

# 프랙탈이론의 개념이해와 영상분석에의 이용

서울대학교 치과대학 구강악안면방사선학 교실  
조교수 이 삼 선

## 서 론

최근 국내외 치과계의 여러 분야에서 발표되는 논문들을 보면 프랙탈 분석을 이용하여 골 밀도나 형태 등을 분석한 방법들을 볼 수 있다. 분야에 따라서는 벌써 많은 자료가 정리되어 디지털방사선장비의 연동 소프트웨어에 첨가되어 판매되고 있는 상품도 있다.

치과계에서 이 분석법에 관심이 높아가는 이유는 임플란트나 치주, 혹은 치근단 수술 후에 골의 치유과정을 평가하거나 수술 전에 미리 예후를 예측할 필요성이 점점 높아지고 있기 때문으로 생각된다. 여러 가지 다른 골에 대한 자료는 비교적 많이 정립되어 있지만 악골이나 치조골에 대한 자료는 아직까지 부족한 편이기 때문에 이 부위에 대한 연구의 필요성도 높다.

그러나 어떠한 분석이나 진단 방법을 그것이 가지고 있는 기본적인 이론이나 장단점 및 한계에 대한 확실한 지식도 없이 연구방법으로 이용하거나 결과를 해석하게 되면 오류가 생기게 된다. 따라서 저자는 프랙탈개념에 대한 기본적인 이론을 정리하고 최근 영상분석에서 이용한 예를 소개하여 치과 의사들이 임상으로 이용하거나 치의학연구분야에 이용하는데 도움이 되고자 한다.

## 프랙탈이론의 개요

프랙탈이론은 1982년 Mandelbrot가 'The Fractal Geometry of Nature' 라는 책에서 처음 발표하였으며 이 이론을 자연의 현상 분석에 접목시켰다. 그 후에 의학분야에서는 혈관이나 신경세포의 분포양상이 폐포의 형태 등을 분석하여 진단하거나 연구하여 왔다.

프랙탈차원은 어떠한 대상을 축소인자로 나누었을 때 나누어진 조각의 개수를 이용하여 표현된다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & \text{-----} \\
 n &= \text{number of piece(조각의 개수)} \\
 S &= \text{reduction factor(축소인자)} \\
 D &= \text{fractal dimension(프랙탈차원)} \\
 n &= \frac{1}{S^D} \quad \text{--- 식 1} \\
 & \text{-----}
 \end{aligned}$$

여기에 우리가 잘 알고 있는 공간개념의 차원을 대입시켜보면 일차원인 선(line)의 경우 이를 1/2로 나누면 조각은 2개가 된다. 따라서  $n=2, S=1/2$ 가 되므로  $D$ (프랙탈차원)는 1이 되어서 일차원인 선은 프랙탈차원의 값도 1이 된다는 것을 알 수 있다. 삼차원의 블록인 경우,  $S$ 를 1/3로 하면 조각이 27개가 나오므로 프랙탈차원은 3이 된다(그림 1).

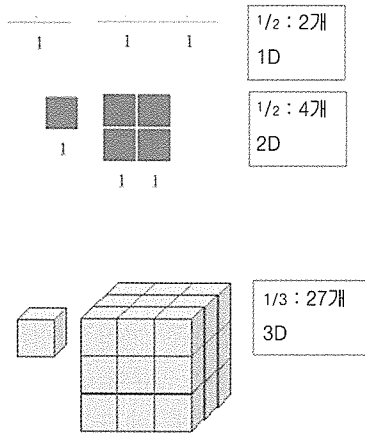


그림 1. 선(line)의 경우 이를 1/2 로 나누면 조각은 2개가 됨. 2차원의 면의 경우 한 변을 1/2로 나누면 4조각이 됨. 삼차원의 볼록인 경우, S를 1/3로 하면 조각이 27개가 됨.

이러한 프랙탈이론의 근간은 어떤 구조의 복잡성은 그 구조가 짜여지는 과정의 복잡성의 결과라는 개념이다. 예를 들면 cauliflower(꽃양배추)와 같이 언뜻 보기에 매우 복잡해 보이는 모양도 일부를 확대해서 보면 전체의 모양과 비슷하다(그림 2).

