

## 셸 구조물의 경계적분법

### A Boundary Integral Method for Elastic Shallow Shell

김진우\*

Kim, Jin Woo

#### ABSTRACT

This is a boundary integral formulation for elastic shallow shell structures subjected to both membrane and bending loads. Fundamental solutions for shell actions are determined from the plate solutions and, finally the corresponding kernel functions for shell BIEs can be constructed.

It is illustrated by solving an example of uniform load of spherical cap.

주요기술용어(주제어) : Singular Solutions for Shallow Shells(셸의 특이해), Kernels for BIEs(경계적분 방정식의 핵 함수), Curvatures of Shell(셸의 곡률)

#### 1. 서론

본 연구는 판구조 해석<sup>[1]</sup>용 경계요소법 구성 후 연속관심과제의 하나로 shell 구조 해석을 위한 경계요소법 구성을 주목적으로 한다. shell 구조해석은 그 기하학적 형태에서 나타나듯 판구조의 것과 달리 곡면의 곡률을 매개상수로 하여 평형지배 방정식들이 서로 종속되어 있어 적분방정식 구성에 있어 난제의 하나로 알려져 왔다<sup>[2]</sup>. 적분방정식의 kernel 함수는 본래 지배방정식의 homogeneous 상태를 만족하는 특이 기본해가 이용되나 shell의 경우 이제까지 알려진 기본해는 없는 실정이고 다만 무한다항식의 해로 근사대치되어 왔다. 본 연구에서는 기본적으로 Flugge<sup>[3]</sup>의 Kirchhoff plate와 shallow shell 구조의 횡하중 부근에 대한 탄성거동의 유사성을 가정하고

판구조 경계요소법에 사용되었던 기본해를 이용하였다. 이 경우 이들 기본해는 shell 구조 방정식을 만족시키지 못하는데 따른 잔류항 처리를 위한 소위 “residual loads” 근사법을 적용 shell 구조의 경계적분 방정식을 구성하였다. 기본 적분공식은 Betti의 상반일의 원리를 근거로 한 Somigliana 적분식을 수정하여 사용하였으며 kernel 함수와 대응되는 주변수는 판구조의 해석에서와 같이 일반화된 변위와 트래션 행렬을 규정화 하여 사용하였다<sup>[4]</sup>. shell구조의 기하학적인 제한으로 spherical, cylindrical cap 등 비교적 간단한 곡률 형태로 해석범위를 가정하였다. 다음장에서 shell의 기본지배 방정식과 주요 변수를 간단히 서술하였고, 경계적분 방정식의 공식과 일반화된 shell 변수들을 살펴보았다. 판구조의 기본해와 이를 “residual loads”법에 이용하여 shell BIEs의 kernel 텐서장을 구성하였으며 끝으로 수치해석단계의 행렬식을 구성하고 균일분포하중하의 spherical cap의 수치해를 계산하였다.

† 2004년 6월 17일 접수~2004년 7월 30일 심사완료

\* 육군사관학교 기계공학과(Korea Military Academy)

주저자 이메일 : jwkim@kma.ac.kr

## 2. Shell의 평형방정식

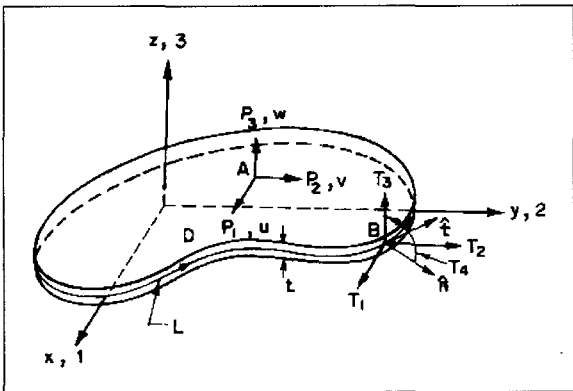
그림 1에 임의하중의 판의 경계치 문제가 주요 변수와 함께 해당 좌표계에 도시되어 있다. 또한 그림 2에 Shell의 일반적 형태가 곡물들을 중심으로 판과 비교하여 표시되었다. Shallow shell 중립면에서의 평형미분방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{j=1}^3 D_{ij} u_j + \frac{P_i}{c} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

