

***p*-Version 비선형 유한요소모델링과 실험적 검증에 의한 팻취 보강된 RC보와 슬래브의 극한강도 산정**

Numerical Prediction of Ultimate Strength of RC Beams and Slabs with a Patch by *p*-Version Nonlinear Finite Element Modeling and Experimental Verification

우 광 성† 안 재 석* 박 진 환**

Woo, Kwang-Sung Ahn, Jae-Seok Park, Jin-Hwan

(논문접수일 : 2004년 5월 2일 ; 심사종료일 : 2004년 11월 23일)

요 지

팻취 보강된 철근콘크리트 구조물 해석을 위한 *p*-version 비선형 유한요소 모델이 제시되었다. 이방성 적층평판이론에 기초를 둔 제안된 모델은 Total Lagrangian기법에 기초한 von Karman의 대변형-소변형률 이론과 증분소성이론(incremental theory of plasticity)을 적용하였다. 콘크리트의 경화법칙(hardening rule)과 그에 따른 파괴기준을 고려하고, 단부 계면 충분리모델(plate-end interfacial debonding model) 즉, 보강판 끝 부분에서의 콘크리트 털락에 대한 기준으로서 Oehlers Model과 Raoof and Zhang Model을 사용하였다. 콘크리트는 두께 방향으로 층상화기법(layered model)이 이용되며, 철근과 보강판은 환산층(smeared reinforcing layer)으로 계산되도록 하였다. 적분형 르장드르 다항식이 형상함수로 사용되며, 절점에서의 응력값 산출을 위해 Gauss-Lobatto 수치적분법을 사용하였다. 본 연구의 목적은 *p*-version 유한요소법을 사용하여 RC구조물에 대한 수치해의 정확도 및 모델의 단순성을 높일 수 있도록 하였다. 따라서, 철근과 콘크리트모델에 대한 이론적 근거는 기존의 연구문헌에 근거를 두었으며, 수치해석의 적정성은 팻취 보강된 RC보와 슬래브에 대한 문헌의 실험치 및 해석치와 비교 분석되었다.

핵심용어 : *p*-version 비선형 유한요소모델, Gauss-Lobatto적분법, 이방성 적층평판, 단부 계면 충분리 모델

Abstract

A new finite element model will be presented to analyze the nonlinear behavior of RC beams and slabs strengthened by a patch repair. The numerical approach is based on the *p*-version degenerate shell element including theory of anisotropic laminated composites, theory of materially and geometrically nonlinear plates. In the nonlinear formulation of this model, the total Lagrangian formulation is adopted with large deflections and moderate rotations being accounted for in the sense of von Karman hypothesis. The material model is based on hardening rule, crushing condition, plate-end debonding strength model and so on. The Gauss-Lobatto numerical quadrature is applied to calculate the stresses at the nodal points instead of Gauss points. The validity of the proposed *p* version nonlinear finite element model is demonstrated through the load-deflection curves, the ultimate loads, and the failure modes of RC beams or slabs bonded with steel plates or FRP plates compared with available result of experiment and other numerical methods.

keywords : *p*-version nonlinear finite element mode, Gauss-Lobatto integration, anisotropic laminated composites, plate-end interfacial debonding model

† 책임저자, 정회원 · 영남대학교 토목공학과 교수
전화: 053-810-2593 ; Fax: 053-810-4662
E-mail: kswoo@yu.ac.kr

* 영남대학교 공업기술연구소 연구원 공학석사
** 영남대학교 공업기술연구소 연구원 공학박사

• 이 논문에 대한 토론을 2005년 3월 31일까지 본 학회에 보내주시면 2005년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

1. 서 론

강재나 콘크리트 재료로 된 구조물은 오랜 시간 경과됨에 따라 여러 형태의 손상을 입을 수 있다. 구조물에는 균열(crack), 피로(fatigue), 재료의 부식(corrosion), 패임(spalling) 및 탈락, 재료분리 등이 발생될 수 있는데, 하중과 경계조건 등에 따른 구조적 요인과 건조수축, 주변환경에 의한 부식 등의 비구조적 요인으로 대별된다. 이와 같이 손상 구조부재의 내하력을 향상시키기 위한 보수 및 보강법은 많은 구조기술자들에 의해 제안되어 왔다. 지난 20여 년 동안 여러 공학분야에서 복합 재료에 대한 연구가 진행되어 오고 있는데, 건설 분야에서는 1967년 RILEM Symposium에서 처음으로 강판을 이용한 RC구조물의 보강에 관한 연구가 소개된 이후 많은 연구가 진척되었으며¹⁾, 최근에는 섬유보강 복합재료(FRP; fiber reinforced plastic)가 중량에 비해 높은 강도 및 강성도, 탁월한 부식 방지능력, 그리고 우수한 파로특성을 가지고 있어서, 토목 및 건축분야에 적용빈도가 꾸준히 증가되는 추세이며, 주로 유리섬유, 탄소섬유, 금속섬유가 일반적으로 사용되고 있다. 그러나 현재 복합재료의 이론적 연구는 항공, 기계, 화공, 원자력 및 재료공학분야 등과 비교할 때 매우 낙후된 수준이다. 그 이유는 외국과 달리 학제간 연구가 미진하며, 대부분의 연구가 실험적 방법에 의존하고 있기 때문이다. 따라서 섬유보강 플라스틱(FRP)재료의 팻취 보강에 따른 내하력 증가나 처짐변화 등의 전체적 거동과 팻취가 접착되는 계면에서의 응력특이 및 계면박리 현상, 적층평판의 두께방향에 대한 응력분포, 층 분리(delamination), 팻취보강 합성구조물의 파괴기준 등을 포함한 미세적 거동을 설명할 수 있는 해석적 방법을 제시하여 보다 정확한 이론에 기초를 둔 복합재료의 해석 및 설계에 대한 필요성이 요구되고 있다.

한편, 해의 빠른 수렴성과 입력자료의 영향에 민감하지 않은 해의 통용성(robustness), 그리고 모델링의 단순성에 있어서 뛰어난 p-version 유한요소법은 많은 학자들의 관심과 홍미를 일으켰다. Edgar²⁾의 논문에 의하면 Legendre 형상함수가 p-version 유한요소법에 있어서 최적의 조건 수(condition number)를 나타내므로 수치적 안정에 기인하여 연산과정의 오차가 줄어든다고 밝힌 바 있다. 그러나 해당 문제마다 차이가 있고 일반적인 구조공학의 문제를 해석할 때에는 조건수의 차이가 해의 정도에 큰 영향을 미치는 것은 아니다. Legendre형상함수에도 내부모드의 선택 조건에 따라 라그랑지 세트(Lagrange set)와 시렌디피티 세트(serendipity set)로 대별되며 전단구속현상에 보다 강력히 대처할 수 있도록 새로운 형상함수인 “en-

riched-serendipity”가 제안되기도 하였다. Szabo와 Babuska에 의해 Legendre 형상함수를 이용한 p-version 유한요소법은 StressCheck과 ANSYS와 같은 첨단 상용 유한요소프로그램에 도입되어 그 사용 빈도가 증가하는 추세이며, 최근에는 비선형 문제에도 적용이 이루어지고 있다.³⁾

본 연구에서는 팻취 보강된 RC 구조물의 해석을 위한 p-version 유한요소 모델을 제시하였다. 기하 비선형의 경우 Total Lagrangian기법에 기초한 von Karman의 대변형-소변형률 이론을 사용했고, 재료비선형의 경우 증분 소성이론(incremental theory of plasticity)에 기초한 콘크리트의 항복기준과 경화법칙(hardening rule) 그리고 그에 따른 파괴기준을 사용했다. 또한, 보강판 끝 부분에서의 콘크리트 탈락에 대한 기준으로서 Oehlers Model과 Raoof and Zhang Model을 사용했다. 비선형 방정식의 해석은 Newton-Raphson법을 사용했고, Mawenya에 의해 제안된 층상화기법(layered model)을 사용하여 보의 두께 방향으로 여러 개의 콘크리트 층과 내부 철근층 그리고 보강층으로 나누어 평면응력 상태로 충분할 한 후, 각 층에 적합한 구성방정식을 적용하여 응력을 계산했다. 따라서, 두께에 따른 응력의 변화를 쉽게 파악할 수 있고 응력의 조합을 통해 모멘트를 계산하게 된다. 이때 각각의 보강층은 등가의 내부 철근층 및 외부 보강층으로 환산된다. 적분형 르장드르 다항식(integrals of Legendre polynomials)이 형상함수로 사용되며, 형상함수의 차수는 1차에서 10차까지 변화시킬 수 있도록 하였다. Gauss-Lobatto 수치적분법을 사용하여 절점 부근에서만 계산할 수 있었던 응력값을 절점에서도 응력값이 산출되도록 하였다. 제안된 p-version 모델의 정확성을 검증하기 위해 하중-변위곡선, 극한하중, 파괴모드, 콘크리트와 내부 철근 및 보강 재료의 응력 상태 등을 문헌의 실험치 및 해석치와 비교 분석했다.

