한국수학사학회지 제18권 제2호(2005년 5월), 1-8

호프의 삶과 업적에 대하여*

인하대학교 수학과 고관석
ksko@inha.ac.kr

본 논문의 목적은 호프의 삶과 업적을 수학사적인 관점에서 조명하는 데 있다. 호프는 리만 다양체의 곡률과 위상의 관련성을 주목한 선각자이다. 곡률의 부호가 다양체의 국소적 성질과 대역적 성질을 연결하는 고리임을 알고 이에 대해 연구하였고 이와 관련된 예상문제들을 발표하여 기하학의 발전에 기여하였다. 이 논문에서는 호프 이전의 미분 기하학과 호프의 생애와 업적을 살펴보기로 한다.

주제어 : 호프, 곡률, 위상

0. 서론

기원전 6세기 이후 고대 그리스의 수학은 만물의 근원이 무엇인가 하는 철학적 문제와 자연 현상을 설명하기 위한 보편적이고도 체계적인 설명을 위하여 엄밀한 수학에 기초한 증명을 중요하게 생각하였다. 수학자이자 서양 철학의 원조라 일컬어지고 피타고라스의 정리로 유명한 피타고라스로부터 시작한 기하학의 전통은 기원전 3세기경 유클리드에 의하여 원론(Elements)이라는 책을 저술하게 하였으며 그 책에는 그동안 그리스에서 연구한 연구 결과들이 소개되었다[1].

특히 평행선의 존재 대한 문제는 그 후 2000년 동안 수학자들과 지식인을 괴롭혀온 문제중의 하나이고 이를 해결하기 위하여 많은 시도를 하면서 기하학의 많은 결과들이 얻어지게 되었다. 지금의 용어로 평행선의 문제를 풀어쓰면 2차원 공간의 직선(또는 측지선)이 있고 이를 지나지 않은 점이 있을 때 이 점을 지나는 평행선이 얼마나 있을까 하는 문제이다.

이 문제는 거의 2000년 동안 실패를 거듭한 끝에 결국 1829년 러시아의 수학자 로바체프스키(Lobachevsky)와 1832년 헝가리 수학자 볼리아이(Bolyai)에 의해 서로 독립적으로 해결되었다. 그들은 평행선이 오직 한 개 존재하는 유클리드 기하학과는 다른 비유클리드 기하학 중의 하나인 쌍곡 기하학이 만들어졌고 거기에서는 평행선이 무한히 존재함을 보였다. 또, 1854년 스물 여덟 살의 리만(Riemann)에 의하여 평행선

* 이 논문은 인하대학교 교수 연구 진흥비에 의하여 지원되었다.

이 존재하지 않은 구면 기하학이 제시되었다.

더욱 놀라운 사실은 이들 기하학은 1827년에 가우스가 이미 제시한 가우스 곡률에 의하여 결정되고 가우스 공식으로 설명할 수 있다는 데 있다. 유클리드 기하학은 곡률이 0인 2차원 유클리드 평면의 기하학이고 구면 기하학은 곡률이 1(또는 양의 상수)인 2차원 구면의 기하학이며 쌍곡 기하학은 곡률이 −1(또는 음의 상수)인 2차원 쌍곡 상반평면(또는 단위원반)의 기하학이다. 결국 곡률의 부호에 의하여 기하학이 결정되는 것이다.

리만은 고차원에서도 가우스 곡률의 개념을 확장하여 단면 곡률(sectional curvature)을 정의할 수 있는데 이 단면 곡률의 부호의 중요성을 처음으로 인식하여 1932년 곡률과 위상과의 문제를 공식적으로 제기한 사람이 호프(Heinz Hopf)이다. 대부분 그를 위상 수학자로만 여기지만 미분 기하학의 대역적 구조를 밝히는데 뛰어난 업적을 남겼다. 그의 업적을 조명하고 그가 제기한 문제를 간략하게 살펴보기로 하자.

1. 호프 이전의 미분 기하학

오늘날 미분 기하학적 관점에서 보면 리만 다양체의 곡률과 위상과의 관계를 연구하는 것은 매우 자연스러운 것이지만, 처음 보기에는 이 두 개념 사이에는 별로 관련성이 없는 것처럼 보인다. 왜냐하면 곡률은 국소적으로 정의되는 것이고 위상적인 성질은 대역적으로 얻어지는 것이기 때문이다. 그러나 곡률과 위상사 이에는 불가분의 관계가 있음은 가우스 · 보네(Gauss-Bonnet)의 정리에서 알 수 있다.

