하면, 수는 이데아의 세계에 실재하는 수를 발견하는 것이 아니라 대상에 대한 감각작용을 통한 추상화에 의해 수 개념을 얻는 것이다. 그러므로 수 개념에 대한 아리스토텔레스의 입장은 사물이나 정신과 독립적인 실재를 인정하지 않는다는 점에서 플라톤적 실재론과는 거리가 있지만, 사물 속에 실재(형식) 가 존재한다고 봄으로써 넓게는 실재론적 입장에 속한다고 할 수 있다.

[6]에서는 수 개념을 범주화하는 한 가지 방법으로 '물리적인 수', '추상화되는 수', '추상적인 수'를 들고 있다.[6] 이에 비추어 본다면, 피타고라스는 수를 있는 그대로의 모든 것, 절대적이고 환원 불가능한 것으로 설명한다는 점에서 추상적인 수로 보고 있다고 할 수 있다. 플라톤에게 있어 수 개념 역시 정신이나 다른 모든 물질과 독립적으로 존재한다는 점에서 그 자체로 추상적인 것이다. 반면, 질료와 형식에 의해 추상화 과정을 설명한 아리스토텔레스의 관점에서는 수가 감각적 대상으로부터의 추상화를 통해 얻어진다는 점에서 추상화되는 수이다. 유클리드는 아리스토텔레스의 관점에 많은 영향을 받았으며, 수를 개별적이고 구체적이며 불가분한 대상들의 모임으로 정의한다는 점에서 아리스토텔레스와 같이 추상화되는 수로 보고 있다고 할 수 있다.

근세의 수에 대한 설명은 주로 수학자의 관점이라고 할 수 있다. 근세에도 단위에 대한 철학적인 논쟁이 있었으며, 수가 자연적으로 주어진 본유적인 것이냐 아니면 백지 상태의 마음에 개념을 새겨나가는 가운데 획득되는 것이냐 하는 논의가 철학자들

6) 수가 물리적이라는 관점은 물리적인 사물들이 단위가 된 집합으로 정의되는 것으로, 페니에 대한 니켈의 가치가 5라는 것이 그 예가 된다. 수가 추상화된다는 것은 물리적인 것과 관련되지만 그것으로부터 추상화된 것을 말한다. 추상적인 수는 물리적 세계에 적용된다 하더라도 수 자체는 그와 다른 것으로부터 발생하며, 논리적으로 형식화된 체계 내에서 정의되는 수와 개인 안에 본유적인 수가 이에 해당한다.

사이에서 끊임없이 제기되었다. 그러나 무엇보다도 근세를 특징짓는 것은 수 개념에 대한 철학적인 설명과는 다른 수학자의 관점에서 수 개념에 대한 다양한 주장이 제기되었다는 점이다. 이는 철학적인 입장에서 수학적인 대상의 연구에 접근한 사람들보다는 수학적 탐구의 맥락에서 제시한 수학적 관점이 점점 더 세력을 얻었기 때문이라고 할 수 있다. 그리고 이는 당시의 사회적 배경과도 밀접한 관련이 있다. 당시에는 정치 · 경제 · 사회적 발전으로 말미암아 수학적 활동이 활발하게 일어났으며, 실용적인 측면에서 수학을 이해하였다. 근세에 수학을 연구한 학자들은 철학자라기보다는 과학자였으며, 그들은 주로 수학을 자연 현상을 설명하는 하나의 도구로 삼고자 하였다. 그들은 실용적인 문제에 관심을 갖고 수를 실제와 밀접한 관련 속에서 설명하고자 하였다. 그리고 그것은 단위 및 이산량과 연속량의 구분의 문제를 다루는 관점이 그리스 시대와 확연히 달라진 데에서도 나타나고 있다. 그리스 시대에는 수를 주로 이산량에 한정하여 연속량과 관련된 크기 개념과 구분하였던 반면, 근세에는 이러한 구분이 폐지되었기 때문에, 수는 주로 측정 과정에서 사물의 양을 설명하는 비 또는 관계로 설명되었다. 수가 물리적 대상 자체의 속성이 아니라 물리적 대상을 다루는 활동과 관련하여 설명된 것이다.

현대의 수에 대한 설명은 수리철학자의 관점에서 수학적 진리의 근거를 찾는 시도가 주를 이룬다. 그리고 자연수에 관한 상이한 입장이 수리철학의 세 가지 분파로 나타났다. 수리철학의 세 학파는 다시 수를 양으로부터 완전히 독립시켜 확립하고자 했다는 공통점이 있다. 양과 독립하여 논리학이나 직관에만 기초하여 순전히 수학적으로 수를 규정하려고 한 것이다. 직관주의는 고대 그리스의 피타고라스의 연장선상에서 수 개념에 대한 수학적, 논리적, 심리학적 분석을 거부하면서 수 개념을 직관에 의해 파악되는 것으로 설명한다. 형식주의는 수학을 형식적인 학문으로 간주하기 때문에 수 개념에 대해서도 어떤 의미를 찾는 것을 거부하고 순수한 기호에 의지하여 설명한다. 수 개념에 대한 가장 활발한 논의를 벌인 것은 논리주의이다. 이들은 집합과 논리라는 더 원초적인 개념에 의해 자연수에 대한 형식적인 정의를 구성하고자 하였다. 논리주의의 입장은 수학의 기초를 가능한 한 가장 심오한 수준까지 밀어붙이려는 노력에서 자연스럽게 나타난 것이다.

