

지그재그이론을 이용한 유한요소개발 및 응용

이덕규*

Zig-Zag Theory and Finite Element for Composite Structures

Deog-Gyu Lee*

Abstract

A three node triangular element with drilling rotations incorporating improved higher-order zig-zag theory(HZZT) is developed to accurately assess the stress distribution through thickness of the laminated plate and analyze the vibration of pretwisted composite plates with embedded damping layer. Shear force matching conditions are enforced along the interfaces between the embedded damping patch and the border patch. The natural frequencies and modal loss factors are calculated for cantilevered pretwisted composite blade with damping core with the present triangular element, and compared to experiments and MSC/NASTRAN using a layered combination of plate and solid elements.

초 록

고차 지그재그이론을 이용하여 면내회전 자유도를 갖는 3절점 삼각형요소를 개발하여 복합재 적층판의 층간 응력분포를 정확히 계산하였고 점탄성물질이 심어진 비틀린 복합재료 판의 진동을 해석하였다. 평면상에서 점탄성물질과 가장자리에서 박리현상을 방지하기 위하여 사용된 경계물질사이의 경계면상에서 전단력 적합조건이 사용되었다. 본 연구에서 개발된 지그재그 삼각형요소를 이용하여 점탄성물질이 심어진 비틀린 외팔보 복합재료 판의 고유진동수와 감쇠계수를 계산하고 실험치 및 판과 고체요소를 혼합한 MSC/NASTRAN 결과치와 비교하였다.

키워드 : 감쇠(damping), 지그재그이론(zig-zag theory), 삼각형요소(triangular element), 감쇠계수(loss factor)

1. 서 론

항공기나 터보기계의 회전력을 경량화 하기 위하여 질량비 강성계수가 큰 복합재료가 많이

사용되나 외부의 반복하중이 가해질 경우 응력집 중현상이 발생하고 구조물의 피로현상을 유발하며 파괴까지 이르게 된다. 이러한 과도한 진동을 효과적으로 제어하기 위하여 점탄성물질을 복합

* 위성웅용그룹/dglee@kari.re.kr

재료 구조물에 접합하여 심는 방법으로 피로에 민감한 진동을 감소시킨다. 접합된 접탄성물질은 전동중 전단변형을 통하여 에너지를 발산하므로 두께 방향으로 각층의 기계적특성, 층의 두께, 감쇠계수가 급격히 변하는 적층 복합재료 구조물의 전단변형 거동을 정확히 예측할수 있는 층이론의 개발이 필요하다.

Saravacos 와 Pereira[1]는 불연속 층이론을 이용하여 접탄성층을 갖는 복합재료판을 해석하였는데 불연속 층이론은 복합재료를 구성하는 각 층이 독립된 변형장을 갖으나 두께방향으로 연속이며 기울기는 불연속이다. 불연속 층이론의 자유도의 개수는 두께방향으로 나누어진 소분층의 개수에 따라 늘어나므로 접탄성물질이 접합된 적층구조물의 응력분포를 정확히 계산하는데는 많은 계산량을 필요로 한다.

Di Sciuva[2]는 고차원 지그재그이론을 유도하고 3절점 적합(Conforming)삼각형 요소를 개발하였는데 자유도의 개수는 10개로 이는 2개의 평면변위, 2개의 전단변위, 횡변위 그리고 단면회전과 곡률변위이다. 이 요소를 이용하여 복합재료판의 굽힘과 자유진동을 해석하였다. Cho등[3]은 고차원 지그재그 이론과 Specht[4]가 제안한 보간법을 이용하여 패치테스트를 통과하는 비적합(Nonconforming) 삼각형 요소를 개발하였는데 자유도의 개수는 5개로 이는 2개의 전단변위, 횡변위 그리고 2개의 단면회전변위이다.

본 연구에서는 지그재그 이론과 Specht[4]가 제안한 보간법을 이용하여 패치테스트를 통과하는 비적합 3절점 삼각형 요소를 개발하였는데 자유도의 개수는 3개의 병진변위, 3개의 단면회전변위 그리고 3개의 고차회전변위로 모두 9개이다. 또한 평면상에서 경계물질과 접탄성물질 사이의 탄성계수가 급격히 변하므로 경계면상에서 전단력 적합조건이 사용되었다. 이 삼각형 요소를 사용하여 접탄성물질이 심어진 비틀린 복합재료 판의 자유진동을 해석하여 고유진동수와 감쇠계수를 계산하였고 실험치 및 판과 고체요소를 혼합한 MSC/NASTRAN 결과치와 비교하였다.

