



한국운동역학회지, 2004, 제14권 3호, pp. 301-311
Korean Journal of Sport Biomechanics
2004, Vol. 14, No. 3, pp. 301-311

운동역학의 교육과 연구용 도구로서 Mathcad의 유용성

성낙준*(호서대학교)

ABSTRACT

Mathcad program as a useful tool for the teaching and studying the sport biomechanics

Sung, Rak-Joon*(Hoseo University)

R. J. SUNG. Mathcad program as a useful tool for the teaching and studying the sport biomechanics. Korean Journal of Sport Biomechanics, Vol. 14, No. 3, pp. 301-311, 2004. The purpose of this study was to verify the usefulness of the Mathcad program as a tool for the studying and teaching the sport biomechanics.

A projectile motion was analyzed because it is the one of the most popular motion in sports activities. A 3 dimensional CG data for the high jump bar clear phase was used to calculate the initial velocity vector of the CG. Linear regression function and other functions such as cubic spline and derivative of Mathcad were used to calculate this vector. Finally, the approach angle to the bar and peak jump height was calculated.

Programming in Mathcad was relatively easy compare to traditional computer language such as Fortran and C, because of the unique documentation method of Mathcad. Additionally the 2 and 3 dimensional graph function was very easy and useful to describe the mechanical data.

If the use of Mathcad program is more popular in the field of sport biomechanics, it could

* rjsung@office.hoseo.ac.kr

greatly contribute to overcome the limit of research caused by the lack of proper programming ability.

KEY WORDS : MATHCAD, LINEAR REGRESSION, CUBIC SPLINE, PROJECTILE MOTION

I. 서 론

스포츠와 관련된 인체의 운동을 연구하는데 있어서 운동역학이 중요하다는 사실은 운동역학 전공자가 아니라도 모두 인식하고 있는 것이다. 그러나 스포츠 과학을 전공하는 전체 대학원생중에서 운동역학을 선택하는 학생의 수는 많지 않은 것이 현실이다. 이러한 현상은 운동역학을 공부하고, 실제 인체 운동을 연구하는 것이 타 분야에 비해 어려운 것이 큰 원인중의 하나로 판단된다.

인체 운동을 역학적으로 분석하고 해석하기 위해서는 상당한 역학과 수학적 지식이 필요하며, 실제 운동을 분석하기 위해서는 컴퓨터 프로그래밍 능력도 필수적인 것이다. 기본적인 역학적 변인인 변위, 속도, 가속도도 그 개념은 간단하지만, 실제 인체 운동에서 이들을 계산하고 그래프 등으로 적절히 표현하는 데에는 많은 수학적 지식과 컴퓨터 프로그램 능력이 필요하게 된다.

학생들의 대부분은 프로그래밍 능력이 부족한 경우가 많으며, 따라서 기존의 상용 동작 분석 프로그램에 의존하게 된다. 그러나 이런 프로그램을 적절히 이용하기 위해서는 3차원 좌표를 계산하는데 필요한 DLT(Direct Linear Transformation)라는 컴퓨터 연립방정식 해법에서부터 계산된 자료의 오차를 줄이기 위한 각종 스무싱(smoothing)과 필터링(filtering) 방법, 속도와 가속도를 계산하는 미분의 개념 등 상당한 기본 지식을 필요로 한다. 그러나 현재 국내의 체육관련 대학원의 커리큘럼은 대부분 운동역학 연구자로서의 이러한 지식과 능력을 배양하기에 적절치 못한 것이 현실이다. 이 문제를 제외하더라도, 적절한 컴퓨터 프로그래밍 능력을 배양하는 것이 쉽지 않은 것도 운동역학 전공자에게는 또 하나의 큰 장벽이 되고 있다.

최근의 퍼스널 컴퓨터(PC)의 하드웨어는 역학적 연구에 부족함이 없는 매우 강력한 기능을 갖고 있는 반면, 마이크로 소프트웨어의 GUI(Graphic User Interface)환경은 이전의 DOS(Disk Operating System) 환경에 비해 프로그래머에게 많은 부담을 주고 있어, 프로그램을 배우기는 오히려 더 어려워진 실정이다. 따라서 최근에는 기존의 전통적인 컴퓨터 언어인 FORTRAN, BASIC, C 등과는 달리 사용자가 쉽게 자료를 분석하고 해석할 수 있게 해 주는 프로그램들이 많이 개발되고 있다. 공학 분야에서는 MATLAB, Labview 등을 많이 쓰고 있으며, 수학, 물리 등의 분야에서는 Mathematica, Maple, Mathcad 등이 많이 쓰여지고 있다.