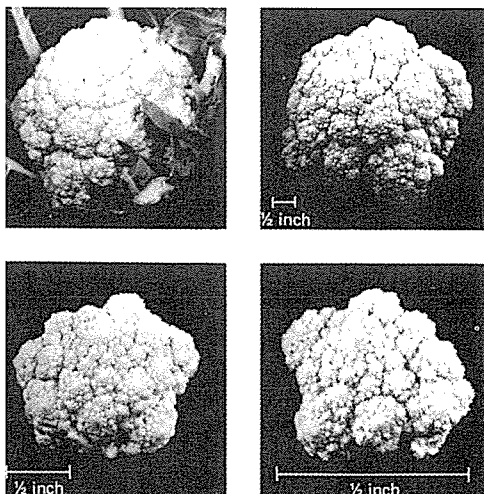


그림 2. 구조의 복잡성은 그 구조가 짜여지는 과정의 복잡성의 결과다

이와 같이 복잡해 보이는 구조물도 자기유사성을 갖는 기본적인 단순한 형태(pure form)가 있는데 이를 달리 표현하면 비록 단순한 형태라 하더라도 피드백과정을 계속시키면 복잡한 형태가 만들어지게 된다. 이해를 돕기 위하여 단순한 피드백연산이 얼마나 다양한 결과를 초래할 수 있는지 예를 들어 보겠다. 단순한 하나의 방정식을 가지는 피드백함수가 있다고 할 때 이를 그림으로 표현하면 다음과 같다(그림 3).

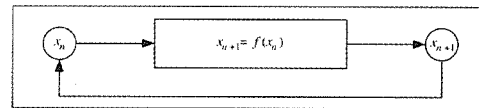


그림 3. one step feedback machine

예를 들어  $p + rp(1 - p)$ 와 같은 단순한 수식에  $r = 3, p = 0.01$ 을 대입하고 소수점 이하 열자리까지 계산하는 계산기와 소수점 이하 열두 자리까지 계산하는 계산기를 이용하여 계산을 하면 이러한 작은 차이가 처음에는 같은 결과를 보이나 피드백횟수가 늘어나면서 50번째에는 0.0036616295와 0.225758993390이라는 엄청나게 다른 카오스적인 결과를 나타내게 된다.

복잡한 구조물 속의 자기유사성이나 pure form을 완벽하게 가지고 있는 괴물과 같은 도형들은 Mandelbrot가 프랙탈개념을 발표하기 훨씬 이전인 1883년 Cantor라는 독일 수학자가 Set theory를 발표한 이후에 많은 수학자들에 의해 여러 가지가 발표되었다. 그 예를 보면 Peano curve(Peano, 1890), Hilbert curve(Hilbert, 1891), Koch curve(Koch, 1904), Sierpinski Gasket(Sierpinski, 1916), 등이 있으며 그 외에도 Julia(1918), F Hausdorff(1919) 등이 다양한 도형들은 발표하였다. 이 중에서 Mandelbrot에게 가장 많은 영감을 주었던 Koch curve를 이용하여 프랙탈차원을 설명하고자 한다.

### Koch curve

Koch는 스웨덴사람으로 1904년 다음과 같은 모양의 curve를 발표하였다(그림 4).

이 curve는 1/3크기의 축소인자를 가지고 만들어지며 그 결과로 각 스텝에서 그림에서 보는 바와 같이 1/3크기의 선 분절이 4개가 생기게된다. 이때

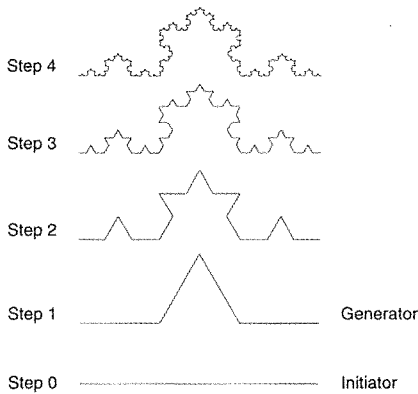


그림 4. Koch curve

이 Koch curve의 길이는 아래의 식과 같이 처음 시작하는 선의 길이를 1/3로 k번 축소한 길이에 4를 곱한 값이 된다. 따라서 이 curve의 길이는 k가 증가함에 따라 무한히 길어진다.

$$\text{Length of the Koch Curve} = a \times 4^k / 3^k \quad \text{--- 식 2}$$

a : initiator length  
k : number of step

이러한 curve를 외연으로 가진 도형의(그림 5) 면적은 다음과 같은 식에 의하여 k를 무한히 늘리면 일정한 값이 된다는 것을 알 수 있다.