우선 호프 이전의 미분 기하학의 역사를 간략하게 살펴보자. 뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibnitz)가 미분 적분학을 발견한 뒤에 많은 수학자들이 이를 2차원 곡선에 적용하였는데, 미분 기하학의 창시자라고 여겨지는 오일러(Euler)와 몽주(Monge)가 이를 확대하여 곡면으로 확대하였다.

가우스가 1827년 "일반 곡면론"이란 탁월한 논문에서 곡선과 곡면을 다루는 미분 기하학을 개척하였다. 그는 3차원 유클리드 공간에 놓인 곡면을 도형으로서 외부에서 관찰하는 방법 대신 곡면 자체의 독립적인 대상으로 보고 오일러가 도입한 매개 변수 방정식을 곡면에 적용하여 두 개의 좌표를 써서 곡면의 내재적인 성질을 연구했는데, 이는 기하의 역사에 있어 혁명적인 전환점이라 할 수 있다. 그는 미분을 이용하여 곡선과 곡면의 한 점 근방에서 나타나는 성질을 연구했다. 그는 가우스 곡률 K를 곡면에서 실수로의 함수로 정의하였고 이는 곡면이 갖고 있는 내재적인 성질임을 보였다.

그는 유클리드 평면 기하의 기초를 확립하고 확장하는 데 관심을 가졌으며, 특히 평행선에 관한 유클리드의 제5공준이 정말로 필요한 것인가 하는 문제를 고심하였다. 이 문제에 대한 근본적인 의문은 삼각형의 내각의 합에 관한 것이다.

곡면의 면적 요소를 dD, 곡선의 선 요소를 ds라 하고 꼭지점들의 내각이 α, β, γ이고 측지 곡률이 k_g인 세 변 C_1, C_2, C_3들로 이루어진 삼각형 T에 대하여 다음과 같은 가우스 공식을 얻었다.

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{C_i} k_g ds + \int\int_T K dA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

이 국소적 가우스의 정리를 2차원 곡면의 측지 삼각형 T에 적용하면 다음을 얻는다.

$$\int\int_T K dA = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

이는 곡률의 부호와 삼각형의 내각의 합의 관계를 통일적으로 나타내는 공식이 된다.

곡률이 0인 유클리드 평면에서는 삼각형의 내각의 합은 π이고 평행선은 유일함을 의미하고, 곡률이 1인 구면 기하학에서는 삼각형의 내각의 합은 π보다 큼을 뜻하고 평행선은 없음을 의미하며, 곡률이 -1인 쌍곡 기하학에서는 삼각형의 내각의 합은 π보다 적음을 뜻하고 평행선은 무한히 많음을 의미한다. 가우스의 천재성은 곡선의 기하학의 체계적인 연구에 앞서 곡면에 대한 결과를 얻었고 로바체프스키나 볼리아이보다 앞서 그들의 결과를 설명할 수 있는 가우스 공식을 얻은 데 있다.

위에 주어진 국소적 가우스 정리에서 중요한 점은 삼각형이 주어져 있을 때 꼭지점에 대해서는 내각, 변에 대해서는 측지 곡률, 삼각형에 대하여는 가우스 곡률이 대응된다는 데 있다. 고차원에 대한 국소적 가우스 정리의 확장은 아직 알려져 있지 않으며 이의 발견은 기하학의 발전에 중요한 이정표가 될 것이다. 이 정리는 후에 1848년 보네에 의해 완성되는데, 이는 2차원 다양체에 대한 미분 기하학의 결정체라 할 수 있다.