이러한 프로그램 중에 MATLAB과 Labview는 운동역학 분야에 많이 활용되고 있는 반면, Mathcad는 타 공학 분야에서의 활용도에 비해 운동역학적 활용도는 낮은 편이다. 그러나 Mathcad는 수학적 수식을 그대로 쓰는 독특한 문서(document) 방식의 프로그램 환경을 제공하고 있어, 다른 프로그램에 비해 손쉽게 접근이 가능한 특징을 가지고 있다(Mathsoft, 2002). 따라서 이 프로그램은 수학과 역학 교육용으로서의 활용도가 클 것으로 판단되며, 풍부한 수학, 배열, 통계함수를 가지고 있어 연구용 도구로서도 손색이 없을 것으로 판단된다.

본 연구에서는 Mathcad를 이용하여 영상 자료를 분석해 봄으로써 Mathcad의 교육, 연구용 도구로서의 적합성을 판단해 보고자하였다. 이 프로그램이 역학의 교육 연구용 도구로서의 기능이 적절한 경우, 운동역학 전공자들이 프로그래밍 능력의 부족으로 인한 한계를 극복하는데 크게 기여할 것으로 판단된다.

II. 연구 방법

투사체 운동은 스포츠 현상 중에서 가장 흔하게 일어나는 운동이다. 인체의 달리기와 멀리뛰기, 높이뛰기를 비롯한 모든 도약 동작, 그리고 공중으로 던지거나 쳐서 날라가는 모든 공의 운동은 모두 투사체 운동이다. 따라서 본 연구에서는 높이뛰기의 바 넘기 동작에서의 전신 무게 중심의 이동 방향, 그리고 최대 도약 높이를 정확하게 결정하기 위한 직선 회귀 방식을 구현해 봄으로써 Mathcad의 활용도를 판단해 보았다.

바 접근 각도 계산을 위한 이륙 후 전신 무게 중심의 수평 이동 변위와 바 넘기를 위한 이륙시의 속도, 최대 도약 높이는 Dapena(1980a), 성낙준(2003)이 이용한 방법으로 구하였다. 체공기에서 무게 중심은 수평방향으로는 등속 운동을 하며, 수직 방향으로는 등가속 운동을 하므로, 체공기의 무게 중심 위치 자료들에 대해 최소 자승 오차를 갖는 직선을 추정함으로써 보다 정확한 속도를 구할 수 있다. 수평 방향의 위치는 HS_i 는

$$HS_i = HSO + HVO \cdot t_i \quad \text{식 (1)}$$

단, HSO 는 이륙시 초기 위치, HVO 는 이륙시 초기 속도

로 나타낼 수 있으며, 체공기에서의 시간 t_i 와 그에 따른 함수 HS_i 에 대한 직선을 추정(linear fitting)하면, HSO 와 HVO 를 구할 수 있다.