2. 본 론

2.1 Zig-Zag 이론에서의 응력-변형도 관계

다층으로 구성된 판의 k 번째 층의 지그재그 면내변위($u^{(k)}$, $v^{(k)}$)와 횡변위($w^{(k)}$)는 다음과 같이 정의된다[5],

$$\begin{aligned} u^{(k)} &= u - z \frac{\partial w}{\partial x} + h_{11}^{(k)} \phi_x + h_{12}^{(k)} \phi_y, \\ v^{(k)} &= v - z \frac{\partial w}{\partial y} + h_{21}^{(k)} \phi_x + h_{22}^{(k)} \phi_y, \quad w^{(k)} = w \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 u , v 는 평면변위이고, w 는 횡변위이며, ϕ_x , ϕ_y 는 고차 전단변위이다. $h_{11}^{(k)}, h_{12}^{(k)}, h_{21}^{(k)}, h_{22}^{(k)}$ 는 k 번째층의 재질의 특성을 나타내는 함수로 참고문헌[5]에 자세히 정리되어 있다.

k 번째층의 선형 변형율은 다음과 같이 정의된다,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \end{array} \right\}^{(k)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -z & 0 & 0 & h_{11}^{(k)} & h_{12}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -z & 0 & 0 & 0 & h_{21}^{(k)} & h_{22}^{(k)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -z & h_{21}^{(k)} & h_{22}^{(k)} & h_{11}^{(k)} & h_{12}^{(k)} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \epsilon \\ \gamma \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{array} \right\}^{(k)} &= \begin{bmatrix} h_{21,z}^{(k)} & h_{22,z}^{(k)} \\ h_{11,z}^{(k)} & h_{12,z}^{(k)} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \gamma \\ \epsilon \end{array} \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

여기서 $\{\epsilon\}$ 과 $\{\gamma\}$ 는 다음과 같이 정의된다,

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, \frac{\partial \phi_y}{\partial y}, \frac{\partial \phi_z}{\partial y} \right]^T \\ \{\gamma\} &= \{\phi_x, \phi_y\}^T, \end{aligned}$$

평면응력 상태($\sigma_z = 0$)를 가정한 접탄성물질의 복소수 형태의 이방성 구성방정식은 다음과 같이 정의 된다.

$$\{\sigma\}^{(k)} = \left[[\bar{C}]^{(k)} + i [\bar{C}]^{(k)} [\bar{\eta}]^{(k)} \right] \{\epsilon\}^{(k)} \quad (3)$$

여기서 응력(σ)과 선형변형율(ϵ)은 다음과 같다.

$$\{\sigma\}^{(k)} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \tau_{xy}, \tau_{yy}\}^{(k)}, \quad \{\epsilon\}^{(k)} = \{e_x, e_y, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yy}\}^{(k)}$$

탄성계수($[\bar{C}]$)와 감쇠계수($[\bar{\eta}]$)는 참고문헌[5]에 자세히 정리되어 있다.

2.2 지배방정식

Hamilton의 원리에 따라 지배방정식은 다음과 같이 유도된다.

$$\delta\Pi = \delta \int_{t_1}^{t_2} (U_B + U_S - T) dt = 0 \quad (4)$$

위식에서 U_B , U_S , T 는 각각 굽힘변형에너지, 전단변형에너지, 운동에너지를 나타낸다. 그리고,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U_B + U_S - T) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta U_B + \delta U_S - \delta T) dt \quad (5)$$

이며, δU_B , δU_S 및 δT 의 표현은 다음과 같다.

$$\delta U_B = \int_0^L \{\delta \varepsilon\}^T [\bar{D}_B] \{\varepsilon\} dA \quad (6)$$

여기서 $[\bar{D}_B]$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$[\bar{D}_B] = [D_B] + i[D_B^d]$$

$$[D_B] = \begin{bmatrix} [A] & -[B] & [Q] \\ -[B] & [D] & -[E] \\ -[E] & -[G] & [G] \end{bmatrix}, \quad [D_B^d] = \begin{bmatrix} [A_d] & -[B_d] & [Q_d] \\ -[B_d] & [D_d] & -[E_d] \\ -[E_d] & -[G_d] & [G_d] \end{bmatrix}$$

그리고 (A, B, D, E, Q, E, G) 와 $(A_d, B_d, D_d, Q_d, E_d, G_d)$ 는 부록 A에 정의되어 있다.

$$\delta U_S = \frac{1}{2} \int_A \{\delta V\}^T [\bar{D}_S] \{V\} dA \quad (7)$$

여기서 $[\bar{D}_S]$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$[\bar{D}_S] = [D_S] + i[D_S^d] = [F] + i[F_d]$$

그리고, F 와 F_d 는 부록 A에 정의되어 있다.

$$\delta T = \int_A \{\delta V\}^T [Z_p] \{V\} dA \quad (8)$$

여기서 속도벡터(V)는 다음과 같이 정의된다.

$$\{V\} = \left\{ \dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, \frac{\partial \dot{w}}{\partial x}, \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}, \dot{\phi}_x, \dot{\phi}_y \right\}^T$$

그리고, 관성계수($[Z_p]$)는 부록 B에 정의되어 있다.

2.3 3절점 지그재그 삼각형 유한요소

3절점 지그재그 삼각형 유한요소(그림 1참조)를 식(1)의 지그재그 변위장을 이용하여 개발하였다. 평면변위(u, v)는 선형으로 다음과 같이 보간되는 것으로 가정한다.

$$u = \sum_{i=1}^3 (n_i u^i + \Phi \theta_z^i), \quad v = \sum_{i=1}^3 (n_i v^i + \Psi \theta_z^i) \quad (9)$$

여기서 면내회전변위(θ_z)는 Allman[6]의 방법을 이용하여 도입되었고 보간함수(n_i, Φ_i, Ψ_i)는 다음과 같이 정의된다[6].