2. 팻취 보강된 RC보를 위한 p-Version 비선형 모델

2.1 콘크리트 모델

콘크리트의 압축 상태에서의 항복, 소성 그리고 파괴 상태를 고려하기 위하여 소성유동 법칙에 기초한 비선형 응력-변형률 관계를 이용했다. 콘크리트의 유효응력 σ_0 를 평균 수직응력 불변량(mean normal stress invariant, I_1)과 전단응력 불변량(shear stress invariant, J_2)의 항으로 나타내면 식 (1)과 같이 표현되고, $\alpha (=0.355\sigma_0)$ 와 $\beta (=1.355)$ 는 재료상수이다.⁴⁾

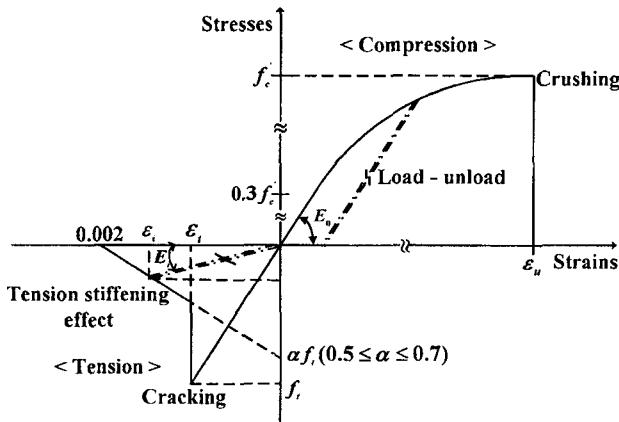


그림 1 콘크리트의 압축 및 인장 상태에서의 응력-변형률 곡선

$$f(I_1, J_2) = [\alpha I_1 + \beta(3J_2)]^{1/2} = \sigma_0 \quad (1)$$

그림 1에서 콘크리트는 압축상태의 극한응력 f_c' 의 30%까지 탄성 거동을 하는 것으로 가정하며, 그 이후의 응력 상태는 콘크리트의 유동법칙과 변형률 경화법칙을 고려하여 식 (2)와 같이 표현된다. ϵ_p 는 소성변형률, E_0 는 탄성계수, 그리고 ϵ_t 는 극한응력시의 변형률을 나타낸다.

$$\sigma_0 = -E_0\epsilon_p + \sqrt{2E_0^2\epsilon_u\epsilon_t} \quad (2)$$

소성이론과 손상이론이 연계된 소성-손상이론(plastic damage theory)에 의하여, 콘크리트 균열에 의한 강성 및 강도의 저하를 요소 내에 집중시키는 모델인 분산균열 모델(smeared crack model) 중에 전단응력 전달(shear transfer)이 축응력 변수에 영향을 받는다고 가정을 한 회전균열법(rotating cracked approach) 대신에 전단응력 전달을 독립적인 변수로 두는 고정균열법(fixed cracked approach)을 사용하였다.⁵⁾ 그래서 분산균열모델은 인장 모델, 압축모델, 전단응력 전달 모델로 각각 구성했다(그림 2). 그림 1에서 콘크리트의 주인장응력이 인장 강도 f_t 에 도달하면 주인장응력의 직각방향으로 제1균열이 발생하고 재료는 직교 이방성의 성질을 지닌다. 콘크리트 균열면에서의 전단응력 전달은 철근의 장부효과(dowel action)와 골재의 맞물림의 영향을 받는다. 분산균열모델에서는 이러한 현상을 고려하기 위해서, 콘크리트에 균열이 생기게 되면 균열시의 전단탄성계수값을 사용하게 된다. 식 (3)과 식 (4)는 제1균열과 제2균열이 발생한 후의 구성방정식을 표현한 것이다. 여기서, E_0 는 초기탄성계수, G_0 는 전단탄성계수, G_i ($i=1, 2, 3$)는 균열시의 전단탄성계수이다. 콘크리트의 변형률이 극한 변형률 ϵ_u 에 도달하면 콘

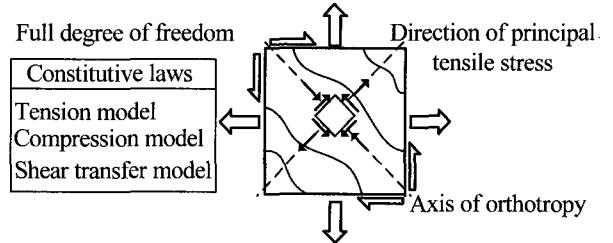


그림 2 분산균열모델(Smeared Crack Model - Fixed crack approach)

크리트는 압축 파괴된 것으로 간주하고, 콘크리트의 강도와 강성은 0이 된다. 그림 3은 콘크리트의 2차원 상태의 주응력 상태를 나타내며, 변형률경화 모델에 의해서 응력이 항복면을 지나게 되면 콘크리트에는 소성 변형률이 생기게 되고, 이에 해당하는 유효응력이 발생하게 된다. 콘크리트에 균열이 발생한 후, 인장강화 거동(tension softening behavior), 즉 콘크리트와 내측철근 사이의 부착효과를 나타내기 위해, 식 (6)에 의해 변형률 ϵ_i 의 크기에 따라 균열 후의 인장응력이 계산된다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.83G_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5G_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$G_1 = 0.25G \left(\frac{0.004 - \epsilon_1}{0.004} \right); \quad G_1 = 0 \quad (\epsilon_1 \geq 0.004)$$

$$G_2 = 0.25G \left(\frac{0.004 - \epsilon_2}{0.004} \right); \quad G_2 = 0 \quad (\epsilon_2 \geq 0.004) \quad G_3 = 0.5G_1$$

또는, $0.5G_2$ 를 중에서 작은 값 선택

$$\sigma_i = \alpha f_i \left(\frac{0.002 - \epsilon_i}{0.002} \right), \quad \epsilon_t \leq \epsilon_i \leq 0.002 \quad (6)$$

2.3 철근의 압축 및 인장 모델

철근은 축방향력으로만 힘을 전달할 수 있는 층으로 모델링하였다. 그럼 4는 철근의 항복 후 응력고원(stress plateau)은 완전소성이 아니라, 선형변형경화를 하는 것으로 가정한. 이상화된 철근 모델의 응력-변형률 곡선이다. 선형변형경화 함수는 식 (7)로 나타낸다.⁶⁾

$$H' = \frac{d\sigma}{d\epsilon_p} = \frac{d\sigma}{d\epsilon - d\epsilon_p} = \frac{EE_T}{E - E_T} \quad (7)$$

항복 후 철근의 강성도는 식 (8)과 같다.

$$K_{ep} = K \left(1 - \frac{E}{E + H'} \right) \quad (8)$$

2.4 FRP의 탄성 모델

그림 5는 FRP의 취성적 성질과 연강(mild steel)의 연성적 성질을 비교하여 나타낸 응력-변형률 곡선이며, 그림 6과 같이 FRP재료는 선형 탄성 재료로 이상화 시켜 모델링 하였다. 이것은 완전탄성체로서 보강재 파괴시까지 선형증가하며, 탄소섬유와 RC보가 완전 부착 거동을 하는 것으로 가정하였다.⁵⁾