#### \* The area of the Koch Island

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= A_k + n_k \times \frac{\sqrt{3}}{4} s_k^2 \\ &= A_k + 3 \times 4^{k-1} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{3^{2k}} a^2 \\ &= A_k + \frac{\sqrt{3}}{12} \left( \frac{4}{9} \right)^{k-1} a^2 \\ &= A_1 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left( 1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \dots + \frac{4^{k-1}}{9^{k-1}} \right) a^2 \\ A &= A_1 + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{9}{5} a^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{9}{5} a^2 \\ &= \frac{2}{5} \sqrt{3} a^2 \dots \dots \text{--- 식 3} \end{aligned}$$

$A_1$  : area  
a : original length of side  
 $S_k$  : side of little triangles =  $\left(\frac{1}{3}\right)^k a$   
 $n_k$  : number of triangles =  $3 \times 4^{k-1}$

### Compass Dimension

Mandelbrot는 위와 같은 관계를 영국의 해안선의 길이에 적용하였다. 이 해안선의 길이는 100km길이의 자로 측정하였을 때와 50km 길이의 자

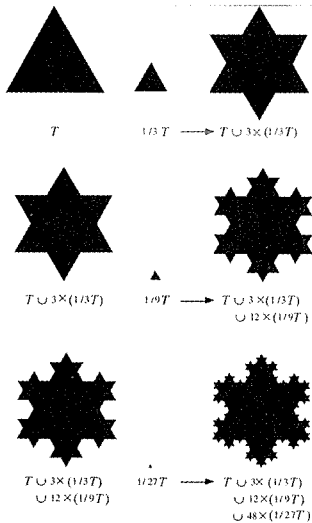


그림 5. Koch Island

로 측정하였을 때 다른 값이 나오게 될 것이며 작은 자로 잰수록 해안선의 길이는 길어지게 된다(그림 6).

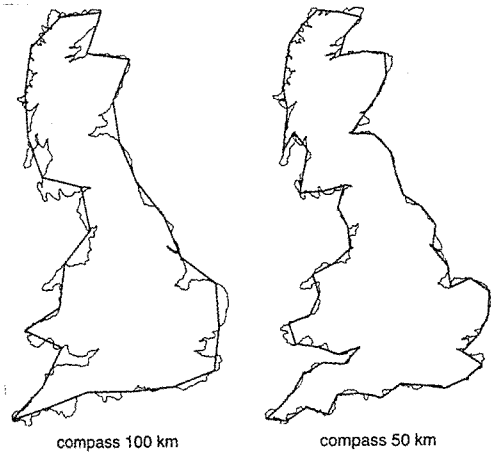


그림 6. 자의 길이가 달라지면 해안선의 길이도 달라진다

이것을 지수함수로 나타내면 다음 그래프에서 보듯이 자의 길이와 해안선의 길이간의 비례식을 얻을 수 있고 기울기는 약 0.36이다(그림 7).

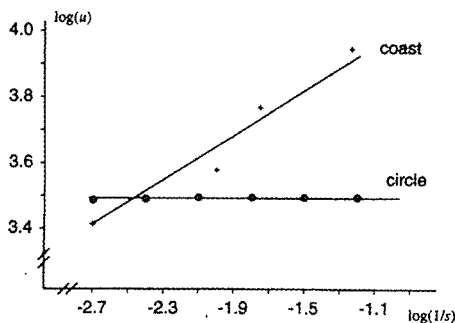


그림 7. 해안선의 길이의 지수함수그래프

이때의 기울기 값이 어떠한 의미를 갖는가를 설명하기 위하여 Koch curve를 이용해보겠다. Koch curve에서 자의 길이는 1/3씩 작아지고 이에 따라 curve의 길이는 4/3씩 길어지게 된다.