보네는 2차원의 닫혀 있고 방향을 줄 수 있는 다양체 M에서 이러한 삼각형을 모두 합하고 오일러의 수에 대한 다음 공식을 이용하였다.

$$(\text{꼭지점의 개수}) - (\text{변의 개수}) + (\text{삼각형의 개수}) = \chi(M)$$

이를 통해 그는 다음과 같은 유명한 대역적인 가우스·보네 정리를 얻었다.

$$\int\int_M K dA = 2\pi\chi(M)$$

따라서 닫혀 있고 방향을 줄 수 있는 리만 다양체는 오일러의 수에 의해 분류할 수 있다. 가우스·보네 정리의 의미는 미분으로 정의되는 가우스 곡률의 국소적 성질이 적분을 통하여 대역적인 성질인 오일러 수를 결합시킨 데 있다. 이는 곡률과 위상과의 관계에 대해 많은 암시를 준다.

리만은 1854년 괴팅겐 대학의 무급 강사가 되었다. 관례에 따라 대학 강사 자격을 얻기 위해서는 논문을 교수들 앞에서 발표해야 하는데, 가우스는 그의 관심사인 기하학에 대하여 발표해 줄 것을 요청하였다. 리만은 평소에 기하학에 별로 관심이 없었

지만 주어진 기간에 공부를 하여 취임 강연에서 “기하학의 기초를 이루는 가정에 대하여”라는 논문을 가우스와 디리클레(Dirichlet)를 비롯한 교수들 앞에서 발표하였다.

그는 엄격하게 정의하지는 않았지만 다양체라는 개념을 도입하여 가우스의 이론을 곡면을 둘러싸고 있는 공간 개념을 버리면 곡면을 그 자체의 내재적인 성질로부터 유도되는 2차원 다양체의 기하학으로 보고 이를 고차원으로 일반화하여 리만 기하학을 확립하였다. 이 논문은 수학사의 길이 남을 업적으로 간주되고 있다. 그는 당시 로바체프스키와 볼리아이에 의해 만들어진 쌍곡 기하학의 기초를 다지는 데 주력하였고 구면 기하학을 만들어냈다. 고차원의 리만 다양체 M에 리만 계량을 고안하여 거리와 길이를 정의할 수 있게 하였다

쌍곡 평면 $M=\{(x,\ y)\in R^2 \mid x^2+y^2<4\}$의 쌍곡 계량을 구체적으로 다음과 같이 표현하였다.

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{\left(1-\frac{x^2+y^2}{4}\right)^2}$$

그리고 이를 자연스럽게 확장할 수 있음을 보였다.

가우스 곡률을 고차원에서 확장하기 위하여 리만 곡률 텐서를 도입하였고 단면 곡률을 정의하였다. 여기에서 단면 곡률은 다양체의 2차원 접평면들의 모임에서 실수로의 함수인데, 이는 리만 다양체의 내재적인 제일 중요한 불변수로 여겨지고 있다. 리만 곡률 텐서와 단면 곡률(또는 가능한 모든 곡률, 즉 리치 곡률, 스칼라 곡률)과 의 대역적 관계는 현대 기하학의 주된 관심사이며 매우 어려운 과제이다. 대부분 중요한 문제는 여기에서 비롯된다고 해도 틀린 말은 아니다.

웨이첸벡(Weitzenbock, 1885-1955)은 1910년 비엔나 대학에서 학위를 받았고 1923 불변론이라는 저서에 곡률과 위상과의 관계를 규정하는 매우 중요한 공식을 증명하였다. 그의 논문은 찾기가 힘들어서 언제 이 공식이 유도되고 발표되었는지 알 수 없는 것은 매우 유감스러운 일이다. 1946년 보크너(Bochner)는 이 공식을 재발견하였다[4].

2. 호프의 생애와 업적

호프는 1894년 독일 브레슬라우(Breslau) 근처인 그레브첸(Gräbschen)의 유태인 가정에서 태어났다. 브레슬라우는 지금은 폴란드 땅이다. 그는 1901년 브레슬라우에 있는 초등학교에 입학하였다. 재학 시절에 선생이 그의 수학적 재능을 알아보았고, 특히 대수적인 방향에 탁월한 능력을 가졌다고 학생 생활 기록부에 적어 놓았다. 그러나 그의 관심은 공부보다는 수영이나 테니스 같은 데 있어서 학업 성적은 그다지 좋지 않았다. 1913년 실레지안 프리드리히 빌헬름 대학교 수학과에 입학하여 크네서

(Kneser), 슈미트(Schmidt), 스튀름(Sturm), 덴(Dehn)으로부터 수학을 배웠는데, 그 중 슈미트 교수는 평생 그의 수학을 연구하는 데 있어서 나침반이 되었다.