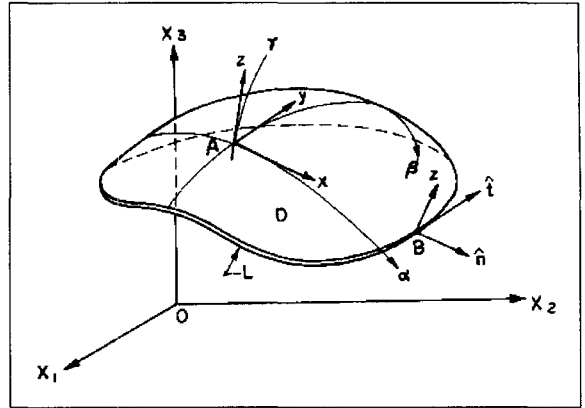
$$c = \frac{E t}{1 - \nu^2}$$

E : Young's Modulus  
 ν : Poisson's ratio  
 t : Plate thickness

식 (1)에서  $D_{ij}$ 는 대칭미분연산자로 아래 표 1과 같으며  $i=1,2$ 는 membrane 거동을  $i=3$ 은 굽힘거동의 지배방정식으로 2차 미분 또는 biharmonic 방정식이 포함됨을 알 수 있다. 이 shell 식들의 특징은 판 평형방정식과 달리 곡물을 매개상수로 하여 coupling 되어 있는 것이다. 즉 in-plane 하중의 membrane 거동과 굽힘거동이 서로 독립적이지 아니며 영향을 서로 주는 종속적이라는 것이다. 이것이 shell 응력해석의 경우가 판에 비해 복잡성을 가중시키는 요인이 됨을 알 수 있다.



[그림 1] Coordinates and Notations Associated with the General Plate Problem



[그림 2] Coordinate for Shell of General Shape

[표 1] Differential operator  $D_{ij}$  for shallow shells

$D_{11}$	$D_{22}$	$D_{33}$
$\nabla^2 - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$	$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$	$\gamma_1 k \frac{\partial}{\partial x}$
$\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$	$\nabla^2 - \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$	$-\gamma_2 k \frac{\partial}{\partial y}$
$\gamma_1 k \frac{\partial}{\partial x}$	$-\gamma_2 k \frac{\partial}{\partial y}$	$-(\gamma_3 k^2 + \frac{t^2}{12} \nabla^4)$

$$\gamma_1 = 1 + \nu \lambda, \quad \gamma_2 = \nu + \lambda, \quad \gamma_3 = 1 + 2\nu \lambda + \lambda^2$$

$$\lambda = \frac{k_2}{k_1}, \quad k = k_1$$

이때, 경계요소의 중립면에서의 응력은 Hooke의 법칙과 변형을 텐서의 정의로부터 다음식 (2)와 같이 나타낼 수 있으며 이들의 resultants는 식 (3)과 같으며 그림 3의 shell 내부 요소에 도시하였고 또한 대응되는 경계요소에서의 변수는 그림 4에 나타내었다.

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]$$

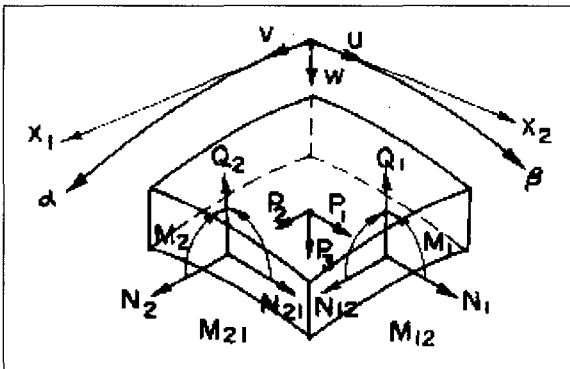
$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - z \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]$$