따라서 양측에 3의 로그값을 구하고 비례식을 얻으면 다음 식에서 보는 바와 같이 기울기는 0.2619이다.

\* Log/Log Plot for the Koch

$$s = \frac{1}{3}^k \quad s : \text{compass setting}$$

$$\mu = \left(\frac{4}{3}\right)^k \quad \mu : \text{length}$$

$$\log_3 \frac{1}{s} = k$$

$$\log_3 \mu = k \log_3 \frac{4}{3}$$

$$\log_3 \mu = d \log_3 \frac{1}{s}$$

$$d = \frac{\log_3 \mu}{\log_3 \frac{1}{s}} = \frac{k \log_3 \frac{4}{3}}{k} = \log_3 \frac{4}{3}$$

$$\approx 0.2619 \quad \dots \dots \text{식 4}$$

그러면 이 기울기와 프랙탈 차원을 비교해 보겠다. 처음에 설명한 바와 같이 프랙탈차원은  $n = \frac{1}{S^D}$  (식 1) 과 같다.

이 식에 Koch curve의 값들을 대입하면  $n = 4$ ,  $S = 1/3$  이 되므로  $D = \log 4 / \log 3 = 1.2619$ 가 된다. 이 값은 그래프에서 얻은 기울기값에 1을 더한 값을 알 수 있다.

이와 같이 프랙탈차원은 축소인자와 그로 인해 생겨나는 결과들간의 방정식으로 얻어지는 값과 연관이 있으며 이는 아래와 같은 방법으로 구할 수 있다.

\* Self-similarity Dimension and Length Measurement

$\mu$ : length,  $n$ : number of pieces,

S: Scaling factor

$$\mu \propto 1 / S^d$$

$$\log \mu = d \log 1 / S$$

$$\log n = Ds \log 1 / S$$

$$\mu = n \times S$$

(total length = number of small piece x size of small piece)

$$\log \mu = \log n + \log S$$

$$d \log 1/s = Ds \log 1/S + \log S$$

$$-d \log S = -Ds \log S + \log S$$

$$\therefore Ds = 1 + d \quad \text{--- 식 5}$$

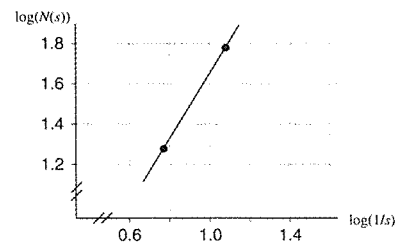
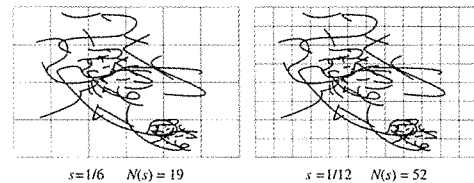


그림 8. Box counting dimension

## Box-Counting Dimension

프랙탈차원을 구할 때 계산이 용이하기 때문에 많이 이용되고 있는 방법이 Box counting dimension이다. 이것은 계산하고자 하는 대상을 아래와 같이 box의 크기를 줄여가면서 그림이 포함된 box의 개수를 세어 지수함수의 기울기를 구한다 (그림 8).

### 프랙탈 분석의 이용

프랙탈차원을 이용하여 혈관이나 신경세포 등의 분포를 평가하는 연구도 많이 있으나 이 장에서는 주로 방사선영상을 연구한 내용을 중심으로 소개하고자 한다. 방사선영상의 분석에 프랙탈차원이 이용되는 이유는 방사선사진이 가지고 있는 한계를 극복하고자 하는 일환이기도 하다. 방사선사진은 검사시 방사선발생장비나 영상획득장비가 가지고 있는 기계적이거나 화학적인 특성에 따라 상의 흑화도가 변화한다. 따라서 단순하게 상의 흑화도로 골질을 표현하거나 비교할 수 없다. 즉 전압, 전류량 혹은 노출시간에 따라 흑화도가 변화하며 현상액의 농도, 현상시간 및 상수용기의 종류에 따라서

도 흑화도는 달라진다. 또한 비교하고자 하는 골조직의 흑화도는 연조직의 두께나 촬영각도에 따라서도 변화한다.