이처럼 수 개념의 역사적 전개는 수학에 대한 각 시대의 접근 방식과 밀접하게 관련된다는 것을 확인할 수 있다.

3. 나오는 말

본 논문에서는 자연수 이해의 중요성에 비추어 볼 때 자연수에 대한 풍부한 이해가 요구된다는 데에서 출발하였다. 특정 개념의 역사는 그 개념에 대한 이해를 풍부하게

해주고 그 주제를 넓은 관점에서 볼 수 있게 해준다고 할 때, 자연수의 역사를 고찰하는 것은 중요한 의미를 가진다. 그리하여 본 연구에서는 자연수 개념이 역사적으로 전개되어 온 양상을 개관하고, 거기에 나타난 몇 가지 특징을 분석하였다.

본 연구에 따르면, 자연수 개념의 역사는 단선적인 발달보다는 다양한 해석이 부여되어 온 것이다. 또한 자연수 개념에 관한 역사적 논의를 살펴볼 때, 단위 및 이산량과 연속량 사이의 관계 문제는 중요한 중심 이슈가 되었다는 것을 알 수 있다. 단위를 수로 인정할 것인가 인정하지 않을 것인가 하는 문제에서부터 단위를 이산적인 양에 한정하여 생각할 것인가 연속적인 양으로 확장하여 볼 것인가 하는 문제에 이르기까지 단위 및 이산량과 연속량의 문제는 역사적으로 활발히 논의되었음을 알 수 있다. 마지막으로, 본 연구에 따르면, 역사적으로 제시되어온 자연수 개념은 각 시대의 관심사를 그대로 반영하고 있음을 알 수 있다. 본 연구에서 구분한 그리스, 근세, 현대는 각각 철학자적 관점, 수학자적 관점, 수리철학자적 관점으로 대변되었다.

고대 그리스로부터 현대의 수리철학에 이르기까지 자연수 개념에 대한 논의가 어떤 방식으로 전개되어왔는지 보여준 본 연구는 역사적 관점에서 자연수에 대한 이해를 풍부하게 해주며, 차후 수 개념을 바라보는 안목을 가지게 한다는 점에서 중요한 의의를 찾을 수 있을 것이다.

참고 문헌

1. 우정호, 학교수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교 출판부, 1998.
2. 임재훈, 플라톤의 수학교육 철학 연구, 서울대학교 대학원 박사학위 논문, 1998.
3. 임정대, 수학기초론의 이해, 청문각, 2003.
4. Brainerd, C.J./유승구 역, 수 개념의 기원(*The Origin of Number Concept*, 1979), 성원사, 1991.
5. Brooks, E., *The Philosophy of Arithmetic*, Philadelphia: Normal Publishing Company, 1904.
6. Clason, R., *Number Concepts in Arithmetic Texts of the United States from 1880 to 1966, with Related Psychological and Mathematical Developments*, Unpublished doctoral dissertation, The University of Michigan, 1968.
7. Damerow, P., "Number as a second-order concept," *Science in Context* 9(1996), 139-149.
8. Englund, K.R. · Nissen, J.H., "The first representations of numbers and the development of the number concept," *Boston Studies in the Philosophy of Science* 175(1995), 275-297.

9. Eves, H./이우영 · 신항균 역, 수학사(*An Introduction to the History of Mathematics*, 1953), 경문사, 1998.
10. Heath, L.T., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, translated from the texts of Heiberg with introduction and commentary, vol. 2. New York: Dover Publications, Inc, 1956.
11. Moreno-Armella, E.L. · Waldegg, G., "An epistemological history of number and variation," in V.J. Katz ed., *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective*, The Mathematical Association of America, 2000.
12. Poincaré, H., *Science and Method*, New York: Dover Publications, Inc, 1958.
13. Stevin, S., "L'arithmetique," in D.J. Struik ed., *The Principal Works of Simon Stevin*, Amsterdam: C.V. Swets & Zeitlinger, 1958.
14. Struik, J.D., *The Principal Works of Simon Stevin*, Amsterdam: C.V. Swets & Zeitlinger, 1958.

An Analytic Study on the History of Natural Number Concept

Graduate School, Seoul National University **Jung-Hwa Ko**

Natural numbers have not yet been studied adequately on the aspect of its historical development in spite of its mathematical and educational importance. This article studied the historical development of natural number concept, that is, its historical meaning in the mathematical development process and influence of cultural and social element in relation with way of understanding number. From these examinations, we identified some characteristics in the history of natural number concept.

Key words: natural number, history of natural number, unit, number and quantity

2000 Mathematics Subject Classification: 97-03, ZDM Subject Classification: A32

논문 접수: 2005년 2월 11일, 심사 완료: 2005년 3월