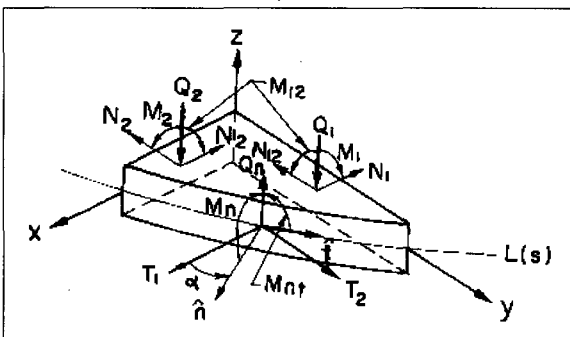
$$\begin{aligned}
 N_1 &= c \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + k(1 + \nu\lambda)w \right] \\
 N_2 &= c \left[ \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + k(\nu + \lambda)w \right] \\
 N_{12} &= \frac{1 - \nu}{2} c \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\
 M_1 &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\
 M_2 &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\
 M_{12} &= -(1 - \nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

c : extensional rigidity

$$c = \frac{E t}{1 - \nu^2}$$



[그림 3] Stress Resultants, Loads and Displacements on Shell Element



[그림 4] Forces Acting on a Boundary Element of a Plate or Shell

### 3. BIEs와 일반화 된 shell 변수

이 장에서는 shell의 membrane 거동과 굽힘거동해 석에 동시에 적용할 수 있는 경계적분식을 Betti의 상반일의 원리로부터 알아보고 이에 대응되는 일반화 된 shell 변수를 정의 하도록 한다.

선형탄성론의 Betti의 상반일의 원리는 두 탄성계, 즉 주변수계와 보조계 사이에 다음과 같은 가장 일반적인 변형에너지 형태로 나타낼 수 있다.

$$\int \int_D P_k^* U_k dD + \oint_L T_j^* U_j dS = \int \int_D P_k U_k dD + \oint_L T_j U_j dS
 \tag{4}$$

$j=1,2,3,4, k=1,2,3$  ( $P^*, U^*, T^*$ )

: Auxiliary system

이 식 (4)를 “BIEs의 해의 공식” 형태로 다시쓰면 아래와 같다.

$$F(P) = \oint_L (U_j T_j^* - T_j U_j^*) dS + \int \int_D U_k P_k^* dD
 \tag{5}$$

여기서

$$F(P) = \int \int_D P_k U_k^* dD
 \tag{6}$$

식 (6)은 shell 영역내의 하중함수의 경계치문제의 data로 결정되는 기지의 적분이 된다.

이제 문제는 “보조탄성계”를 결정하는 것이다.

이제까지 경계요소법 구성에 필요한 보조탄성계는 기본평형미분방정식의 homogeneous 상태에서부터 구할 수 있으며 잘 알려진 Kelvin해를 예로 들 수 있다. 보조해를 구하고 일반화된 변수의 향으로 나타내면 다음과 같은 두 탄성계로 정의할 수 있다.

	Auxiliary System	Primary System
displacements	$U^* = K_j = (u, v, w, \theta_n)^{(i)}$	$U_j = (u, v, w, \theta_n)$
traction	$T^* = J_{ij} = (T_1, T_2, V_n, M_n)^{(i)}$	$T_j = (T_1, T_2, V_n, M_n)$
surface loads	$P^* = T_{ik} = (P_1, P_2, P_3)^{(i)}$	$P_k = (P_1, P_2, P_3)$

(7)

정리하면 이 보충해는 기본적으로 homogeneous 상태의 지배방정식을 만족하며 하중(delta 하중)점에 대해서 Singular 거동을 보임을 실제로 잘 알 수 있다. 이들 식 (7)을 식 (6)에 대입하고 다음 식 (8)과 같은 BIEs를 얻을 수 있다.