대학 생활은 1914년 1차 세계 대전의 발발로 중단이 되었으며, 군대에 지원하여 서부전선에서 전쟁이 끝날 때까지 복무하였다. 두 번이나 부상당하였고 1918년에는 철십자 제1 무공훈장을 받았다. 2주간의 휴가를 얻어 대학으로 돌아와 슈미트 교수의 집합론을 들으면서 수학의 연구에 뜻을 품게 되었다. 전쟁이 끝난 후 대학에 복학하여 1년 동안 다니다가 슈미트가 그 대학을 떠났기 때문에, 그는 하이델베르크 대학으로 전학하여 3년 동안 페론(Perron) 등으로부터 수학을 배웠다.

1920년 슈미트가 강의하고 있는 베를린 대학 박사 과정에 입학하여 다양체의 위상 수학에 대하여 연구하였으며, 슈미트 교수의 지도를 받아 1925년 "리만 공간의 국소적 미분 기하학적 구조에 대하여"라는 제목의 논문으로 박사 학위를 취득하였다. 그 논문에서 그는 모든 3차원 상수의 곡률을 갖는 리만 다양체는 대역적으로 유클리드 공간, 구면 또는 쌍곡 공간과 등장적임을 증명하였다. 그 당시에는 리군 이론이나 위상 수학이 발전하지 않았기 때문에 리만 기하학은 리만 이래로 다양체의 국소적인 성질의 연구에 한정되어 있었지만, 호프의 경우에는 처음부터 국소적인 구조와 대역적인 구조, 즉 곡률과 위상 사이의 연관성을 규명하는 데 관심이 있었다. 이것은 지도 교수의 훌륭한 점이며 또한 호프의 뛰어난 능력이다. 이 주제는 그의 일관된 연구과제였다.

1925년 그는 괴팅겐 대학으로 옮겨 일년간 힐베르트(Hilbert), 쿠란트(Courant), 룽게(Runge), 뇌터(Noether)와 강의도 들으면서 연구를 하였다. 뇌터와의 만남은 그에게 그의 이론에 전개하는 데 있어서 새로운 발상을 제공하였으며, 특히 알렉산드로프(Alexandrov)와의 만남은 서로에게 수학뿐만 아니라 평생의 친구가 되었다. 1926년 호프는 괴팅겐에서 대학 강사 자격 논문을 완성하였는데, 레프셰츠(Lefschetz)의 결과를 다른 방법으로 증명한 것이다. 지금은 푸앵카레・호프(Poincare-Hopf)의 정리로 알려져 있는 다양체의 벡터장의 영집합의 지수들의 합은 벡터장의 선택과는 무관하며 다양체의 오일러 수와 같음을 증명하였다. 1926년 베를린으로 돌아가 조합 위상 수학 강좌를 개설하였다.

1927년부터 1928년까지 2년 동안 록펠러 장학금을 받고 알렉산드로프와 함께 프린스턴 대학에서 연구 활동을 하였다. 이 기간 동안은 호프에게나 알렉산드로프에게 있어서 위상 수학의 발전에 지대한 영향을 끼친 해이기도 하다. 거기에서 레프셰츠, 베블렌(Veblen), 알렉산더(Alexander) 등과 공동 연구도 수행하였다. 1928년 호프는 베를린으로 돌아왔는데, 쿠란트의 제안에 의하여 알렉산드로프와 3권으로 발간 예정인 위상 수학에 대한 책을 집필하게 되었다. 1935년에야 제1권이 발간되었고 다른 책들은 2차 세계대전으로 인하여 중단되었다.

1928년 호프는 결혼을 하였고 1929년 프린스턴 대학 조교수 제의를 받지만 거절한다. 1930년 스위스 취리히의 ETH 공과대학의 학과장인 베일(Weyl)이 괴팅겐 대학 학

과장으로 옮기게 되자 1931년 호프가 ETH 학과장을 맡아 취리히로 갔다. 그 이듬해인 1932년 나치 정권이 독일에 수립되자 유태인인 호프에게는 시련의 시절이었지만 학문적으로는 꽃을 피운 시기이다.