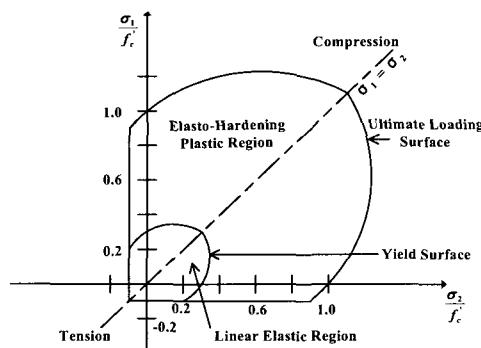


그림 3 콘크리트 구성 모델의 2차원 응력공간

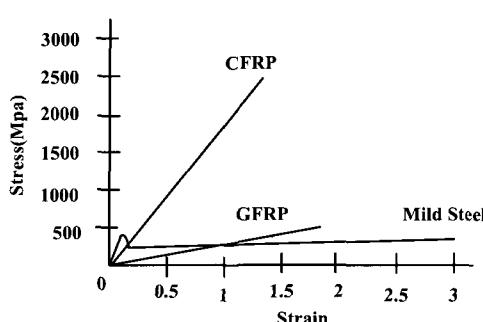


그림 5 CFRP, GFRP, Mild Steel의 응력변형률 곡선

2.5 보강판 단부의 강도 모델

하면을 보강한 RC보에 있어서 단부파괴의 경우는 보강재 또는 접착제의 응력집중에 의한 파괴 모드이다. 단부파괴에 관하여 제안된 식은 전단 모델(shear-capacity-based model), 콘크리트 아귀 모델(concrete tooth model), 계면응력 모델(interfacial stress-based model)로 나눌 수 있다. 강판보강의 경우 Oehlers, Jansze, Zhang, Raoof, 및 Ziraba 등에 의해서 여러 식이 제시되었다.⁷⁾ 본 연구에서는 이중에서 신뢰성 높은 모델인 Oehlers Model과 Raoof & Zhang Model을 채택하였다. 다음 모델에서 제시되는 식 (9,10,11)의 단위는 힘은 N, 길이는 mm, 그리고 응력은 Mpa이다.⁸⁾

2.5.1 Oehlers model

Oehlers model은 전단모델을 기본으로 했으며, 3점 또는 4점에 의해 휨 영향을 받는 RC보에 적용 가능하며, 콘크리트 덮개 탈락(concrete cover separation)과 콘크리트 계면 충분리(concrete interfacial debonding) 모두가 고려되어진 모델이다. 콘크리트 단부에서의 파괴 기준은 다음 식 (9)와 같고, d 는 콘크리트 단면의 유효깊이,

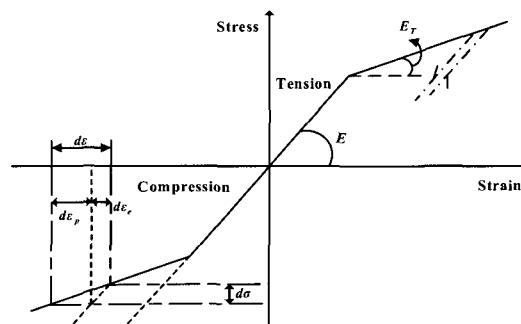


그림 4 내측 철근 모델의 응력-변형률 곡선

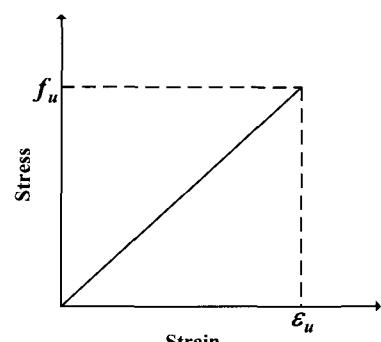


그림 6 이상화된 FRP의 탄성 모델

ρ_s 는 인장철근비, 그리고 f_c' 는 콘크리트 압축강도이다.

$$\tau_s = \left(1.4 - \frac{d}{2000} \right) (\rho_s f_c')^{\frac{1}{3}} \quad (9)$$

2.5.2 Raoof and Zhang model

Zhang은 콘크리트에 인장균열이 발생한 후, 두 개의 인접한 균열 사이에 있는 콘크리트 부분을 수평전단응력의 영향을 받는 하나의 캔틸레버 보라고 가정을 하였다(그림 7). 이때 콘크리트 균열 사이 부분(the root of the tooth)의 전단응력이 콘크리트의 인장강도를 초과하는 경우, 콘크리트는 탈락한다는 개념이며, 이것은 콘크리트 덮개 탈락이 발생할 때 적용 가능하다. 콘크리트 탈락시의 응력은 단부에서의 유효길이를 정의함으로써 얻을 수 있으며, 이 때 단부에서의 전단응력은 일정하다고 가정한다. 콘크리트 하면에서의 균열 최소 간격 l_{min} 은 다음 식 (10)과 같이 표현된다. 이때, A_c 는 인장력을 받는 콘크리트의 면적, f_{ct} 는 콘크리트 인장 강도, u 는 강판과 콘크리트의 평균 접착강도, ΣO_s 는 인장철근의 전체 직경, b_s 는 콘크리트 단면의 폭이다.

$$l_{min} = \frac{A_c f_{ct}}{u (\Sigma O_s + b_s)} \quad (10)$$

콘크리트와 강판 사이에서의 계면응력은 식 (11)과 같이 표현된다.

$$\tau_{sp} = \frac{f_{ct} l_{min} b_s}{6 h' b_s} \quad (11)$$

3. p -Version 유한요소 비선형 모델

3.1 퇴화 쉘 요소

RC슬래브 해석까지 가능하도록 3차원 응력과 변형률의 조건들이 중립면에서의 쉘거동으로 표현하여 적절한 가정

을 통해 2차원화시킨 퇴화 쉘 요소를 사용하였다. 3차원 연속체역학 방정식으로부터 유도되는 퇴화 쉘 요소는 다음 두 가지 가정을 하고 있는데, 첫째, 변형전 중립면에 수직인 면은 변형 후에도 직선을 유지하지만 수직일 필요는 없다. 둘째, 중립면에 연직인 변형에너지는 무시한다. 이를 가정에 의해 한 절점당 자유도는 5개이며, 임의의 절점 k 에서 3개의 직선변위(u_k^{mid} , v_k^{mid} , w_k^{mid})와 2개의 회전변위(β_{1k} , β_{2k})로 구분하며, 이를 5 자유도를 통해서 전단변형(transverse shear deformation)을 고려할 수 있도록 하였다. 단, RC보의 경우 u_k^{mid} , v_k^{mid} , β_{2k} 는 발생하지 않는 것으로 가정하였다.

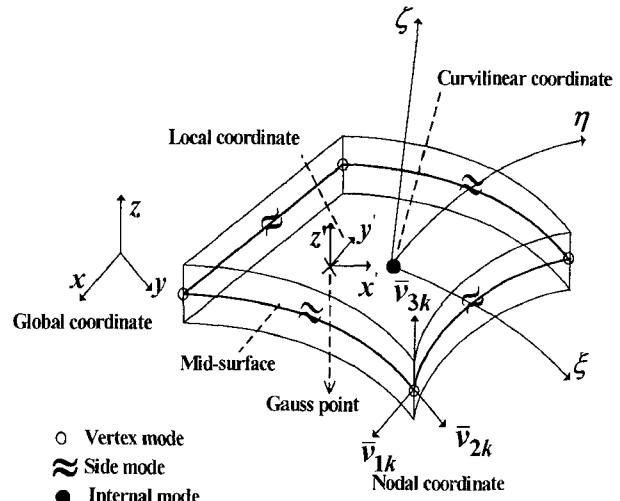


그림 8 퇴화 쉘요소와 좌표계

쉘 표면과 두께 방향으로 적분형 르장드르 형상함수(integrals of Legendre shape function, Ψ_k)를 사용하여, 임의점의 위치는 식 (12)와 같이 정의된다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^4 \Psi_k(\xi, \eta) \begin{bmatrix} x_k^{mid} \\ y_k^{mid} \\ z_k^{mid} \end{bmatrix} + \sum_{k=1}^4 \Psi_k(\xi, \eta) \frac{t_k}{2} \zeta \begin{bmatrix} \bar{v}_x^{3k} \\ \bar{v}_y^{3k} \\ \bar{v}_z^{3k} \end{bmatrix} \quad (12)$$