$$\int \int_D U_k \Gamma_{ik} dD + \oint_{L'} U_j J_{ij} dS = \oint_{L'} T_j K_{ij} dS + F_i(P)$$

$$F_i(P) = \int \int_D P_k K_{ik} dD \quad (8)$$

$$(D' = D - D_e, \quad L' = L + L_e)$$

#### 4. Shell BIEs의 기본해

기본적으로 shell 지배방정식의 homogeneous 상태를 만족하는 해를 구한다는 것은 매우 어려운 일이며 이제까지 밝혀진 해는 없다. 다만 spherical shallow shell의 굽힘 집중하중의 해가 무한다항식의 형태로 Kelvin함수를(ker, kei) 다음과 같이 포함한다는 것이다.<sup>[3]</sup>

$$\text{ker}x = (a_0 + a_1 x^4 + \dots) \ln x + a_0' + a_1' x^2 + \dots$$

$$\text{kei}x = (b_0 + b_1 x^4 + \dots) x^2 \ln x + b_0' + b_1' x^2 + \dots \quad (9)$$

$$a_s', b_s' = \text{constants}$$

식 (9)는 x의 적은 값에 대하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\text{ker}x \approx a_0' + a_0 \ln x$$

$$\text{kei}x \approx b_0' + b_1' x^2 + b_0 x^2 \ln x \quad (10)$$

이때 극좌표계에 대한 변위해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{u} = c_1 P \left[ \text{ker}'(\bar{\alpha}r) + \frac{1}{\bar{\alpha}r} \right]$$

$$\bar{v} = 0$$

$$w = c_2 P \text{ kei}(\bar{\alpha}r)$$

$$c_1, c_2, \bar{\alpha} = \text{constants} \quad (11)$$

식 (11)의 형태와 탄성 평판에서 사용되었던 기본해(1)를 비교하면 서로 유사한 형태로 단순집중 하중하의 탄성거동은 평판이나 shallow shell의 거동이 하중점의 부근에서는 서로 근사하다는 결론을 내릴 수 있다. 문제는 shell구조에 평판의 기본해를 그대로 사용할 경우 homogeneous 지배 방정식을 만족하지 않아 소위 말하는 “residual loads”항이 kernel 함수 텐서장에 포함된다는 것이다. 이 residual loads 함수장은  $\Gamma_{ik}^*$ 라 하고 shell 방정식의 미분연산자를 적용시키면 다음과 같이 식 (8)의 BIEs에 적용할 수 있도록 구성할 수 있다.

$$\Gamma_{ik}^* = - \sum_j^3 D_{kj} K_{ij} \quad (12)$$

(i = 1, 2, 3, 4, k = 3)

$D_{kj}$  : 표 1의 미분 연산자

$K_{ij}$  : 평판 kernel 텐서장의 마지막 column(단위 모멘트 하중에 대한 변위장)을 제거한 변위의 kernels.

평판 경계요소 방정식에 사용되었던 kernels과 이를 이용하여 residual loads 방법으로 구성한 변위 및 트랙션 행렬은 Appendix에 나타나 있으며 식 (8)의 최종적인 적분 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{\lambda\}\{U\} + \int ([J]\{U\} - [K]\{T\})\{dS\} - [K']\{Q\} = 0 \quad (13)$$

여기서

$$\{U\} = \{U_1, U_2, U_3, U_4, U_1^*, U_2^*, U_3^*\}^T \quad (7 \times 1)$$

$$\{T\} = \{T_1, T_2, T_3, T_4, P_1, P_2, P_3\}^T \quad (7 \times 1)$$

$$\{dS\} = \{dS, \dots, dD, \dots\}^T \quad (7 \times 1)$$

또한  $\{Q\}$ 는 경계치 문제에서 하중이나 지지점 반력 등 경계조건을 포함한다.