$$n_i = \zeta_i, \quad \Phi_i = \frac{1}{2}(b_i \zeta_i \zeta_j - b_j \zeta_i \zeta_i),$$

$$\Psi_i = \frac{1}{2}(c_k \zeta_i \zeta_j - c_j \zeta_k \zeta_i) \quad (10)$$

여기서 ζ_i 는 삼각형요소에 사용되는 면적좌표계로 그림 1에 도시되어 있다. (i, j, k)는 1, 2, 3의 순환순열을 나타낸다. b_i, c_i 는 다음과 같이 정의된다.

$$b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j$$

여기서 x_i, y_i 는 삼각형요소의 3절점의 좌표를 나타낸다. 고차 전단회전변위(ϕ_x, ϕ_y)는 C^0 연속 함수로 선형으로 다음과 같이 보간된다.

$$\phi_x = -\sum_{i=1}^3 n_i \phi_y^i, \quad \phi_y = \sum_{i=1}^3 n_i \phi_x^i \quad (11)$$

횡변위(w)는 C^1 연속함수로 Specht[4]가 제안한 방법에 따라 다음과 같이 보간된다.

$$w = \sum_{i=1}^3 (q_i w^i + g_i \theta_x^i + h_i \theta_y^i), \quad \theta_x^i = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i, \quad \theta_y^i = -\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_i \quad (12)$$

여기서 q_i, g_i, h_i 는 다음과 같이 정의된다[4].

$$q_i = P_i - P_{i+3} + P_{k+3} + 2(P_{i+6} - P_{k+6}),$$

$$g_i = b_j (P_{k+6} - P_{k+3}) + b_k P_{i+6}, \quad h_i = c_j (P_{k+6} - P_{k+3}) + c_k P_{i+6} \quad (13)$$

여기서 P_i 는 부록 C에 정의 되어 있다.
굽힘변형율(ϵ)과 전단변형율(γ)은 다음과 같이 정의된다.

$$\{\epsilon\} = [N_B]\{d_e\}, \quad (14)$$

$$\{\gamma\} = [N_S]\{d_e\} \quad (15)$$

여기서 N_B 와 N_S 는 부록 D에 정리되어 있다.
굽힘강성행렬($[K_B]$)과 전단강성행렬($[K_S]$)는 식(14), (15)를 식(6)과 (7)에 각각 대입하여 다음과 같이 정의된다.

$$[K_B] = \int_0^{1-\zeta_1} \int_0^{1-\zeta_1} [N_B]^T [D_B] [N_B] 2Ad\zeta_2 d\zeta_1, \quad (16)$$

$$[K_S] = \int_0^{1-\zeta_1} \int_0^{1-\zeta_1} [N_S]^T [D_S] [N_S] 2Ad\zeta_2 d\zeta_1 \quad (17)$$

감쇠강성행렬($[K_B^d]$, $[K_S^d]$)은 식(16)과 (17)에서 $[D_B]$ 와 $[D_S]$ 대신 $[D_B^d]$ 와 $[D_S^d]$ 를 대입하여 계산한다. 강성행렬의 수치적분은 6차 단일 가산 가우스적분을 사용하였다. 고차 면내회전 자유도(ϕ_z)에 대한 가상강성행렬은 다음과 같이 정의된다[7].

$$[K_{\phi_z}] = \alpha EV_s \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \phi_z^1 \quad (18)$$

위식에서 E 는 탄성계수를 나타내고 V_s 는 요소의 체적을 나타내며 α 는 0.3이하의 값을 사용하였다[7]. θ_z 와 ϕ_z 의 강체모드는 절점에서의 회전변위를 삼각형요소 중앙에서의 평면회전($\theta_o = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$)에 탄성적으로 연결하여 제거한다. 강체모드에 의한 에너지는 다음과 같다[7],

$$U_{\theta_o} = \frac{1}{2} V_s G 2B \left(\theta_o - \frac{1}{3} (\theta_z^1 + \theta_z^2 + \theta_z^3) \right)^2, \quad (19)$$

$$U_{\phi_z} = \frac{1}{2} V_s G 2K \left(\theta_o - \frac{1}{3} (\phi_z^1 + \phi_z^2 + \phi_z^3) \right)^2 \quad (20)$$

위식에서 G 는 전단계수를 나타내고 β 와 κ 는 무차원 상수로 10^{-6} 값을 사용하였다[7]. 식(19),

(20)으로부터 강체강성행렬은 다음과 같이 유도된다.

$$[S_{\theta_o}] = 2\beta V_s G [Q]^T [Q], \quad (21)$$

$$[S_{\phi_z}] = 2\beta V_s G [R]^T [R] \quad (22)$$

여기서 Q 와 R 은 부록 D에 정리되어 있다.
강성행렬과 감쇠강성행렬은 다음과 같이 정의된다.