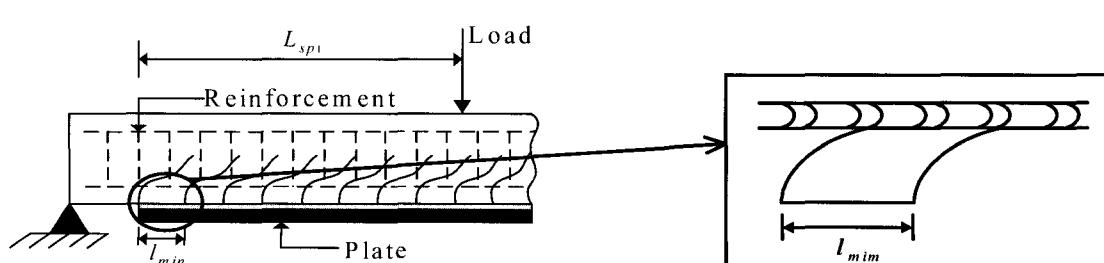


그림 7 휨 영향을 받는 보강된 RC보 단부에서의 인접한 콘크리트 균열

변위장은 직선변위와 회전변위의 영향을 받는 성분을 각각 고려하여 식 (13)과 같이 나타낸다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N_p} \Psi_k \begin{Bmatrix} u_k^{mid} \\ v_k^{mid} \\ w_k^{mid} \end{Bmatrix} + \sum_{k=1}^{N_p} \Psi_k \zeta \frac{t_k}{2} \begin{Bmatrix} \bar{v}_{1k}^x & -\bar{v}_{2k}^x \\ \bar{v}_{1k}^y & -\bar{v}_{2k}^y \\ \bar{v}_{1k}^z & -\bar{v}_{2k}^z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{1k} \\ \beta_{2k} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

여기서, $x_k^{mid}, y_k^{mid}, z_k^{mid}$ 는 임의의 k 절점에서 쉘 중앙 점의 전체좌표계를 사용한 위치, t_k 는 쉘의 두께를 나타낸다. N_p 는 형상함수의 차수 p 에 따른 요소내의 전체 절점 수이고, 이때의 요소는 저매개변수 요소(sub-parametric element)가 된다. N_p 의 결정은 식 (14)와 같이 생성된다.⁹⁾

$$N_p = \frac{p^2 + 3p + 6}{2} \quad p \geq 2 \quad (14)$$

3.2 C^0 -계층적 형상함수

p -version 유한요소 모델에서, 정규영역($-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1$)에서의 2차원 적분형 르장드르 형상함수(integrals of Legendre shape function, Ψ)는 절점모드(vertex mode), 주변모드(side mode), 내부모드(internal mode)로 분류된다. 절점모드는 형상함수 차수가 1차일 때, 4개의 절점에서 정의되는 절점형상함수(nodal shape function)이다. 이 경우는 h -version 유한요소법에서 사용하는 1차 Lagrangian 형상함수와 동일하다. 주변모드(side mode)는 형상함수의 차수가 2차 이상에서 발생하고, $4(p-1)$ 개의 형상함수가 생성되며, 이때의 형상함수는 적분형 르장드르 다항식(integrals of Legendre polynomial, Ω)에 의해 식 (15)와 같이 표현된다.

$$\Psi_i(\xi, \eta) = \Omega_i(\xi) \cdot \frac{1}{2}(1 \pm \eta) \quad (\eta = \pm 1, i \geq 2) \quad (15)$$

$$\Psi_i(\xi, \eta) = \Omega_i(\eta) \cdot \frac{1}{2}(1 \pm \xi) \quad (\xi = \pm 1, i \geq 2)$$

형상함수의 차수가 4차 이상에서 $(p-2)(p-3)/2$ 개의 형상함수가 요소 내부에서 생성된다. 즉, 거품모드(bubble mode)가 발생하는데 이것은 유한요소 해의 수렴조건 중 하나인 완전성(completeness)를 만족시켜 주기 위한 모드로 식(16)과 같이 정의되고, 요소의 변에서는 모두 0이 됨을 만족시켜준다.

$$\Psi_b = \Omega_i(\xi)\Omega_j(\eta), \quad i, j \geq 2 \quad (16)$$

여기서, $p = i + j$ 가 되며 $p=4$ 일 때, $i=2$ 는 $j=2$ 이며, $p=5$ 일 때 $i=3$ 는 $j=2$ 그리고 $i=2$ 는 $j=3$ 이 된다. 첨자 b 는 거품모드 형상함수의 순서를 나타낸다.

3.3 Gauss-Lobatto 수치적분

유한요소모델에서 수치적분을 위한 적분점 수는 사용된 형상함수의 차수와 밀접한 관계를 가지고 있으며, 그 필요성에 관해서는 Dey¹⁰⁾에 의해서 연구되어졌다. n 차원 p -version 유한요소모델에서의 최적의 적분점 수 e_n 은 식 (17)과 같이 정의된다.

$$e_n = \left(\frac{3p-1}{2} \times \dots \times \frac{3p-1}{2} \right)_{ntime} \quad (17)$$

현재까지 많이 이용되는 수치적분으로 Gauss-Legendre 적분법이 있는데, 이 적분법은 재료비선형 문제의 경우에는 적용성에 문제점이 있을 수 있다. 즉, 변위는 요소의 절점에서 계산되는 반면, 응력은 적분구간(-1, 1)에서 계산된다. 따라서 Gauss 적분점에서 응력이 탄성상태인지 탄소성 상태인지를 항복기준으로 판별하게 되며, 절점의 응력값은 일반적으로 Bilinear Extrapolation법을 사용하게 된다. 이때 외삽된 절점에서의 응력값은 근사적인 값이며 실제 항복했는지 여부는 불분명하게 된다. 특히, 균열의 선단과 같은 특이성 문제에서는 절점의 정확한 응력값이 필요하게 된다. 이에 비해, Gauss-Lobatto 적분법을 사용하면 적분구간[-1, 1]에서 적분을 수행하게 되어, 요소의 양 끝단 절점에서의 응력값을 직접 계산할 수 있다. 일반적인 수치적분식은 식 (18)과 같다.

$$\int_{-1}^1 f(\xi) dx_i = \sum_{i=0}^{s-1} \omega_i f(\xi_i) + R(f) \quad (18)$$

여기서, Gauss-Lobatto 수치적분은 적분점의 위치 ξ_i , 해당 적분점에서 가중치 w_i , 적분오차 $R(f)$ 를 식(19~21)에서 각각 정의한다.

$$\xi_i = \begin{cases} -1 & i=0 \\ \xi_{i-1,s-2}^{1,1} & i=1, \dots, s-2 \\ 1 & i=s-1 \end{cases} \quad (19)$$

$$w_i^{0,0} = \frac{2}{s(s-1)[L_{s-1}(\xi)]^2} \quad (20)$$

$$R(f) = 0 \quad (f(\xi) \in U_{2s-3}([-1,1])) \quad (21)$$

여기서, s 는 적분점의 수, L 은 르장드르 다항식(Legendre polynomial), U 는 다항식의 좌표공간을 의미한다¹⁰⁾.

4. 하면에 보강된 RC보의 파괴모드

그림 9는 하면에 보강한 RC보의 파괴모드를 여러 실험 결과에 의해서 총 7가지로 분류한 것이다. 이러한 파괴 거동은 RC보의 재료 및 기하학적 성질, 보강판, 접착제, 그리고, 인장 또는 전단 철근의 양 등 여러 가지 요인에 의해 결정되어지는데, (a)는 휨에 의한 FRP의 파괴 (b)는 압축에 의한 콘크리트의 crushing, (c)는 전단파괴, (d)와 (e)는 보강판 단부 탈락(plate-end debonding failure), (f)와 (g)는 중간 부분에서의 균열로 인한 계면 층분리(intermediate crack-induced interfacial debon-

ding)이다. (f)와 (g)의 경우는 빈번하게 일어나는 파괴모드는 아니지만, Saadatmanesh, Lopez, Bonacci, Rahimi 등에 의해서 발표된 적이 있다.⁷⁾ 보강판 단부 탈락인 경우 가장 빈번하게 일어나면서, 특히 RC구조물이 극한 상태에 도달하기 전에 보강판 끝부분에 콘크리트 균열이 발생함과 동시에 갑작스럽게 구조물의 사용성과 내구성에 문제를 발생시켜, 결국 취성파괴를 일으킨다. 그림 10에서 σ_x , σ_y , τ 는 보강판 단부에 있는 콘크리트에 발생하는 축방향응력 및 전단응력, peeling응력을 각각 나타낸다. 특히 전단응력이 많은 영향을 미치고 있다. 그림 11은 Smith가 h -version FEM으로 해석한 보강판 단부에서의 전단 및 peeling 응력 분포를 표현한 것이다.⁷⁾