식 (13)를 행렬식으로 구체적으로 다시 표현하면 아래와 같다.

$$[A] \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_1^* \\ U_2^* \\ U_3^* \end{pmatrix} + \int \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & 0 & 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ J_{21} & J_{22} & 0 & 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} & \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & \Gamma_{41} & \Gamma_{42} & \Gamma_{43} \\ J_{11} & J_{12} & 0 & 0 & \Gamma_{11}^* & \Gamma_{12}^* & \Gamma_{13}^* \\ J_{21} & J_{22} & 0 & 0 & \Gamma_{21}^* & \Gamma_{22}^* & \Gamma_{23}^* \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} & \Gamma_{31}^* & \Gamma_{32}^* & \Gamma_{33}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_1^* \\ U_2^* \\ U_3^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & 0 & K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} & 0 & 0 & K_{33} \\ 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & 0 & 0 & K_{43} \\ K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 & 0 & K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & K_{34} & 0 & 0 & K_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} \{dS\} = 0 \quad (14)$$

### 5. 예제 계산

수치해를 위한 예제로 그림 5에 나타난 것과 같은 균일분포하중하의 spherical cap 구조로 고정지지단의 문제이다. 이때 경계 및 하중조건은 다음과 같다.

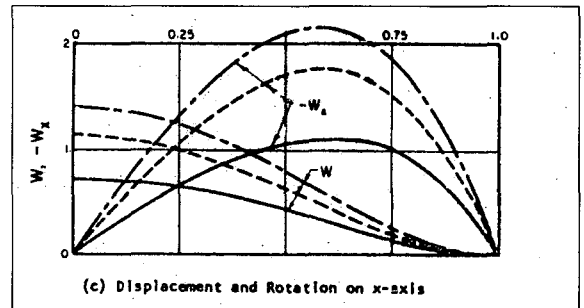
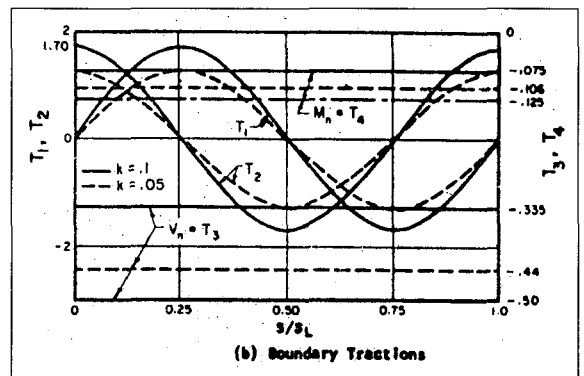
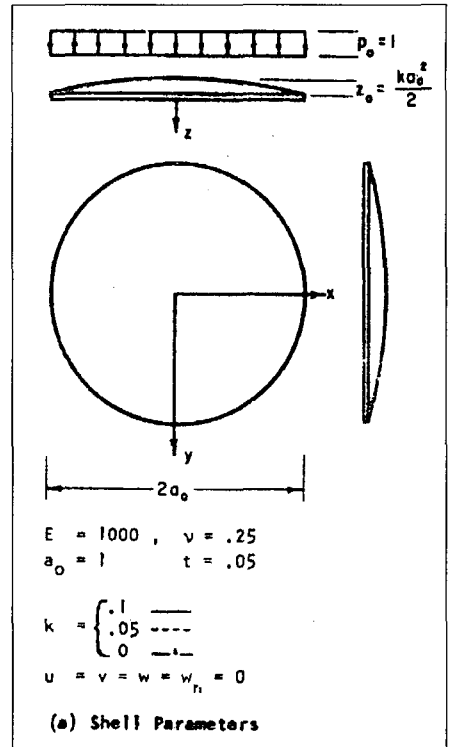
$$\begin{aligned}
 U_i &= 0 && \text{on } L \\
 P_1 &= P_2 = 0 \\
 P_3 &= 1
 \end{aligned}$$

k = 0.1, 0.05와 0에 대한 계산결과가 그림 5, 6에 도시되어 있다. 참고로 k = 0이면 원형평판의 문제로 볼 수 있다. 셸의 중앙과 경계에서 처짐과 응력 합력의 계산된 값들이 Wan<sup>[5]</sup>의 엄밀해와 비교하여 표 2에 나타나 있다.