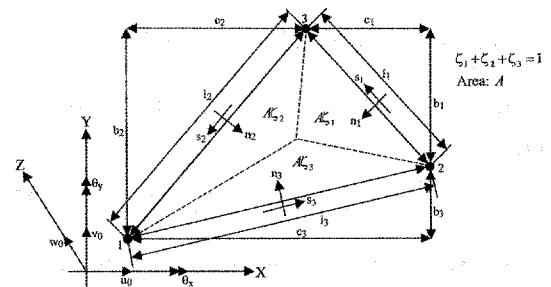


그림 1. Geometry and coordinate system for Zig-Zag triangular element.

$$[K] = [K_B] + [K_S] + [K_{\theta_o}] + [S_{\theta_o}] + [S_{\phi_z}], \quad (23)$$

$$[K_D] = [K_B^d] + [K_S^d] \quad (24)$$

속도벡터는 다음과 같이 표시된다.

$$\{V\} = [N_p]\{d_e\} \quad (25)$$

식(25)을 (8)에 대입하여 질량행렬을 다음과 같이 유도하였다.

$$[M] = \int_0^{1-\zeta_1} \int_0^{1-\zeta_1} [N_p]^T [Z_p] [N_p] 2Ad\zeta_2 d\zeta_1 \quad (26)$$

여기서 N_p 는 부록 D에 정의 되어 있다. 개발된 지그재그 삼각형 유한요소(THZ3, 3-Node Triangular Higher-Order Zig-Zag Element)는 비적합이지만 패치테스트를 통과하며 각절점당 자유도의 개수는 9개이다.

$$\{d_e\} = \{\{d_e\}_1, \{d_e\}_2, \{d_e\}_3\},$$

$$\{d_e\}_i = \{u^i, v^i, w^i, \theta_x^i, \theta_y^i, \theta_z^i, \phi_x^i, \phi_y^i, \phi_z^i\}^T, i=1,2,3$$

2.4 경계면상의 전단력 적합조건

평면의 가장자리에서의 박리현상을 방지하기 위하여 사용된 경계물질과 점탄성물질 사이의 탄성계수가 급격히 변하므로 두 물질 사이의 경계면상에서 전단력 적합조건이 다음과 같이 적용되었다.

$$[D_s^B]\{\gamma^B\} = [D_s^D]\{\gamma^D\} \quad (27)$$

여기서 윗첨자 B 는 경계물질(Border Material)을 지칭하고 D 는 점탄성물질(Damping Material)을 지칭한다.

위식으로부터 경계면상에서 경계물질의 전단변형율은 다음과 같이 표현된다,

$$\{\gamma^B\} = [T_\gamma]\{\gamma^D\}, \quad [T_\gamma] = [D_s^B]^{-1}[D_s^D] \quad (28)$$

이러한 적합조건은 경계요소의 강성행렬에서 점탄성물질과 연결되는 절점의 전단변위에 적용되는데 유한요소의 이산화가 증가함에 따라 위의 적합조건은 더 정확히 만족된다.

2.5 감쇠 해석

복소수 형태의 지배방정식은 유한요소법을 이용하여 다음과 같이 유도된다.

$$[M]\{\ddot{d}\} + ([K] + i[K_D])\{d\} = \{0\} \quad (29)$$

부공간 반복법을 이용하여 식(29)의 자유진동을 해석하여 모달변형에너지법으로 모드의 감쇠계수를 다음과 같이 구하였다.

$$\eta_n = \frac{\{\chi_n\}^T [K_D] \{\chi_n\}}{\{\chi_n\}^T [K] \{\chi_n\}} \quad (30)$$

위식에서 n 차 모드 χ_n 은 식(30)에서 감쇠효과를 무시한 자유진동을 해석하여 구한다.

3. 수치해석 및 결과

3.1 Stress analysis of simply supported sinusoidally loaded three layer cross ply plate

단순지지, 정현하중을 받는 3층 직교판($[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$)의 평면응력(σ_x), 평면 전단응력(τ_{xy}) 및 충방향 전단응력(τ_{xz})을 계산하고 탄성해석(Pagano[11]), 1차전단변형이론(FSDT) 및 고차전단변형이론(HS3DT)과 비교하였다. 그림 2는 평면응력(σ_x)의 충방향 분포를 나타낸다. 그림 3은 평면전단응력(τ_{xy})의 충방향 분포를 나타낸다. 그림 4은 충방향 전단응력(τ_{xz})의 분포를 나타낸다. 충방향 전단응력(τ_{xz})은 기 계산된 평면응력을 사용하여 3차원 탄성방정식을 해석하여 구하였다. 지그재그이론(HZZT) 결과가 3차원 탄성해석과 가장 근사한 분포를 나타낸다.

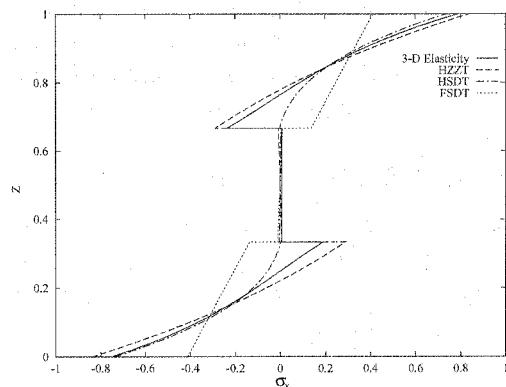


그림 2. In-plane normal stress(σ_x) variation through thickness for a sinusoidally loaded square simply supported cross-ply plate $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ for $a/h = 4$.

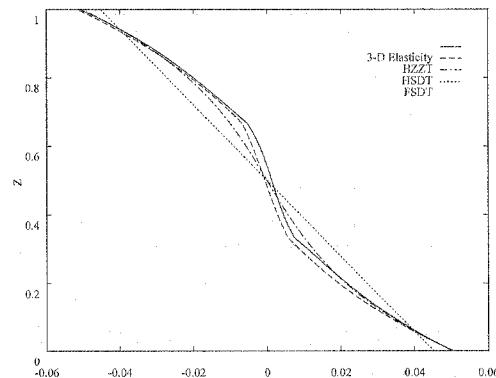


그림 3. In-plane shear stress(τ_{xy}) variation through thickness for a sinusoidally loaded square simply supported cross-ply plate $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ for $a/h = 4$.