이에 반하여 프랙탈분석은 단순히 상의 흑화도를 비교하는 것이 아니므로 위와 같은 다양한 변수에 영향을 받지 않을 수 있다. 또한 Parkinson과 Fazzalari의 연구는 골을 10도 간격으로 180도 까지 변화를 주어 촬영하여 얻은 골소주영상에서 촬영각도에 따라 골의 box counting 연산으로 얻은 프랙탈차원에 변화가 거의 없다는 것을 보여주었다. 이 연구는 촬영 시마다 변화할 수 있는 촬영각도에 대한 영향을 극복할 수 있다는 것을 보여준다. 또한 프랙탈분석을 하기 위하여 영상에서 골소주의 형태를 추출할 때 실질적으로 역치를 어느 값으로 하느냐에 따라서 골소주의 크기나 외연이 변화하게 되며 이때 프랙탈값이 어떻게 변화하는가에 대한 연구가 있었다. 그 결과에서 보면 영상의 추출 시 픽셀흑화도의 역치의 변화에 따라 프랙탈값이 달라지는 것을 볼 수 있으나 두 영상간의 프랙탈값의 차이는 일정하였다. 이것이 의미하는 바는 프랙탈 분석으로 대상을 비교할 때 영상의 추출 시 흑화도의 역치값을 일정하게 주고 비교하여야 한다는 것이고 이렇게 할 때만이 이 차이 값을 비교할 수 있

다는 것이다. 이와 같이 프랙탈분석을 이용하면 영상을 얻을 때의 기계적인 변화나 촬영각도의 변화에 대한 한계를 극복할 수 있는 장점이 있으나 영상의 준비 시에 역치값을 일정하게 해야한다는 등의 주의사항은 알고 이용하여야 할 것이다.

그러면 이러한 특성을 가지는 프랙탈분석을 이용한 예를 보겠다. 폐에서는 가슴방사선사진에서 나타나는 폐의 영상을 이용하여 정상군과 비정상군의 프랙탈차원을 box counting 계산식을 이용하여 구한 결과에 차이가 있었으므로 프랙탈차원을 이용하여 폐포의 이상형태를 확인할 수 있다고 발표하였다. 두개골의 봉합부위의 프랙탈차원이 봉합의 성숙도에 따라 변화함을 보여준 논문도 있다. 구강악안면영역에서는 골다공증환자의 악골을 프랙탈분석으로 평가하고자 하는 연구가 많이 이루어지고 있으며 이러한 연구들은 구강악안면방사선검사시 전신적인 골다공증의 진단을 가능하게 할 수 있다.

척추나 수완골로 얻은 골밀도가 악골의 국소적인 골밀도를 대표한다고 볼 수는 없으므로 악골의 골밀도를 직접 분석함으로써 임플란트시술 시 유용한 국소적 골밀도값을 얻을 수 있다. 따라서 프랙탈분석만이 아니라 골소주의 농도 및 형태분석과 악골의 3차원 값을 계산하는 알고리즘 개발이 활발히 진행되고 있으며 이를 근간으로 조만간 구강악안면방사선사진을 이용하여 악골의 국소적 골밀도의 측정이 용이하게 될 것이다.

또한 악골의 수술 후 치유과정에서 골 형성의 정도를 확인할 수 있다. 허 등은 악교정수술 전, 술 후 1, 2 일 후, 1달 후, 6개월 후 그리고 12개월 후에 촬영한 파노라마방사선사진에서 관심부위를 선택한 후 골소주를 골격화하고 box counting 방법을 이용하여 분석하였다. 그 결과 수술부위의 프랙탈차원값은 수술 후 6개월까지는 유의성있게 변화하였으며 12개월 후의 값은 6개월 후의 값보다는 높고 술 전에 비하여는 낮았으나 유의성 있는 차이를 보이지는 않았다. 여기서 주목해야할 점은 술 후 1, 2 일 후와 1개월 후의 값이 차이를 보였다는 것이다. 이때는 단순한 방사선사진의 흑화도를 가지고

는 차이를 보이지 않는 시기이나 미세한 골소주의 형성은 이루어지고 있으므로 프랙탈값은 뚜렷한 변화를 보여주었다. 이는 프랙탈분석의 유용성을 시사하는 바 크다고 할 수 있겠다.