수직 방향의 위치 VS_i 는

$$VS_i = VSO + VVO \cdot t_i + \frac{1}{2} (-g) \cdot t_i^2 \quad \text{식 (2)}$$

단, V_{S0} 는 이륙시 초기 위치, V_0 는 이륙시 초기 속도, g 는 중력 가속도로 나타낼 수 있는데, 식을 변형하여

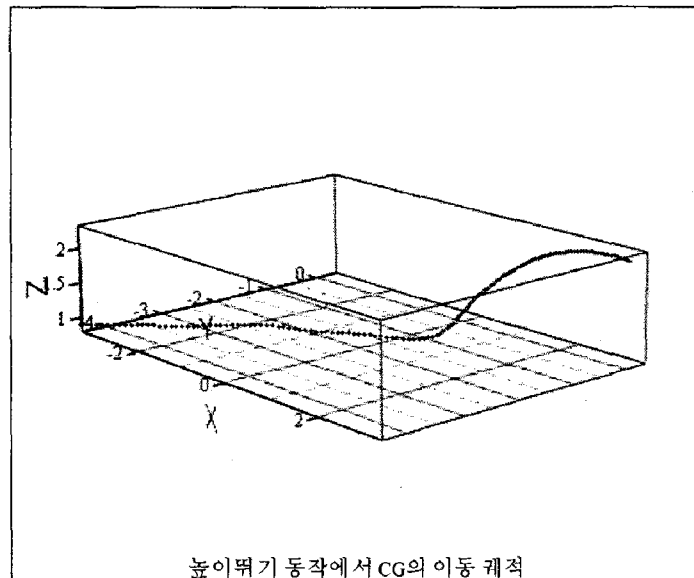
$$V_{Si} + \frac{1}{2} \cdot (g) \cdot t_i^2 = V_{S0} + V_{V0} \cdot t_i \quad \text{식 (3)}$$

의 형태로 만들면, 체공기에서의 시간 t_i 와 그에 따른 함수 V_{Si} 에 대한 직선을 추정(linear fitting)하여, V_{S0} 와 V_{V0} 를 구할 수 있다. 이륙 후의 무게 중심의 최고 높이 H_m 는 V_{S0} 와 V_{V0} 를 이용하여, 다음 식에 의해 계산할 수 있다.

$$H_m = V_{S0} + (V_{V0}^2/2(9.81)) \quad \text{식 (4)}$$

III. 결과 및 논의

본 분석에 이용된 무게 중심 자료는 성 낙준(2003)의 연구에서 얻은 것으로서, 인체 분절의 공간 좌표를 차단 주파수(cutoff frequency) 6 Hz로 저역 통과 디지털 필터(lowpass digital filter)한 자료에서 구해진 것이다<그림 1>.



hjspace

그림 1. 높이뛰기 동작에서 전신 무게중심의 이동 궤적

이 그림은 Mathcad에서 3차원 좌표 파일을 읽어서 그린 것으로, X축은 높이뛰기의 바(bar)의 왼쪽하단을 0으로 하여 우측으로 정의되어 있으며, 바의 뒤쪽이 Y축 + 방향이다. Z축은 수직이다. 이 그림을 그리는데 필요한 코드는

$$hjspace := \begin{pmatrix} total^{(0)} \\ total^{(1)} \\ total^{(2)} \end{pmatrix} \text{ 뿐이며,}$$

total은 3차원 좌표를 담고 있는 배열명, 그 위의 위첨자는 배열의 열을 지정한다. 전체 자료는 도움단기의 자료를 포함하고 있으므로, 바 넘기 공중 동작의 자료만을 추출하여 새로운 배열에 넣고, 이를 이용하여 나머지 분석을 하였다. 새로운 배열은 얻기 위해 이용된 코드는

```
flight_x := submatrix(total, to_fr - pad, peak_fr + pad, 0, 0)
```

```
flight_y := submatrix(total, to_fr - pad, peak_fr + pad, 1, 1)
```

```
flight_z := submatrix(total, to_fr - pad, peak_fr + pad, 2, 2)
```

와 같으며, flight_x는 무게중심의 X좌표, flight_y는 무게중심의 Y좌표, flight_z는 무게중심의 z좌표를 담은 배열이며, submatrix는 배열의 일부를 잘라내는 명령어이다. 새로 생성된 자료는 그림2와 같다.