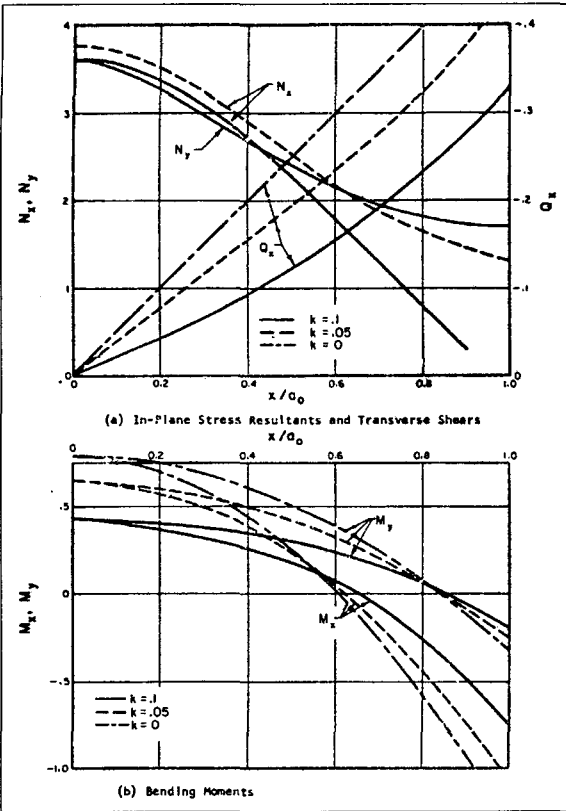
### 6. 결론

본 연구는 shallow shell 구조물 해석을 위한 경계 요소법 구성을 주목적으로 체계적인 모듈화 시스템 개발의 첫 이론 부분이다.

경계적분방정식 구성에 필요한 kernel 함수는 평판 구조해석용 기본해를 이용하여 “residual loads” 방법으로 shell 구조에 맞게 결정되었다. 이는 membrane



[그림 5] Spherical Cap with Uniform Load and Fixed Edge Support



[그림 6] Variation of the Stress Resultants on the x-axis for a Fixed, Uniformly Loaded Spherical Cap

[표 2] Deflection and Stress Resultants at the Center and Boundary of a Uniformly Loaded Spherical Cap with Fixed Edge

$k_1 = k_2 = 0.1, t = 0.05, \nu = 0.25$

Quantity	BIM	Exact	BIM	Exact
		(0, 0)	(a <sub>0</sub> , 0)	
w	0.732	0.752	0.0	0.0
N <sub>x</sub>	3.62	3.57	1.70	1.72
Q <sub>x</sub>	0.0	0.0	-0.338	-0.329
M <sub>x</sub>	0.0413	0.0397	-0.0748	-0.0740
M <sub>y</sub>	0.0413	0.0397	-0.0187	-0.0185

의 in-plane 거동과 굽힘거동이 서로 종속된 shell의 기본 방정식의 문제(판의 homogeneous해는 shell 평

형방정식을 만족시키지 못한다)를 해결하는 방법을 제시하므로써 최종경계요소 수치해석 단계를 가능하게 할 수 있었다.