1931년 호프의 불변수를 정의하였고 호프·리노우(Hopf-Rinow) 정리를 발표하여 리만 다양체가 측지적으로 완비가 될 필요 충분 조건은 거리 공간으로서도 완비임을 보였다. 다시 말하면 임의의 두 점을 길이가 최소인 측지선으로 연결 할 있음을 말한다. 긴밀 다양체는 항상 완비 다양체가 됨은 쉽게 알 수 있다. 완비된 상수의 단면 곡률을 갖는 리만 다양체를 공간형(space-form)이라 한다. 이 정리는 리만 다양체를 분류하는데 있어서 없어서는 안 될 정리이다.

1932년 호프는 논문 "미분 기하와 위상적 성질"에서 2차원 완비된 리만 다양체의 세 가지 성질에 주목한다. 첫째는 가우스 곡률이 양이면 긴밀 곡면이라는 보네의 정리이다. 둘째는 상수의 가우스 공간형에 대한 오일러 수의 부호는 곡률의 부호와 같다. 셋째는 주어진 어떠한 공간형의 상수의 곡률을 갖는 계량을 주더라도 곡률의 부호는 유일하다. 둘째와 셋째 결과는 가우스·보네의 정리로부터 쉽게 알 수 있다,

호프는 이를 일반화하여 n차원에서도 비슷한 질문을 하였다. 첫째 문제는 양의 단면 곡률을 갖는 공간형은 항상 긴밀한가? 둘째 문제는 n이 짝수라 할 때 다양체의 오일러 수는 상수 곡률의 $n/2$ 제곱과 같은 부호인가? 셋째 문제는 공간형은 항상 같은 부호를 갖는 공간형 구조를 갖는가? (여기에서 부호는 1, 0, -1 중 하나이다.)

이 세 질문은 공간형에 대한 것이지만 즉시 일반적인 리만 다양체에 대해서도 똑같은 물을 수 있다. 긴밀 미분 다양체가 가질 수 있는 제일 좋은 리만 계량은 무엇인가? 리만 다양체의 곡률의 어떠한 성질이 그 다양체의 위상을 결정하는가? 이것들 모두를 지칭하여 호프의 1932년 프로그램이라 한다([2], [8]).

첫 번째에 대해서는 현재 많이 진전된 상태이고, 두 번째는 곡률과 위상과의 관계를 묻고 있다. 위에 열거한 세 가지 중 첫 번째 문제에 대한 해답은 1935년 쇤베르크(Schoenberg)와 마이어스(Myers)가 독립적으로 해결하였고, 1941년 마이어스는 이를 일반화하여 리치 곡률이 양인 완비 공간도 긴밀함을 증명하였다([5], [9]).

두 번째와 세 번째 문제는 가우스·보네 정리를 고차원으로 일반화하면 쉽게 보일 수 있다. 1925년 호프, 1940년 알렌되르페(Allendoerfe)와 펜첼(Fenche, 서로 독립적으로 연구), 1943년 알렌되르페와 베일(Wey)을 거쳐서 1944년 천(Chern)에 의하여 완전하게 가우스·보네의 정리의 일반화가 이루어져 천·가우스·보네 정리로 완성된다.

M이 $m(=2n)$차원의 긴밀이고 방향이 주어진 리만 다양체라 하면 오일러 수는 다음과 같다.

$$\chi(M)=\frac{(-1)^n}{2^{3n}\pi^n n!}\int_M \varepsilon_{(i)}\varepsilon_{(j)}R_{i_1i_2j_1j_2}\cdots R_{i_{m-1}i_mj_{m-1}j_m}\,dM$$

여기에서 $\varepsilon_{(i)}=\varepsilon_{i_1\cdots i_m}$은 순열 $(1, 2, \cdots, m; i_1, \cdots, i_m)$의 부호이고 $R_{i_k i_{k+1} j_k j_{k+1}}$은 곡률 텐서의 성분이고 dM은 다양체의 부피 요소이다. 겉으로는 간단하게 보이지만 무지 복잡한 식이다([3], [6]).