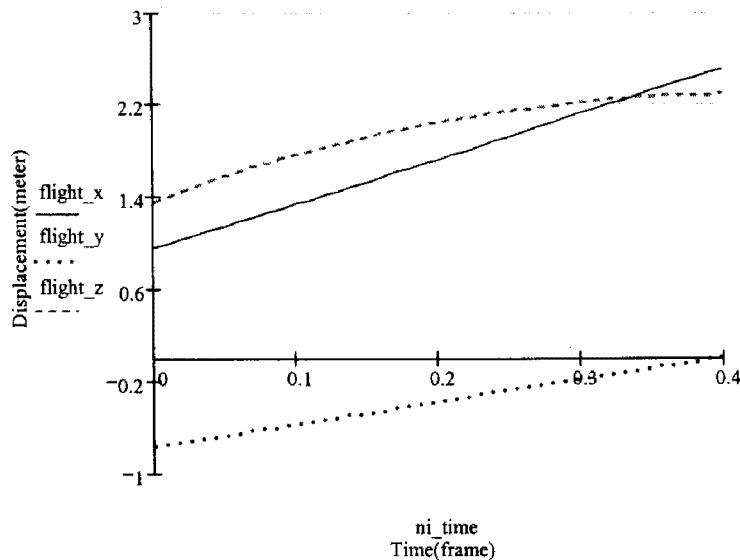


그림 2. 바 넘기 구간에서의 무게 중심의 이동 궤적

바 넘기 동작의 무게 중심 자료를 스무싱(smoothing)하고, 속도를 구하기 위해 3차 스플라인(cubic spline) 함수를 이용하였으며(Wood, 1982), 그 코드는 아래와 같다(Mathsoft, 2003). 첫 줄에서 cspline은 Mathcad의 3차 스플라인 내장함수명이며, 둘째 줄의 interp는 스플라인 계수값을 이용하여 새로운 변위 자료를 계산하는데 쓰인 보간(interpolation)을 위한 내장함수이다.

```
cs_x := cspline(r_time, flight_x)
dis_x(nv_time) := interp(cs_x, r_time, flight_x, nv_time)
```

속도는 위에서 구한 변위 자료 dis_x(nv_time)를 시간(nv_time)으로 미분하여 얻었다. 그 코드는 아래와 같으며, 수학에서 쓰는 도함수 표현을 그대로 코딩(coding)하고 있다.

$$vel_x(nv_time) := \frac{d}{d(nv_time)} dis_x(nv_time)$$

같은 코드를 flight_y와 flight_z에 적용하여 얻은 속도 자료는 <그림 3>과 같다.

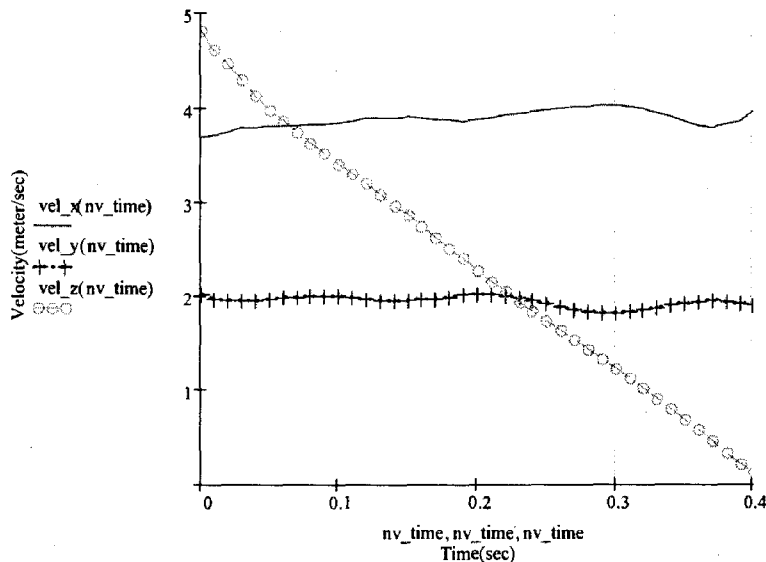


그림 3. 바 넘기 구간에서 무게 중심의 속도 변화

그림에서 보듯이 속도 자료에는 오차가 포함되어 있다. x와 y 방향은 등속 운동이므로 직선이 되어야 하며, z방향도 - 기울기를 갖는 직선이 되어야 하지만, 다소 구불거리는 값을 갖고 있음을 알 수 있다. 일반적인 자료의 경우는 이 속도자료를 이용하여 회귀 직선을 구할 수밖에 없지만, 바로 회귀 직선을 구하는 경우 아주 정확한 값을 얻을 수 없게 된다. 실제로 이 값을 이용하여 회귀 직선

을 구한 경우는 <그림 4>와 같으며, 다소의 기울기가 있는 형태로 피팅(fitting)이 되고 있음을 알 수 있다. 그림 4에서는 y축이 확대되어 있어 기울기가 큰 것 같지만 실제로는 약간 기울어진 형태이다.