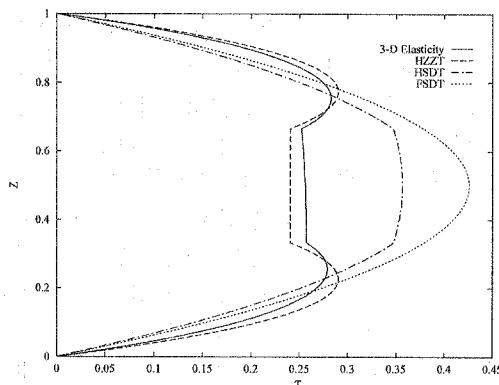


그림 4. Transverse shear stress(τ_{xz}) variation through thickness calculated using equilibrium equation for a sinusoidally loaded square simply supported cross-ply plate[$0^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}$] for $a/h = 4$.

3.2 Free vibration of sandwich plates

표 1은 단순지지 샌드위치판의 고유진동수를 다양한 층간 질량비 및 강성비에 대하여 계산하고 Srinivas[15]의 정해 및 NASTRAN해석치와 비교하였다.

표 1. Nondimensional fundamental flexural frequencies for three-ply orthotropic laminates for $a/h = 10$.

$\frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(2)}}$	$\frac{E_z^{(1)}}{E_z^{(2)}}$	HZT	HSDT	FSDT	NASTRAN (CQUAD4)	Elasticity (Srinivas[15])
1	1	0.0473	0.0472	0.0479	0.0478	0.0474
1	2	0.0569	0.0568	0.0576	0.0575	0.0570
1	5	0.0769	0.0771	0.0779	0.0777	0.0772
1	10	0.0978	0.0992	0.0990	0.0987	0.0981
1	15	0.1117	0.1151	0.1129	0.1127	0.1120
3	15	0.0943	0.0971	0.0953	0.0952	0.0946

3.3 점탄성물질이 심어진 복합재 적층판의 진동해석

3절점 지그재그 삼각형요소(THZ3)를 이용하여 점탄성물질이 코어에 심어진 비틀린 복합재료 적

층판의 고유진동수와 감쇠계수를 계산하고 실험치 및 판요소(CTRIA)와 고체요소(CPENTA)를 혼합한 MSC/NASTRAN결과치와 비교하였다. 그림 5와 6은 점탄성 코어를 갖는 복합재료판의 구성과 치수를 각각 보여준다.

본 논문에 사용된 예제는 University of California-San Diego 의 복합재구조연구실에서 수행되었으며 설계 및 해석은 San Diego에서 수행되었고 Spin Test는 NASA Glenn(NASA Lweis)에서 수행되었으며 Speaker로 복합재판을 기진시키고 Laser Holography를 이용하여 in-line velocity를 수신하여 LMS CADA-X Modal Analysis Software를 이용하여 고유진동수와 감쇠계수를 측정하였다.

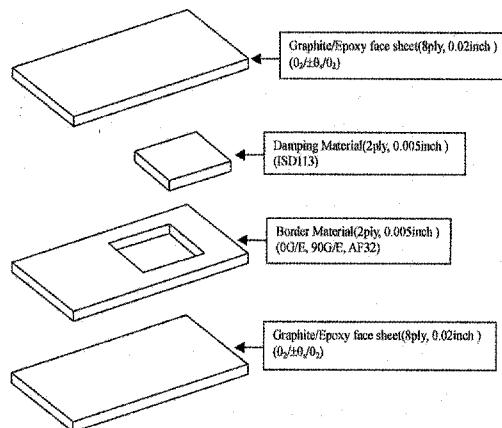


그림 5. Damped plate components.

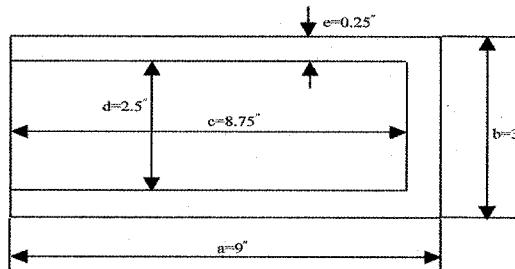


그림 6. Geometry of central core layer.

복합재료판은 Prepreg Unidirectional T-300/

934 HYE 1034C carbon fiber tape로 구성되었고 물성치는 다음과 같다.

$$E_L = 2 \times 10^7 \text{ psi}, \quad E_T = 1.4 \times 10^6 \text{ psi}, \quad G_{LT} = 8 \times 10^5 \text{ psi},$$

$$G_{TT} = 5 \times 10^5 \text{ psi}, \quad v_{LT} = 0.3, \quad \rho = 0.0567 \text{ lb/in}^3, \quad h_{pb} = 0.0025 \text{ inch}$$

코어의 점탄성물질로 3M사의 ISD113가 사용되었는데 전단계수(G)와 감쇠계수(η)는 68°F 에서 제조회사에서 제공하는 계산도표(Nomogram)를 읽어 구하고 밀도는 $\rho_{ISD113} = 0.035 \text{ lb/in}^3$ 이다[5]. 판의 가장자리에는 층간분리 현상(Delamination)을 방지하기 위하여 경계물질을 사용하였다. 경계물질로 3M사의 Strucutral Adhesive Film AF32가 사용되었고 전단계수와 감쇠계수는 계산도표로부터 구한다(참고문헌 [5] 참조). 표 2은 지그재그 삼각형요소와 NASTRAN의 유한요소 모델링을 보여주는데 지그재그 요소가 NASTRAN에 비하여 요소수 $1/3$, 절점수 $1/2$ 를 사용한다.