두 번째 문제를 공간형에서 단면 곡률이 양(음, $K \geq 0$ 또는 $K \leq 0$)으로 일반화한 것이 호프의 근본적인 예상 문제(fundamental Hopf conjecture)이다[3]. 예상 문제를 정확히 기술하면 M이 $2n$차원의 긴밀이고 방향이 주어진 리만 다양체라 하자.

단면 곡률 $K>0$(또는 $K \geq 0$)이면 $\chi(M)>0$(또는 $\chi(M) \geq 0$)이다.

단면 곡률 $K<0$(또는 $K \leq 0$)이면 $(-1)^n\chi(M)>0$(또는 $(-1)^n\chi(M) \geq 0$)이다.

또한 호프는 학회에서 강의가 끝나고 나서 2차원 구 S^2의 곱 다양체 $S^2 \times S^2$가 양의 단면 곡률을 가질 수 없음을 증명하는 것이 어려우니 여러분들도 생각해 보라면서 문제를 발표하였다([7], [11]). 대부분 이 문제를 가볍게 흘려 넘겼으나, 나중에 리만 기하학에서 근본적인 예상 문제와 더불어 아주 어려운 문제로 알려져 있고 호프의 예상 문제라고 일컬어진다. 유감스러운 것은 이 문제가 정확히 언제 제기되었는지 아는 사람이 없다는 점이다. 천이 강의를 들은 기억이 있다고만 증언하고 있다. 호프의 예상 문제는 매우 단순하고 쉬워 보이지만 어떠한 리만 기하학의 기법들도 아직까지는 적용하기 어려운 문제로 알려져 있다.

1939년 호프는 카르탕(Cartan)이 제기한 긴밀 리 군의 호모로지 군에 대한 연구를 하였으며 오늘날 호프의 대수로 알려진 이론을 전개하였다. 호프는 2차 세계대전이 끝난 후에 독일 수학의 재건에 힘썼으며 1955년부터 1958년까지 세계 수학자 연맹의 의장이 되어 수학 발전에 이바지하였으며 1971년 스위스에서 일생을 마감하였다. 호프의 제자로는 프라이스만(Preissman), 히제부르(Hizerbruch), 엑크만(Eckmann)과 프로이덴탈(Freudenthal) 등이 있다.

3. 결론

호프는 다양체의 곡률과 위상과의 관계를 밝히려고 노력한 선각자임을 알았다. 국소적인 연구에만 관심이 있었던 그 당시에 과감하게 대역적인 관점에서 다양체를 바라보았고 연구의 초점을 거기에 두었다. 이후 리만 기하학은 많은 발전을 보게 된다.

참고 문헌

1. 이종우, 기하학의 역사적 배경과 발달, 경문사, 1998.

2. M. Berger, *Riemannain Manifods: From Curvature to Topology*, Chern, International Press Co., 1992, 184-238.
3. A. Besse, *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, 1987.
4. S. Bochner, "Vector fields and Ricci curvature," *Bull. Amer. Math. Soc.* 52 (1946), 776-797.
5. J. Cheeger · D.E. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannnian Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1975.
6. S.S. Chern, "On curvature and characteristic class of a Riemannian manifold," *J. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 20(1955), 117-126.
7. S.S. Chern, "The Geometry of G-structure," *Bull. Amer. Math. Soc.* 72(1966), 167-219.
8. H. Hopf, "Differentialgeometrie und topologische Gestalt, Jahres-bericht," *DMV.* 41(1932), 209-229.
9. S.B. Myers, "Riemannian manifolds with positve mean curvature," *Duke, Math, J.* 8(1941), 401-404.
10. S. Tanno, *Promenades on spheres*, Tokyo Inst. Tech., 1966.
11. S.T. Yau, *Problem Section, Seminar on Differential Geometry*, Princeton Univ. Press., 1977, 669-709.

Hopf's Life and Works

Dept. of Mathematics, Inha University **Kwanseok Ko**

In this paper, we describe H. Hopf's life and works from the historical point of view. We have a very brief mention of history and results prior to Hopf. He raised the question of the topological implications of the sign of curvature. We discuss his contributions in the field of Riemannian geometry.

Key words: H. Hopf, curvature, topology

2000 Mathematics Subjects Classification: 01-02, ZDM.Classification: A30

논문 접수 : 2005년 3월 1일, 심사 완료 : 2005년 4월