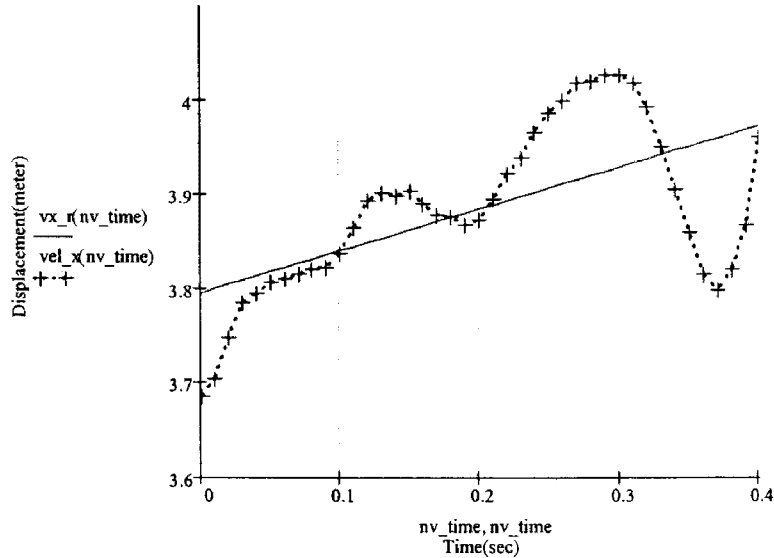


그림 4. X방향의 속도를 직선으로 회귀(linear regression)한 경우

이러한 속도의 오차를 극복하는 방법을 앞에서 기술한 투사체의 운동방정식을 이용하는 것이다. 이를 구현한 Mathcad의 프로그램은 아래와 같으며, 첫줄의 slope함수는 회귀 직선의 기울기로서 x 방향의 속도가 된다. 둘째 줄의 intercept 내장함수는 y축 절편으로서 이륙시 무게 중심의 위치를 나타낸다. 셋째 줄은 기울기와 절편값을 이용하여, 회귀 직선의 자료를 구하는 코드이다.

```

mx:= slope(ni_time, flight_x)
bx:= intercept(ni_time, flight_x)
dx_r(nv_time) := mx*nv_time + bx
    
```

구해진 mx값은 3.906, bx 값은 0.948이며, y 방향 자료에 대해 같은 조작을 하여 얻은 값은 my=1.942, by=-0.767이다. 두 회귀 직선에서 나온 자료를 x-y 그래프로 그려보면 <그림 5>가 되며 이 그림은 무게 중심의 수평 이동 궤도를 위에서 본 것과 같다.

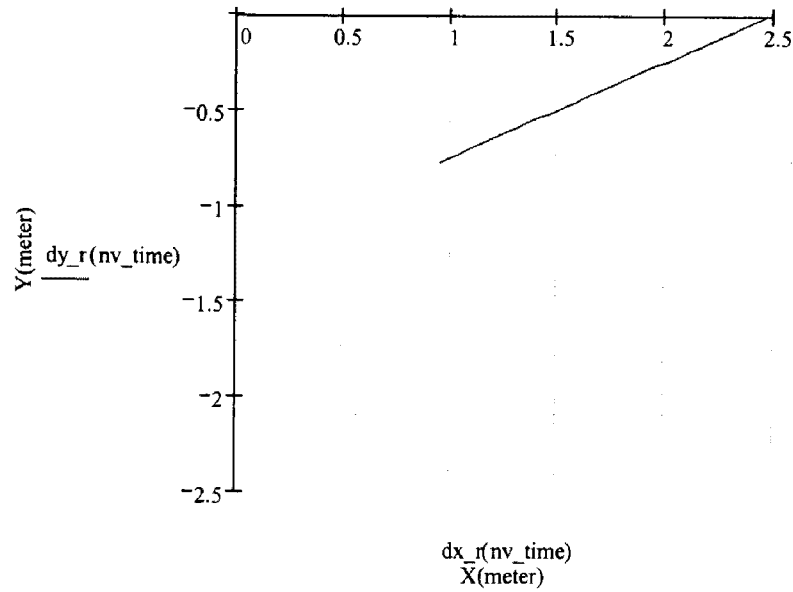


그림 5. 바 넘기 구간에서 무게 중심의 수평 이동 궤적

수평 이동 궤도가 x축과 이루는 각도가 바 접근 각도가 되므로, 벡터의 내적을 이용하여 이 각도를 구하였다. Mathcad 코드는 아래와 같으며, x축 단위벡터 ux 와 수평속도 벡터 h_vel 을 벡터로 정의한 후, 그 아래 줄에 있는 바와 같이 내적의 정의를 그대로 입력하였다.