4.1 Concrete cover separation

이 파괴양상은 Ritchie, Sharif, Garden, Tumialan, Nguyen 등 많은 연구자들에 의해서 가장 많이 보고되어진 파괴형태이다.⁷⁾ 접착면에서 멀리 떨어진 콘크리트 부분의 탈락으로 생기는 이 파괴모드는 보강판 끝부분에 응력집중으로 인해 발생하지만, 엄밀히 말하면 debonding failure mode라고 말할 수는 없다. 왜냐하면 끝부분에 발생한 콘크리트의 인장균열이 높은 계면응력의 영향을 받음으

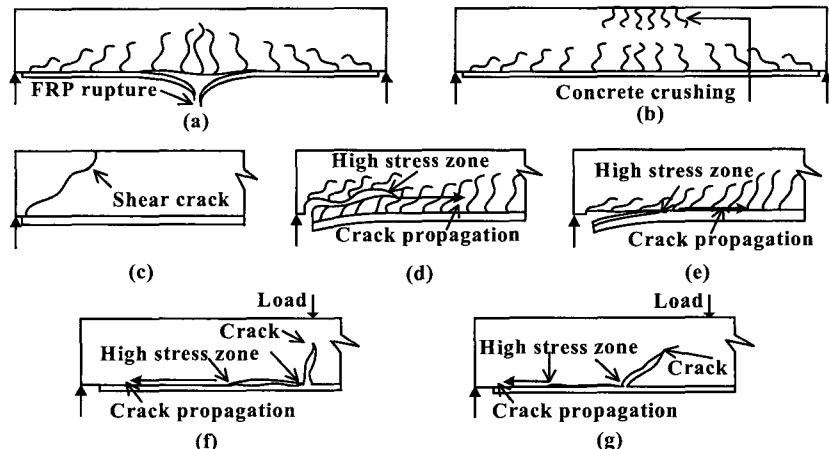


그림 9 하면에 보강한 RC빔의 파괴 모드

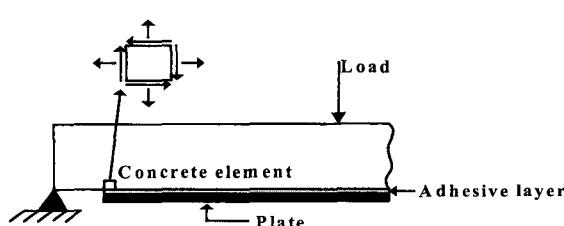


그림 10 보강판 단부근처의 응력

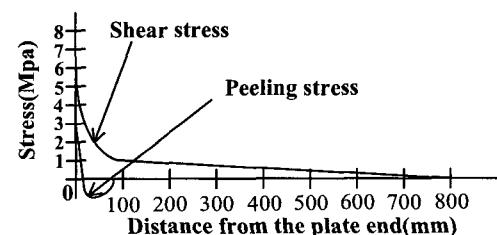


그림 11 계면 전단응력 및 peeling stress

로써, 콘크리트의 균열이 내측 철근까지 전진되고, 결국 콘크리트가 내측 철근 방향으로 철근 아래쪽에 있는 콘크리트 대부분이 벗겨지는 박리현상이 발생하기 때문이다. 결국 이러한 거동을 함으로써, 보강한 RC구조물이 설계되어진 한계상태에 도달하기 전에 국부적인 파괴가 발생하게 된다.

4.2 Plate-end interfacial debonding

보강판 단부에 발생하는 높은 계면 전단응력에 의해 발생한다는 점에 있어서 Concrete cover separation과 유사한 파괴 모드이지만, 이 모드의 특징은 보강판 단부에서 접착면의 분리가 전진되어진다는 것이다. 물론, 이러한 파괴 형태가 나타날 때는 접착층에서 분리가 일어나기보다는 콘크리트층, 접착층, 보강층 중 가장 약한 부분인 콘크리트의 끝부분에 분리가 발생한다. 하지만, 하면에서 내측철근까지의 콘크리트가 함께 탈락하는 concrete cover separation 형태와는 분명히 다르다. 이러한 파괴모드는 Saadatmanesh, Quantril과 Taljsten 등에 의해 보고되고 있다.⁵⁾

5. 수치예제

5.1 하면에 보강한 RC보

Ritchie¹²⁾이 실험 및 수치해석을 수행했던 보강된 RC보를 대상으로 하여 무보강, 강판보강, 탄소섬유복합재보강, 그리고 부분강판보강 4가지 경우에 대해서 해석을 수행했

고, 이들을 각각 Beam A, B, C, D로 정하였다. 보의 기하형상 및 모델링은 그림 12와 같다. 무보강인 Beam A와 강판과 탄소섬유복합재의 보강효과를 보기 위해서 Beam B와 Beam C가 해석되었으며, 하면에 보강된 RC보의 주요 파괴모드 중의 하나인 보강판 단부의 탈락 현상을 규명하기 위하여 Beam D가 해석되었다. 해석 모델은 기하학적 형상과 보의 대칭성을 고려하여 8개의 p-version 요소로 모델링하였고, Z축 방향으로는 등가단층이론을 적용하여 콘크리트 10개층, 철근 1개층, 보강(steel plate or FRP) 1개층으로 모델링하였다. RC보 또는 슬래브의 p-version 모델의 수렴성 조사에 의하면 3차 또는 4차 이상에서 결과치가 수렴한다고 밝힌 바 있다.³⁾ 그래서 본 연구의 예제에서는 요소의 차수를 5차로 고정하였다. Gauss-Lobatto 적분법의 적분 차수는 9×9을 사용하였으며, 각 재료의 물성치는 표 1과 같다.

표 1 재료의 물성치 (단위: kN, cm)

콘크리트			
탄성계수	2548	인장강도	0.35
프라송비	0.18	극한변형률	0.003
압축강도	4.29	인장강성계수	0.6
	내측철근	CFRP	강판
탄성계수	20000	5443	20000
항복 후 탄성계수	200	.	200
항복응력	41.16	61.3	20.7
X축과 이루는 각	0	0 / ±1.0472	0