표 2. Finite element modeling.

Parameter	Present (THZ3)	NASTRAN (CTRIA/CPIENTA)
Elements	1584	4752
Nodes	855	1710
D.O.F	7695	10269

표 3과 4은 점탄성물질이 심어진 외팔 평판의 고유진동수와 감쇠계수를 보여주는데 이 연구에서 개발된 지그재그 요소는 실험치에 비교해 상당히 정확한 고유진동수와 감쇠계수를 예측하며 이는 지그재그 요소가 점탄성물질 코어의 충방향 전단변위를 정확히 예측하기 때문이다. NASTRAN 모델링은 상당히 정확한 고유진동수를 예측하나 감쇠계수의 예측은 부정확하다. 이는 NASTRAN 모델링이 두께방향 전단변형을 정확히 예측하지 못하기 때문이며 점탄성 코어층에 더 많은 고체요소를 사용하면 정확도를 높일수는 있으나 많은 계산량과 기억용량을 필요로 한다.

표 3. Frequencies and loss factors of flat damped plate

[$0_2/\pm 15_2/0_2$][ISD113/AF32][$0_2/\pm 15_2/0_2$].

Mode	ω (Hz)			η		
	Exp*	Present	NAS*	Exp*	Present	NAS*
1B	27.4	30.1 (1.1)	30.0 (1.1)	0.026	0.029 (1.1)	0.022 (0.8)
2B	160.7	158.9 (1.0)	157.3 (1.0)	0.078	0.079 (1.0)	0.069 (0.9)
1T	88.0	93.1 (1.1)	93.9 (1.1)	0.034	0.035 (1.0)	0.012 (0.4)

*Exp=Experiment, *NAS=MSC/NASTRAN

1B=1st Bending, 2B=2nd Bending, 1T=1st Torsion

표 4. Frequencies and loss factors of flat damped plate

[$0_2/\pm 45_2/0_2$][ISD113/AF32][$0_2/\pm 45_2/0_2$].

Mode	ω (Hz)			η		
	Exp*	Present	NAS*	Exp*	Present	NAS*
1B	24.0	26.5 (1.1)	26.4 (1.1)	0.017	0.022 (1.3)	0.007 (0.4)
2B	144.0	149.7 (1.0)	148.2 (1.0)	0.052	0.047 (0.9)	0.036 (0.7)
1T	119.7	119.8 (1.0)	121.3 (1.0)	0.033	0.035 (1.1)	0.024 (0.7)

*Exp=Experiment, *NAS=MSC/NASTRAN

1B=1st Bending, 2B=2nd Bending, 1T=1st Torsion

표 5. Frequencies and loss factors of pretwisted ($\phi = 30^\circ$, midchord) damped plate [$0_2/\pm 15_2/0_2$][ISD113/AF32][$0_2/\pm 15_2/0_2$].

Mode	ω (Hz)			η		
	Exp*	Present	NAS*	Exp*	Present	NAS*
1B	30.6	30.6 (1.0)	30.4 (1.0)	0.037	0.038 (1.0)	0.022 (0.6)
2B	149.1	145.9 (1.0)	142.7 (1.0)	0.098	0.072 (0.7)	0.054 (0.6)
1T	347.7	405.0 (1.2)	411.9 (1.2)	0.019	0.023 (1.2)	0.012 (0.6)

*Exp=Experiment, *NAS=MSC/NASTRAN

1B=1st Bending, 2B=2nd Bending, 1T=1st Torsion

표 6. Frequencies and loss factors of pretwisted ($\phi = 30^\circ$, midchord) damped plate [0%/ $\pm 45\%$ /0%][ISDI13/AF32][0%/ $\pm 45\%$ /0%].

Mode	ω (Hz)			η		
	Exp	Present	NAS*	Exp	Present	NAS*
1B	31.6	26.7 (0.8)	26.5 (0.8)	0.026	0.027 (1.0)	0.007 (0.3)
2B	150.3	136.1 (0.9)	133.4 (0.9)	0.068	0.051 (0.8)	0.031 (0.5)
1T	342.0	358.3 (1.0)	359.0 (1.0)	0.02	0.026 (1.3)	0.052 (2.6)

*Exp=Experiment, *NAS=MSC/NASTRAN
1B=1st Bending, 2B=2nd Bending, 1T=1st Torsion

표 5와 6는 점탄성 물질이 심어진 비틀림 ($\phi = 30^\circ$, midchord) 외팔지지 복합재판의 고유진동수와 감쇠계수를 보여주는데 지그재그 요소는 NASTRAN 모델링에 비하여 실험치와 상당히 근접한 고유진동수와 감쇠계수를 예측하며 유한요소의 이산화 정도에 따라 정확도를 더 높일 수 있다. 평판에 비하여 비틀림모드의 고유진동수가 큰 폭으로 증가 하였는데 이는 비틀림으로 인한 비틀림 강성계수가 증가 하였기 때문이다.