### Appendix

Definition of Terms Appearing in the Expressions for the Kernels

Elastic and Geometric Constants

$$a = \frac{(1-\nu)^2}{3-\nu}, \quad b = 2 \frac{1+\nu}{1-\nu},$$

$$c = \frac{Et}{1-\nu^2}, \quad c_1 = \frac{3-\nu}{4\pi(1-\nu)},$$

$$c_2 = \frac{1}{4\pi}, \quad c_3 = -\alpha c_1,$$

$$c_4 = -\frac{1-\nu}{8\pi} D, \quad c_5 = -c_1,$$

$$D = \frac{Et^2}{12(1-\nu^2)}, \quad d = \frac{U}{D} = \frac{t^2}{12},$$

$$d_1 = \frac{1-\nu}{3-\nu} [3+\nu-(1-\nu)\lambda],$$

$$d_2 = -\frac{1-\nu}{3-\nu} [1-\nu-(3+\nu)\lambda],$$

$$d_3 = 2 \frac{1-\nu}{3-\nu} (1+\nu)(1-\nu),$$

$$\lambda = \frac{k_2}{k_1},$$

$$\gamma = \frac{1+\nu}{3-\nu}, \quad \mu = -\frac{6}{t^2} \frac{1-\nu}{3-\nu}$$

$$\gamma_1 = 1+\nu\lambda, \quad \mu_1 = \frac{12}{t^2(1-\nu)},$$

$$\gamma_2 = \nu+\lambda, \quad \mu_2 = \frac{5+\nu}{3-\nu},$$

$$\gamma_3 = 1+2\nu\lambda+\lambda^2$$

Quantities Involving the Derivatives of r

$$r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \frac{k^2}{4} [(x-x_0)^2 + \lambda(y-y_0)^2]^2$$

$$\begin{aligned}
 r_x &= \frac{x - x_0}{r}, & r_y &= \frac{y - y_0}{r}, \\
 r_z &\approx -\frac{k}{2}r(r_x^2 + \lambda r_y^2), \\
 r_n &= lr_x + mr_y, & r_t &= lr_y - mr_x - mr_y, \\
 r_\nu &= l_0 r_{x_0} + m_0 r_{y_0}, & r_\tau &= l_0 r_{y_0} - m_0 r_{x_0}, \\
 p &= r_x^2 - r_y^2, & q &= 2r_x r_y, \\
 p_1 &= r_n r_x - r_t r_y, & q_1 &= r_n r_y + r_t r_x, \\
 p_2 &= p_1 r_x - q_1 r_y, & q_2 &= p_1 r_y + q_1 r_x, \\
 p_3 &= p_1 r_n - q_1 r_t, & q_3 &= p_1 r_t + q_1 r_n, \\
 l &= \frac{\partial x}{\partial n} = \cos(\hat{n}, x), & m &= \frac{\partial y}{\partial n} = \sin(\hat{n}, x), \\
 l_0 &= \cos(\hat{\nu}, x), & n_0 &= \sin(\hat{\nu}, x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_{21} &= \frac{ca}{r}(-r_t + br_x r_y r_n) \\
 J_{22} &= \frac{ca}{r}r_n(1 + br_y^2) \\
 J_{23} &= kd(\lambda l J_{21,n} + m J_{22,n}) \approx 0 \\
 J_{24} &= kd(\lambda l J_{21} + m J_{22}) \approx 0 \\
 J_{31} &= ck(1 + \nu\lambda)lr^2 \ln r \\
 J_{32} &= ck(\nu + \lambda)mr^2 \ln r \\
 J_{33} &= -2\frac{cd}{r}[2r_{n+}(1 - \nu)(r_n - \kappa r)(r_n^2 - r_t^2)] \\
 J_{34} &= -cd[2(1 + \nu)\ln r + (3 + \nu)r_n^2 + (1 + 3\nu)r_t^2] \\
 J_{41} &= -ck(1 + \nu\lambda)lrr_\nu(1 + 2\ln r) \\
 J_{42} &= -ck(\nu + \lambda)mrr_\nu(1 + 2\ln r) \\
 J_{43} &= 2\frac{cd}{r^2}\{[3 - \nu - 2(1 - \nu)r^2](r_x r_\tau - r_n r_\nu) + 4(1 - \nu)(r_n - \kappa r)r_x r_\tau\} \\
 J_{44} &= 2\frac{cd}{r}[(1 + \nu)r_\nu + 2(1 - \nu)r_n r_t r_\tau]
 \end{aligned}$$