$$ux := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad h_vel := \begin{pmatrix} mx \\ my \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos\theta := \frac{ux \cdot h_vel}{|ux| \cdot |h_vel|}$$

구해진 $\cos\theta$ 를 이용하여 접근 각도 $approach_angle$ 을 구하는데는 \arccos 의 내장함수 $acos$ 를 이용하였다.

$$approach_angle := \text{acos}(\cos\theta)$$

$$approach_angle = 26.434\text{deg}$$

<식 2>의 형태로 z 자료를 만들기 위해 원래 z 좌표 $flight_z$ 에 $\frac{1}{2} \cdot (g) \cdot t^2$ 을 더한 후 직선 회귀시켰다. 입력된 프로그램은 아래와 같다.

$$\text{flight_z_g} := \text{flight_z} + \frac{1}{2} \cdot 9.807 \cdot (\text{ni_time})^2$$

$$\text{mz} := \text{slope}(\text{ni_time}, \text{flight_z_g})$$

$$\text{bz} := \text{intercept}(\text{ni_time}, \text{flight_z_g})$$

$$\text{dz_r}(\text{nv_time}) := \text{mz} \cdot \text{nv_time} + \text{bz}$$

구해진 $\text{mz}=4.269$, bz 는 1.38이었다. z 방향의 자료는 수직 방향이므로 등가속 운동이 되므로, z 자료를 직선 회귀한 그래프는 <그림 6>과 같이 된다.

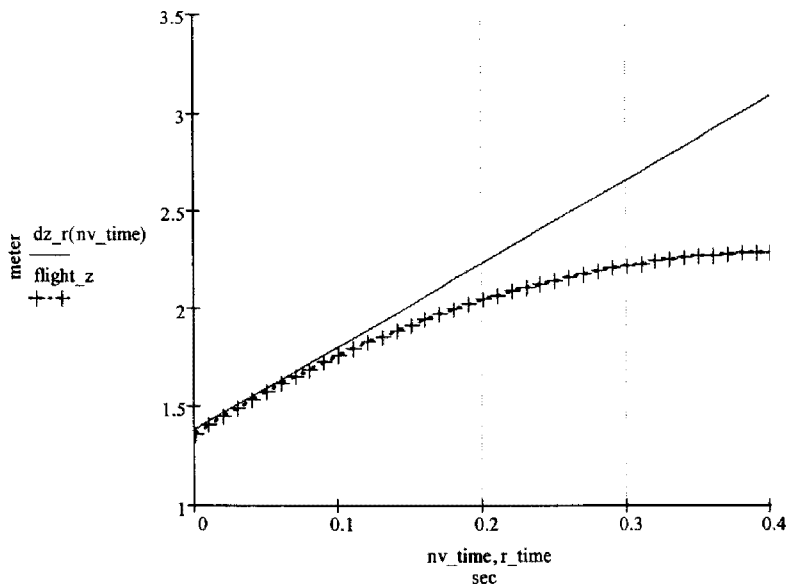


그림 6. 수직 방향의 무게 중심 위치를 직선 회귀한 그래프

수직 방향의 자료를 직선 회귀한 기울기(이륙 시 수직 초속도)와 절편을 이용하여, 최고 도달 높이를 구한 프로그램은 아래와 같으며, 최대 높이 v_peak 는 2.31 m이었다.

$$v_peak := \text{bz} + \frac{\left(\frac{\text{mz}}{2}\right)^2}{9.807}$$

바 접근 각도를 구한 것과 같은 방법을 이용하여 이륙 각도 take_off_angle 을 구하였다. Mathcad 프로그램은 아래와 같다.