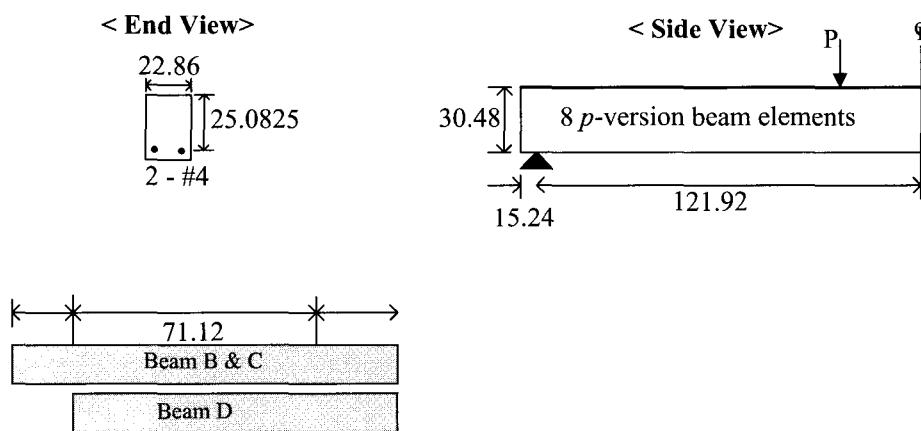


그림 12 하면에 보강된 RC보의 기하학적 형상과 유한요소 모델

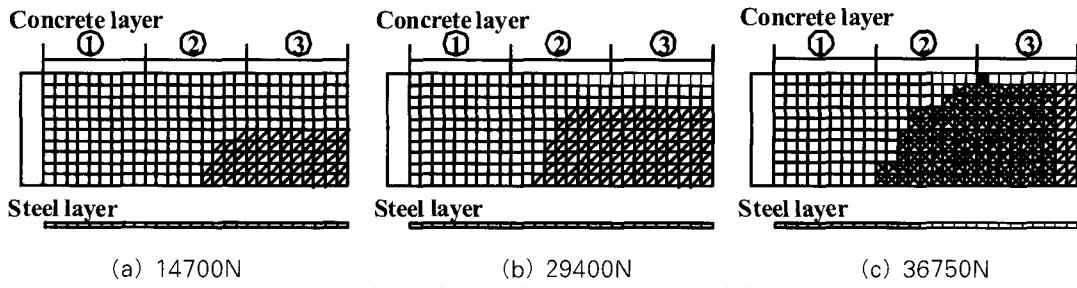


그림 13 하중증가에 따른 Beam A의 상태

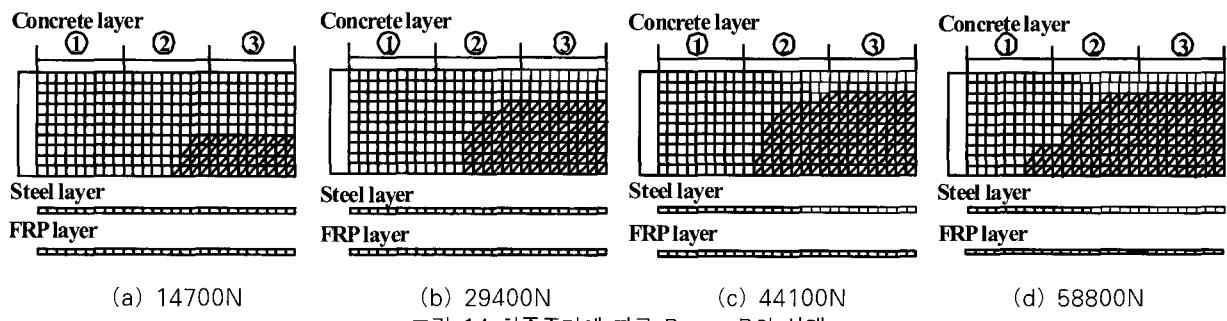


그림 14 하중증가에 따른 Beam B의 상태

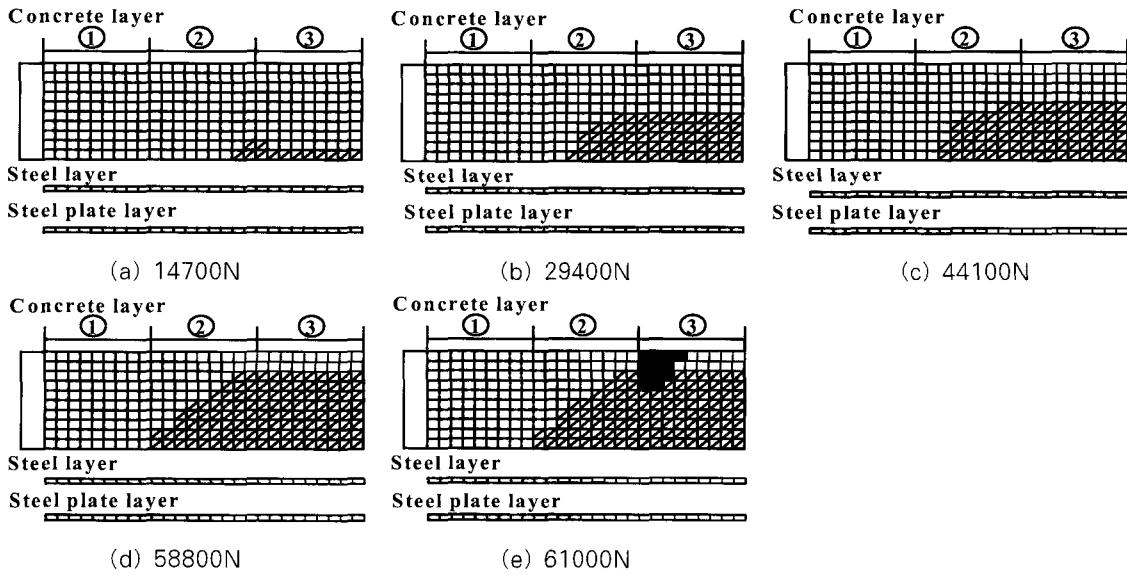
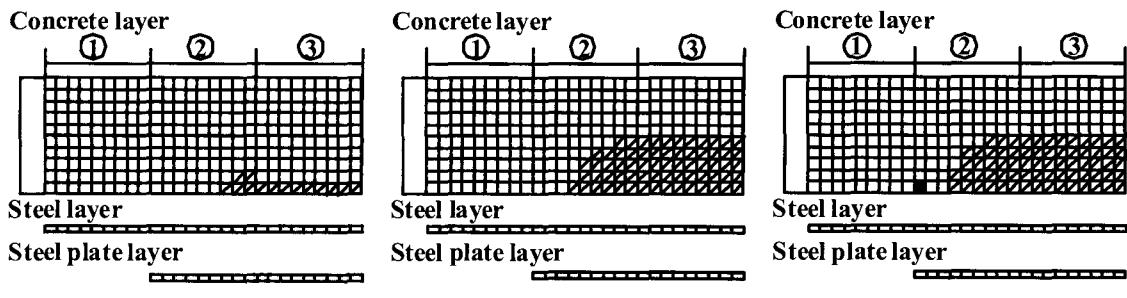


그림 15 하중증가에 따른 Beam C의 상태



(b) 29400N

그림 13~16은 해석한 보에 대한 하중단계별 상태를 나타낸 그림이다. 그림에 나오는 기호인 □, ▨, ■, ▨, □, ▨, ■은 재료의 탄성 상태, 콘크리트 1방향 균열, 콘크리트 2방향 균열, 콘크리트의 압축에 의한 소성, 보강재료(철근 또는 강판)의 소성상태, 재료의 파괴(failure)를 각각 나타낸다. Beam A의 경우, 문헌의 실험에 의한 파괴모드는 압축측 콘크리트 부분에 파괴가 일어난다고 했다. 본 연구에서의 수치해석 결과, 하중 36750N에서 하중이 재하되는 부근의 가장 위쪽 layer층에서 파괴(crushing)가 일어나는 것을 확인할 수 있었으며, 이때 중앙지점으로부터 단부방향으로 66cm떨어진 거리까지의 철근이 항복되어 있었다. 그리고 이때 내측 철근의 대부분은 항복된 상태였다(그림 13). Beam B의 경우, 실험에서는 FRP의 취성파괴에 의하여 구조물이 한계상태에 도달했다. 해석결과 58800N에서 하중재하지점의 아래쪽 부분에 있는 FRP에서 파괴를 확인할 수 있었다. 그리고, 이때 내측철근은 Beam A의 극한상태보다 더 많은 부분이 탄성거동을 하고 있었다(그림 14). Beam C의 해석결과 61000N에서 재하지점 부근 위쪽 층에서 압축응력으로 인한 파괴(crushing)가 일어나는 것을 확인할 수 있었으며, 이는 실험에서의 파괴모드인 압축측의 파괴(crushing)가 일어나는 것과 동일했다. 이때 유한요소해석 결과에서는 내부 철근은 중앙지점에서부터 단부방향으로 58cm까지 외부강판은 66cm까지 항복되어진 상태임을 확인할 수 있었다(그림 15). Beam D의 경우 실험에서는 강판 끝부분에서 전단파괴가 일어났다. 유한요소해석결과 34300N에서는 RC구조물이 인장이나 압축에 의해 극한 응력에 도달하지 않았음에도 불구하고, 강판 끝부분에 전단응력의 집중현상이 발생하여 보강판 단부의 탈락 현상이 발생하고 있음을 확인할 수 있다(그림 17). 특히, Oehlers model과 Raoof and Zhang model에 의해, 내측철근을 따라 콘크리트가 탈락하는 콘크리트 덮개 탈락 현상이 발생하고 있음을 알 수 있었다. Beam A~D의 문헌의 실험 그리고 Ritchie의 제안한 수치해석 및 p-version 유한요소해석에 의한 극한하중 및 보강효과에 대한 수치는 표 2와 같다.