4. 결 론

지그재그 이론과 전단력 적합조건(Shear force matching condition)을 이용하여 3절점 삼각형 요소를 개발하여 점탄성 물질이 심어진 비틀림 복합재 판의 고유진동수와 감쇠계수를 계산하고 실험치 및 판과 고체요소를 혼합한 MSC/NASTRAN 결과치와 비교하였다. 이는 두께방향의 기계적 특성이 급격히 변하는 적층구조물의 전단변형을 정확히 예측함으로 전단변형을 통하여 에너지를 발산하는 점탄성 물질의 동적 거동을 해석하는데 적합하며 또한 본 요소는 고정밀도의 2차원 판요소로 3차원 응력분포를 정확히 예측할 수 있으며 판과 고체요소를 혼합하여 사용하는 NASTRAN 모델링보다 사용하기 쉽고 상대적으로 적은 계산량과 기억용량을 필요로 하므로 경제적

이며 주어진 컴퓨터 환경하에서 더 많은 요소를 사용할 수 있어서 정확도를 높일 수 있다.

참 고 문 헌

- Saravanos, D. A. and Pereira, J. M., "Effects if Interply Damping Layers on the Dynamic Characteristics of Composite Plates." *AIAA Journal*, Vol. 30, 1992, pp. 2906-2913.
- Di Sciuva, M., "A Third-Order Triangular Multilayered Plate Finite Element with Continuous Interlaminar Stresses." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, 1995, pp. 1-26.
- Cho, M. and Parmerter, R. R., "Finite Element for Composite Plate Bending Based on Efficient Higher Order Theory." *AIAA Journal*, Vol. 32, 1994, pp. 2241-2248.
- Specht, B., "Modified Shape Functions for the Three-Node Plate Bending Element Passing the Patch Test." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, 1988, pp. 705-715.
- Lee, D. G. and Kosmatka, J. B., "Passively Damped Vibration of Composite Plates with Zig-Zag Elements." *The 41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, April 3-6, Paper No. AIAA-2000-1473.
- Allman, D. J., "Evaluation of the Constant Strain Triangle with Drilling Rotations." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, 1988, pp. 2645-2655.
- Cook, R. D., Malkus, D. S. and Plesha, M. E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd Edition, John Wiley & Sons.

부 록

A. 단면감쇠계수

$$\begin{aligned} [A, B, D] &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} [1, z, z^2] [\bar{C}_B]^{(k)} dz, \\ [Q, E] &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} [1, z] [\bar{C}_B]^{(k)} [Z] dz, \\ [G] &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} [Z]^T [\bar{C}_B]^{(k)} [Z] dz, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

여기서,

$$[\bar{C}_B]^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{11} & \bar{C}_{12} & \bar{C}_{16} \\ \bar{C}_{12} & \bar{C}_{22} & \bar{C}_{26} \\ \bar{C}_{16} & \bar{C}_{26} & \bar{C}_{66} \end{bmatrix}^{(k)}, \quad [Z] = \begin{bmatrix} h_{11}^{(k)} & h_{12}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{21}^{(k)} & h_{22}^{(k)} \\ h_{21}^{(k)} & h_{22}^{(k)} & h_{11}^{(k)} & h_{12}^{(k)} \end{bmatrix}$$

단면감쇠계수($A_d, B_d, D_d, Q_d, E_d, G_d$)는 식(A.1)에서 $[\bar{C}_B]^{(k)}$ 대신 $[\bar{C}_B]^{(k)} [\bar{\eta}_B]^{(k)}$ 를 대입시켜 계산한다. 그리고 단면에 작용하는 평면 및 굽힘력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{F_d\} &= \{N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, P_{x1} + P_{y3}, P_{x2} + P_{y4}, P_{x1} + P_{y3}, P_{x2} + P_{y4}\}^T \\ &= \begin{bmatrix} [A] & -[B] & [Q] \\ [B] & -[D] & [E] \\ [Q]^T & -[E]^T & [G] \end{bmatrix} \{e\} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$[F] = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} [Y]^T [\bar{C}_S]^{(k)} [Y] dz \quad (\text{A.3})$$

$$[\bar{C}_S]^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix}^{(k)}, \quad [Y] = \begin{bmatrix} h_{21,z}^{(k)} & h_{22,z}^{(k)} \\ h_{11,z}^{(k)} & h_{12,z}^{(k)} \end{bmatrix}$$

전단감쇠계수(F_d)는 식(A.3)에서 $[\bar{C}_S]^{(k)}$ 대신 $[\bar{C}_S]^{(k)} [\bar{\eta}_S]^{(k)}$ 를 대입시켜 계산한다.