이상의 프랙탈 분석을 공간영역적인 분석이라고 한다면 주파수영역을 이용한 분석도 가능하다. 시간과 주파수영역의 신호는 푸리에 변환(Fourier transform)을 통하여 서로간의 domain으로 변환이 가능하다. 이것은 하나의 신호가 무한한 싸인파들의 합으로 표현할 수 있다는 푸리에 정리를 기본으로 한다. 시간을 변수로 하는  $f(t)$ 와 주파수를 변수로 하는 푸리에방정식을 이용하여 다음과 같이 서로 변환이 가능하다.

일반적으로 컴퓨터를 이용하여 계산하고 적절한

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

알고리즘에 의해 고속으로 계산하는 방법을 Fast Fourier Transformation이라고 하며 거의 대부분 이를 사용한다. 자기상관함수를 푸리에변환하면 파워스펙트럼이되며 파워스펙트럼의 크기는 각 주파수 성분이 가지는 파워를 나타내게 되고 보통의 경우 신호의 제곱의 단위를 가지게 된다.

이와 같이 영상의 신호를 주파수로 표현하고 파워스펙트럼함수로 만든 다음 주파수의 지수로부터 (지수 =  $2H-1$ ) Hurst(H)상수를 구하면  $H = 2-D$  를 이용한 프랙탈 차원을 구할 수 있다. 브라운니안운동에서의 H값은 0.5이므로 프랙탈차원이 1.5 이하이면 시간이 지남에 따라 점점 기록 가능한 관계를 가진다는 것을 의미하고 1.5 이상이 되면 주기가 점점 아무렇게나 나타나는 예측할 수 없는 결과를 보이게 됨을 의미한다. 이를 이용하여 골의 술 후의 치유과정의 예후를 예측하는 프로토콜의 개발도 가능할 것이다.

## 결론

이상의 내용에서 정리한 바와 같이 프랙탈분석은 수학적인 호기심으로 만들어졌던 여러 가지 도형과 개념들에서 시작하여 자연의 현상을 해석하는 중요한 방법중의 하나가 되었다. 이를 이용하여 악골의 골형태로부터 골다공증 등의 진단이 가능해질 뿐만 아니라 국소적인 골밀도를 측정하고 악골의 치유과정을 보다 빠르게 분석적으로 확인할 수 있게 될

것이다. 그러나 다른 모든 방법에서와 마찬가지로 이 방법도 고유하게 가지고 있는 장점과 한계성이 있으므로 이에 대한 기본적인 지식을 가지고 구강 악안면영역의 영상분석이나 생물학적현상의 분석에 이용해야 할 것이다.

그리고 보다 간편하고 신빙성있는 프로토콜의 정립을 위하여 앞으로 많은 자료와 결과가 뒷받침되어진 연구와 개발이 필요하다.

## 참고 문헌

1. Haidekker MA, Andresen R, Evertsz CJ, et al. Issues of threshold selection when determining the fractal dimension in HRCT slices of lumbar vertebrae, Br J Radiol 2000 ;73:69-72
2. Heo MS, Park KS, Lee SS, et al. Fractal analysis of mandibular bony healing after orthognathic surgery, Oral Surg Oral Med Oral Pathol Oral Radiol Endod 2002;94:763-7
3. Kido S, Tamura S. Computerized classification of interstitial lung abnormalities on chest radiographs with normalized radiographic index and normalized fractal dimension, Eur J Radiol 2001;37:184-9
4. Lespessailles E, Poupon S, Niamane R, et al. Fractal analysis of trabecular bone texture on calcaneus radiographs: effects of age, time since menopause and hormone replacement therapy, Osteoporos Int 2002;13:366-72
5. Link TM, Majumdar S. Osteoporosis imaging, Radiol Clin North Am 2003; 41:813-39
6. Mandebrot B. The Fractal geometry of Nature. Freema Co. San Francisco 1982
7. Nair MK, Seyedain A, Webber RL, et al. Fractal analyses of osseous healing using tuned aperture computed tomography images, Eur Radiol 2001;11:1510-5
8. Parkinson IH, Fazzalari NL. Methodological principles for fractal analysis of trabecular bone, J Microsc 2000;198:134-42