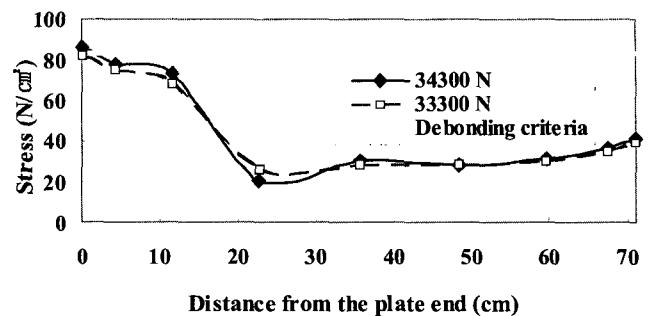


그림 17 Beam D의 보강판 끝부분의 전단응력

보강한 RC보의 단부에서의 전단응력의 집중현상에 대한 해석은 Smith⁶⁾에 의해 h-version FEM을 이용하여 특히, 단부에서의 복잡한 모델링을 통하여 그림 11과 같은 보강판 끝부분에서의 거리와 전단응력 사이의 관계 그래프를 얻었다. 이 그래프에서는 단부에서 멀어질수록 전단응력은 0으로 수렴하고 있음을 알 수 있다. 본 연구에서 해석한 그래프(그림 17)는 단부에서의 특별히 복잡한 모델링을 거치지 않고서도 응력집중현상을 표현하여 가능성 있는 값을 얻을 수 있었다. 하지만, 단부에서 멀어질수록 낮은 값을 나타내고는 있지만 0으로 수렴하지 않고 있다. 이는 본 연구에서 해석한 모델이 한 요소안에서 절점이 같고 층이 같다면 응력은 동일하다는 등가단층이론에 의해 해석되어 콘크리트의 인장측 가장 아래층이 인장강화효과에 의해 크지는 않지만 전단응력을 받고 있다고 해석되기 때문에 Smith⁶⁾의 해석과는 다르게 전단응력이 0으로 수렴하지 않는다. p-version FE모델에 의해 해석한 극한하중 산정이 Beam A~C에 대해서는 문헌의 실험결과와 유사한 결과가 나타나고 있지만, Beam D에 대해서는 차이를 나타내고 있다. 이것의 파괴형태는 실험과 같은 양상을 보이지만, 본 해석모델은 보강판과 콘크리트 부착 부분이 완전부착이라는 가정하에 해석한 관계로 실험결과보다 전단응력값이 과대해석되어 실현값보다 초기에 파괴가 일어나는 경향을 나타내었다. 그림 18은 Beam A~D에 대한 실험 및 p-version FEM으로 해석한 Beam중앙에서의 처짐을 비교한 것이다. 보강한 보의 경우, 극한 강도면에서 보강

표 2 각 보에 대한 극한강도 산정

(단위: kN)

항목 종류	Iterative analytical method	실험	p-version FEM	실험값과의 차이(%)		보강효과 (p-version/실험)
				Analytical	p-version	
Beam A	28.34	36.46	36.80	22.2	-0.9	.
Beam B	64.92	63.97	58.80	-5.9	4.1	+22.00/+27.51
Beam C	53.70	63.16	61.00	15.0	3.46	+24.2/+26.7
Beam D	54.03	46.68	34.30	-15.8	26.5	-2.8/+10.22

효과가 현저히 나타나고 있음을 보이고 있으며, 파괴시에 보강한 보는 무보강 보에 비해서 취성적인 성질이 있음을 실험과 FEM 해석한 그래프 모두에서 알 수가 있다. 그림 19는 각각의 보에 따른 내측에 있는 인장철근의 응력을 하중 단계별로 표시한 것이다. 기울기가 첫 번째로 변하는 지점은 4개의 보 모두 동일한데 이는 콘크리트의 항복하중을 나타낸다. 그리고, Beam C의 경우 두 번째 기울기가 꺾이는 지점은 내측 철근이 항복하는 지점을 나타낸다. 탄성구간에서는 무보강 보와 보강한 보의 차이가 없지만, 비선형 구간에서는 보강한 보에서 같은 하중상태에서 인장철근이 받는 응력이 무보강 보에 비해서 작게 나타나고 있음을 알 수가 있다. Beam C와 D의 경우, 그림 15와 16에서도 같은 하중 상태에서 거의 비슷한 응력상태를 나타내고 있으며, 그림 19에 나타나듯이 두 보의 경우, 외측 강판의 길이의 차이는 있지만, 내측철근의 거동은 같다는 것을 확인 할 수 있다. 결국 보강한 길이의 차이는 구조물의

전체적인 거동에는 크게 영향을 미치지 않지만, 결국, 그림 17에 나타나듯이 debonding strength model에 의해 구조물이 국부적으로 조기 파괴(failure)됨을 알 수가 있다.

5.2 하면에 보강한 RC슬래브

Zhang¹³⁾에 의해 실험된 집중하중을 받는 하면에 강판 보강된 RC 슬래브를 해석하였다. 사용된 재료는 표 3과 같고, 슬래브의 기하형상은 그림 20과 같다. 네 변을 따라 단순지지 되어 있는 실험된 시편의 유한요소모델은 기하학적인 형상을 고려하여 9개의 p-version 요소를 사용하였다. 그리고, 슬래브 두께 방향으로 8개의 콘크리트 층과 4개의 철근 층으로 구성하며, 또한 강판층은 x, y축에 대한 보강효과를 모두 고려하기 위해 2개의 층으로 분할하였다. 요소의 차수와 적분 차수는 RC보의 예제와 동일하게 사용하였다.

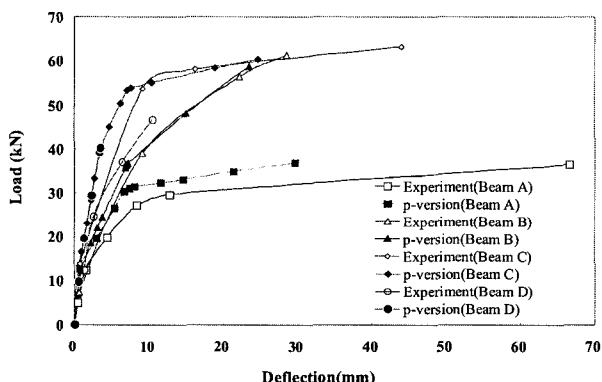


그림 18 하중-변위 곡선

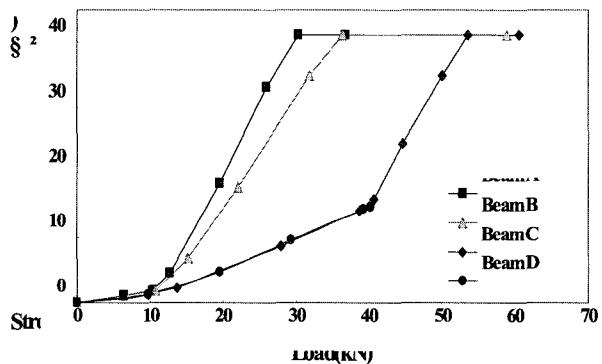


그림 19 하중단계별 내측철근의 응력

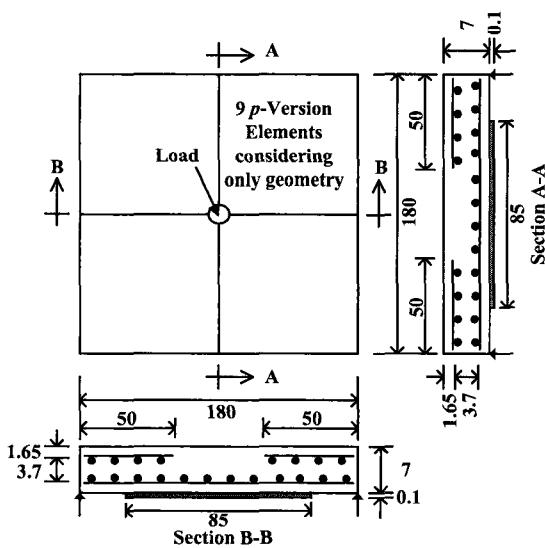


그림 20 강판 보강된 RC슬래브의 기하학적 형상과 유한요소 모델 (단위: cm)