단면에 작용하는 전단력은 다음과 같이 정의된다.

$$\{F_S\} = \{R_{x1} + R_{y1}, R_{x2} + R_{y2}\} = [F][\eta] \quad (\text{A.4})$$

B. 관성계수

$$(\text{B.1})$$

여기서 단면관성계수는 다음과 같이 정의된다.

$$[Z_p] = \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & -I_1 & 0 & H_0^{11} & H_0^{12} \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & -I_1 & H_0^{21} & H_0^{22} \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -I_1 & 0 & 0 & I_2 & 0 & -H_1^{11} & -H_1^{12} \\ 0 & -I_1 & 0 & 0 & I_2 & -H_1^{21} & -H_1^{22} \\ H_0^{11} & H_0^{21} & 0 & -H_1^{11} & -H_1^{21} & (H_{11}^2 + H_{21}^2) & (H_{12}^2 + H_{21}^2) \\ H_0^{12} & H_0^{22} & 0 & -H_1^{12} & -H_1^{22} & (H_{12}^2 + H_{21}^2) & (H_{12}^2 + H_{22}^2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_j & 0 & 0 & 0 & 0 & b_j \Phi_{j,k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 & 0 & 0 & c_k \Psi_{i,k} & 0 & 0 & 0 \\ c_i & b_j & 0 & 0 & 0 & c_k \Phi_{j,k} + b_k \Psi_{i,k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2A} b_j b_k q_{i,j,k} & \frac{1}{2A} b_j b_k g_{i,j,k} & \frac{1}{2A} b_j b_k h_{i,j,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2A} c_i c_k q_{i,j,k} & \frac{1}{2A} c_i c_k g_{i,j,k} & \frac{1}{2A} c_i c_k h_{i,j,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2A} b_j c_i q_{i,j,k} & \frac{1}{2A} b_j c_i g_{i,j,k} & \frac{1}{2A} b_j c_i h_{i,j,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(H_0^{11}, H_0^{12}, H_0^{21}, H_0^{22}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)} (h_{11}^{(k)}, h_{12}^{(k)}, h_{21}^{(k)}, h_{22}^{(k)}) dz,$$

$$(H_1^{11}, H_1^{12}, H_1^{21}, H_1^{22}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)} z (h_{11}^{(k)}, h_{12}^{(k)}, h_{21}^{(k)}, h_{22}^{(k)}) dz,$$

$$(H_{11}^2, H_{12}^2, H_{21}^2, H_{22}^2) = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)} (h_{11}^{(k)2}, h_{12}^{(k)2}, h_{21}^{(k)2}, h_{22}^{(k)2}) dz,$$

$$(H_2^{12}, H_2^{21}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)} (h_{11}^{(k)} h_{12}^{(k)}, h_{21}^{(k)} h_{22}^{(k)}) dz$$

C. Specht 계수

Specht[4]가 제안한 C^1 함수에 대한 형상함수는 비적합 이지만 패치테스트를 통과하며 다음과 같이 유도 되었다.

$$\begin{aligned} \{P\} &= \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1 \xi_2, \xi_2 \xi_3, \xi_3 \xi_1, \\ &\quad \xi_1^2 \xi_2 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \xi_3 [3(1-\mu_3)\xi_1 - (1+3\mu_3)\xi_2 + (1+3\mu_3)\xi_3], \\ &\quad \xi_2^2 \xi_3 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \xi_3 [3(1-\mu_1)\xi_2 - (1+3\mu_1)\xi_3 + (1+3\mu_1)\xi_1], \\ &\quad \xi_3^2 \xi_1 + \frac{1}{2} \xi_1 \xi_2 \xi_3 [3(1-\mu_2)\xi_3 - (1+3\mu_2)\xi_1 + (1+3\mu_2)\xi_2]\}, \end{aligned}$$

여기서,

위식에서 l_1, l_2, l_3 은 삼각형의 세면의 길이를 나타낸다(그림 1참조).

D. 형상함수

$$\mu_1 = \frac{l_3^2 - l_2^2}{l_1^2}, \mu_2 = \frac{l_1^2 - l_3^2}{l_2^2}, \mu_3 = \frac{l_2^2 - l_1^2}{l_3^2} \quad (\text{D.1})$$

$$[N_B] = \frac{1}{2A} [N_B^1, N_B^2, N_B^3] \quad (\text{D.2})$$

$$[N_S^i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

$$[N_S] = [N_S^1, N_S^2, N_S^3] \quad (\text{D.4})$$

$$[N_p^i] = \begin{bmatrix} n_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_i & 0 & 0 & 0 & \Psi_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_i & g_i & h_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2A} b_k q_{i,k} & \frac{1}{2A} b_k g_{i,k} & \frac{1}{2A} b_k h_{i,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2A} c_k q_{i,k} & \frac{1}{2A} c_k g_{i,k} & \frac{1}{2A} c_k h_{i,k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

$$[N_p] = [N_p^1, N_p^2, N_p^3] \quad (\text{D.6})$$

$$[\mathcal{Q}] = \left[-\frac{c_i}{4A} \quad \frac{b_i}{4A} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \quad (\text{D.7})$$

$$[\mathcal{Q}] = [\mathcal{Q}^1, \mathcal{Q}^2, \mathcal{Q}^3] \quad (\text{D.8})$$

$$[R^i] = \left[-\frac{c_i}{4A} \quad \frac{b_i}{4A} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{3} \right] \quad (\text{D.9})$$

$$[R] = [R^1, R^2, R^3] \quad (\text{D.10})$$

여기서,

$$i, j, k = 1, 2, 3, (\cdot)_{,i} = \frac{\partial}{\partial \zeta_i}, (\cdot)_{,ij} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j}.$$