$$v_vel := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mz \end{pmatrix}$$

abs_vel := h_vel + v_vel ; 주) 벡터끼리의 덧셈도 + 로 끝난다

$$abs_vel = \begin{pmatrix} 3.906 \\ 1.942 \\ 4.269 \end{pmatrix}$$

$$\cos\theta := \frac{h_vel \cdot abs_vel}{|h_vel| \cdot |abs_vel|}$$

take_off_angle := acos(cosθ)

take_off_angle = 44.382deg

투사체의 속도를 정확히 계산하기 위해 쓰인 이 방법은 높이뛰기 뿐 아니라 체조, 다이빙 그리고 투사되는 모든 공에도 마찬가지로 적용되므로 운동 역학 연구에 필수적인 분석 방법 중의 하나이며, Mathcad를 이용하여 손쉽게 처리할 수 있었다.

결과에서 볼 수 있듯이 Mathcad는 기존 프로그램 언어와 달리 수학적 수식을 그대로 쓸 수 있으므로, 벡터 연산과 미적분 등을 수학적 개념만 있으면 쉽게 적용할 수 있다. 또한 역학적인 자료의 표현을 위한 편리한 2차원, 3차원 그래픽 기능을 가지고 있어 운동역학의 교육 및 연구용 도구로서 유용하게 쓰일 수 있음을 알 수 있다. 여기에서는 쓰여지지 않았지만 실제로 Mathcad의 프로그래밍 기능과 내장 함수들은 운동역학 연구에 필요한 모든 도구를 제공하고 있다.

다른 유용한 기능은 Mathcad의 프로그램과 계산 결과 및 그래픽을 바로 워드프로세서에서 불러 쓸 수 있는 것이다. 본고에 쓰인 수식과 그래프는 Mathcad 문서를 rtf(rich text format) 형식으로 저장한 후 바로 아래 한글에서 읽어 들인 것이다. 또한 Mathcad는 이러한 문서를 바로 HTML/MathML형식으로도 저장할 수 있으므로, 웹(web)에 연구물을 게시하기 위해 수식 편집기를 별도로 이용하지 않아도 되므로 더 유용하다.

IV. 결 론

본 연구는 Mathcad 프로그램을 이용하여 영상 자료를 분석해 봄으로써 Mathcad의 교육, 연구용 도구로서의 적합성을 판단해 보고자 수행되었다.

분석한 내용은 스포츠 현상 중에서 가장 흔하게 일어나는 투사체 운동이었다. 높이뛰기의 바 넘기 동작에서의 정확한 이륙 초기 속도 벡터를 구하기 위해 전신 무게 중심의 변위 자료를 직선으로 회귀시켜 속도를 구하는 방법을 Mathcad로 프로그램하였다. 구해진 초기 속도 벡터와 초기 위치를 이용하여 바 접근 각도와 최대 도약 높이를 계산하였다.

Mathcad는 수학적 수식을 그대로 쓸 수 있어 필요한 계산을 손쉽게 수행할 수 있었으며, 자료 그래프를 위한 편리한 2차원, 3차원 그래픽 기능을 가지고 있어 인체 운동의 분석 도구로서 유용하게 쓰일 수 있음을 알 수 있었다.

운동역학의 교육 및 연구용으로 Mathcad의 이용이 더 보편화 될 경우, 운동역학 전공자들이 프로 그래밍 능력의 부족으로 인한 한계를 극복하는데 크게 기여할 것으로 판단된다.

참고문헌

- 성 낙준(2003). 높이뛰기의 도약 높이를 증가시키는 역학적 원리와 동작. *한국 운동역학회지*, 13(3).
- Dapena, J. (1980a). Mechanics of translations in the fosbury flop. *Medicine and Science in Sports and Exercise*, 12(1), 37-44.
- Mathsoft (2002). *Mathcad 11 user's guide*. Mathsoft Engineering & Education, Inc.
- Mathsoft (2003). *Mathcad data analysis extension pack : Cubic Splines*. Mathsoft Engineering & Education, Inc.
- Wood, G.A.(1982). Data smoothing and differentiation procedures in biomechanics. *Exercise and Sport science Review*, 10, 308-361.

투 고 일 : 10월 30일
 심 사 일 : 11월 4일
 심사완료일 : 12월 12일