Expressions for Kernels of Integral Equations

Displacement Kernels,  $K_{ij}$

$$\begin{aligned}
 K_{ij} &= (u, v, w, -\frac{\partial w}{\partial n})^{(i)} & (i, j &= 1, 2, 3, 4) \\
 K_{11} &= \ln r - \gamma r_x^2 \\
 K_{12} &= K_{21} = -\gamma r_x r_y \\
 K_{22} &= \ln r - \gamma r_y^2 \\
 K_{33} &= r^2 \ln r \\
 K_{34} &= -rr_n(1 + 2\ln r) \\
 K_{43} &= -rr_\nu(1 + 2\ln r) \\
 K_{44} &= 2(r_n r_\nu + r_t r_\tau) \ln r + 3r_n r_\nu + r_t r_\tau
 \end{aligned}$$

otherwise  $K_{ij} = 0$

Traction Kernels,  $J_{ij}$

$$\begin{aligned}
 J_{ij} &= (T_1, T_2, V_n, M_n)^{(i)} & (i, j &= 1, 2, 3, 4) \\
 J_{11} &= \frac{ca}{r}r_n(1 + br_x^2) \\
 J_{12} &= \frac{ca}{r}(r_t + br_x r_y r_n) \\
 J_{13} &= kd(\lambda l J_{11,n} + m J_{12,n}) \approx 0 \\
 J_{14} &= kd(\lambda J_{11} + m J_{12}) \approx 0
 \end{aligned}$$

Residual Load Kernels,  $\Gamma_{ik}^*$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ik}^*(P_1, P_2, P_3)^{(i)} & & k &= 1, 2, 3 \\
 \Gamma_{11}^* &= -2c(\frac{r_z}{r})^2[1 + 2\gamma(r_x^2 - r_y^2)] \\
 \Gamma_{12}^* &= -8c(\frac{r_z}{r})^2 r_x r_y \\
 \Gamma_{13}^* &= ck\frac{r_x}{r}(d_1 - d_3 r_y^2) \\
 \Gamma_{21}^* &= -8c(\frac{r_z}{r})^2 r_x r_y \\
 \Gamma_{22}^* &= -2c(\frac{r_z}{r})^2[1 + 2\gamma(r_y^2 - r_x^2)] \\
 \Gamma_{23}^* &= ck\frac{r_y}{r}(d_2 - d_3 r_x^2) \\
 \Gamma_{31}^* &= -ck\gamma_1 r r_x(1 + 2\ln r) \\
 \Gamma_{32}^* &= -ck\gamma_2 r r_y(1 + 2\ln r) \\
 \Gamma_{33}^* &= ck^2\gamma_3 r^2 \ln r \\
 \Gamma_{41}^* &= -ck\gamma_1[l_0(l + 2\ln r) - r_\nu r_x] \\
 \Gamma_{42}^* &= -2ck\gamma_2[m_0(l + 2\ln r) - r_\nu r_y] \\
 \Gamma_{43}^* &= ck^2\gamma_3 r r_\nu(1 + 2\ln r)
 \end{aligned}$$

### 참 고 문 헌

- [1] 김진우, “탄성평판 굽힘문제를 위한 경계적분근사해” 한국군사과학기술학회지, 제5권 제4호, pp.57~66, 2002.
- [2] Tottenham, H. “The Boundary Element Method for Plates and Shells”, Developments in BEM, Vol. 1, pp.173~206, 1986.
- [3] Flugge, W. and Conrad, D. A., “Singular Solutions in the theory of Shallow shells”, Technical Report No. 101, Div. of Engineering Mechanics, Standford University, 1956.
- [4] 김진우, 신용석, “판구조물 해석을 위한 경계요소법 모듈화(I)”, 대한기계학회 '95년도 추계학술대회 논문집 (I), pp.253~256, 1995.
- [5] Wan, F. Y. M., “Membrane and Bending Stresses in Shallow Spherical Shells”, Technical Report 317, Lincoln Laboratory, M I T, August 1964.