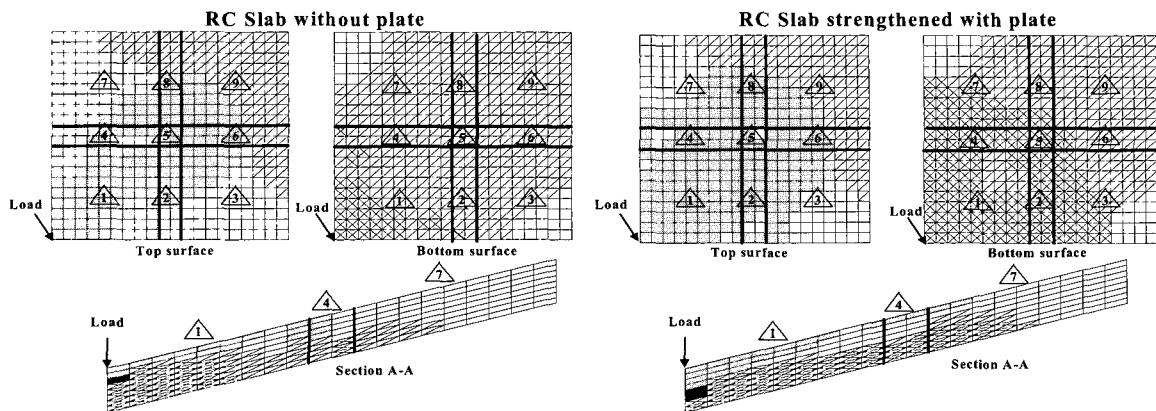


그림 21 극한하중 단계에서의 콘크리트의 응력 상태

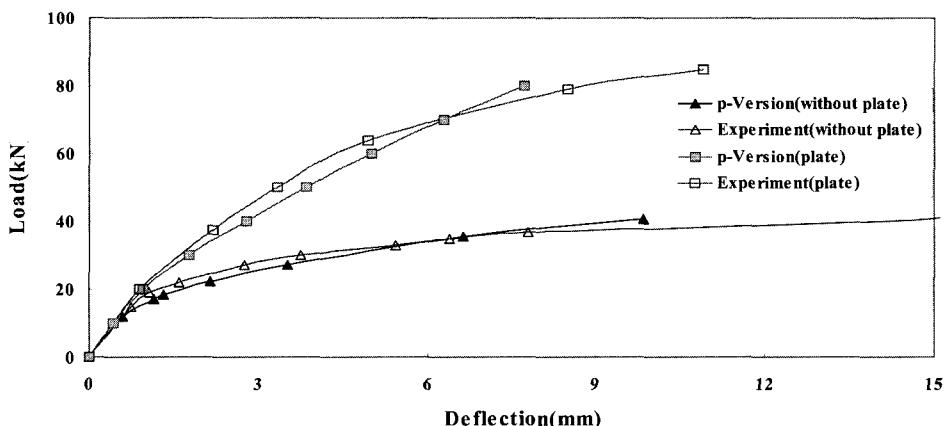


그림 22 하중-변위 곡선

그림 21에서 하면에 보강하지 않은 슬래브와 강판으로 보강한 슬래브의 윗면과 아래면 그리고 A-A단면에 대해서 극한하중상태의 응력을 나타내었다. 두 슬래브 모두 극한하중 상태에서 항복선을 형성하면서 하중이 재하되는 부분의 아래에 있는 콘크리트에서 파괴가 일어남을 확인할 수 있다.

표 3 재료의 물성치 (단위: kN·cm)

콘크리트			
탄성계수	2415	인장강도	0.28
프아송비	0.18	극한변형률	0.003
압축강도	2.64	인장강성계수	0.6
	내측철근	강판	
탄성계수	20100	20100	
항복 후 탄성계수	201	201	
항복응력	34	33.5	
X축과 이루는 각	0/±1.5708	0/±1.5708	

그림 22는 두 슬래브에 대하여 실험 및 p-version 해

석 결과로부터 얻은 슬래브의 중앙부 하단에서의 하중-변위 곡선을 나타낸 것이다. 무보강인 슬래브와 보강한 슬래브 두 가지의 경우에 있어서 실험값과 p-version 유한요소 해석에 의한 하중-변위 곡선의 양상이 비선형 구간에서 약간의 차이를 나타내고 있지만, 전반적으로 잘 재현되었음을 알 수 있다. 실험, 항복선이론(yield line method) 및 p-version 유한요소해석에 의한 극한하중 값을 표 4에 나타내었다. 항복선 이론에 의해 산출된 값보다는 p-version 유한요소법에 의해 산출된 값이 실험에 의해 구해진 값에 더 가깝게 나타나고 있음을 보여주고 있다.

표 4 무보강 슬래브 및 보강 슬래브의 극한 강도 산정

(단위: kN)

종류 항복	실험 (P_e)	Yield line method (P_y)	p-version FEM (P_f)	오차	
				$(P_y - P_e)/P_e$	$(P_f - P_e)/P_e$
무보강 슬래브	55	37	41	-32.7	-25.4
보강 슬래브	85	67.5	80	-20.6	-5.9

6. 결 론

팻취 보강된 RC보와 슬래브 해석을 위해 비선형 p -version 적층 헬요소가 제안되었다. 모델링의 단순성 같은 p -version 모델의 장점이 팻취 보강된 RC보와 슬래브 해석에서도 발견되었다. 특히, 응력집중이 발생하는 경우, 팻취 보강된 RC보의 콘크리트와 강판의 계면에서 전단응력 분포를 복잡한 모델링 과정을 거치지 않고서도 가능성 있는 값을 얻을 수 있었으며, 하중 단계별로 콘크리트의 내부 상태 및 보강재료의 상태를 어느 위치에서든지 확인할 수 있었다. 극한 하중에 관해서, 보와 슬래브 모두 실험 결과와 1~20% 내외의 오차가 발생했으며, 다른 수치해석 결과와 비교해 보았을 때, 실험값에 더 근접한 값을 얻을 수 있었다. 본 연구는 팻취 보강된 RC구조물의 새로운 이론적 관점을 나타내는 것보다는 여러 실험과 이론적인 관점에서 제시된 debonding strength model을 고려한 p -version 유한요소모델의 적용성을 시도한 연구이며 향후 본 연구에서 제안된 모델을 이용하여 부착층에 대한 모델, 철근의 배근 방향, 복잡한 기하 형상을 가진 구조물의 해석, 국부적인 상세해석(detail analysis)에 효율적으로 이용될 수 있는 연구라 할 수 있다.

감사의 글

본 연구는 한국과학재단에서 실시한 지역대학우수과학자 지원연구사업(R05-2003-000-10321-0)의 연구비 지원에 의해 수행되었으며, 이에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

1. Jansze, W., "Strengthening of reinforced concrete members in bending by externally bonded steel plates", *Delft University of Technology*, 1997
2. Edgar, N.B., Surana, K.S., "On the conditioning number and the selection criteria for p -version approximation functions", *Computers & Structures*, Vol. 60, 1996. pp.521~530
3. 우광성, 박진환, 홍종현, " p -version 유한요소법에 의한 철근콘크리트 슬래브의 극한하중 산정", 대한토목학회논문집, 제23권, 제1A호, 2003, pp.103~111
4. Hinton, E., Owen, D.R.J., "Finite element software for plates and shells", Pineridge Press Limited, Swansea U.K., 1984
5. Maekawa, K., Pimanmas, A., Okamura, H., "Non-linear mechanics of reinforced concrete", Spon Press, London, 2003
6. Owen, D.R.J., Hinton, E., "Finite elements in plasticity : theory and practice", Pineridge Press Limited, Swansea U.K., 1980
7. Teng, J.G., Chen, J.F., Smith, S.T., Lam, L., "FRP strengthened RC structures", John Wiley & Sons Ltd., 2002
8. Smith, S.T., Teng, J.G., "FRP-strengthened RC beams I: review of debonding strength models", *Engineering Structures*, Vol.24, 2002, pp.385~395
9. Woo, K.S., Hong, C.H. and Basu, P.K. "Materially and geometrically nonlinear analysis of laminated anisotropic plates by p -version of FEM", *Computers & Structures*, Vol.81, 2003, pp.1653~1662
10. Dey, S., Shephard, M.S., Flaherty, J.E., "Geometry representation issues associated with p -version finite element computations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.150, 1997, pp.39~55
11. Spencer, J., "Sherwin, Spectral/hp Element Methods for CFD", Oxford University Press, New York, 1999
12. Ritchie, P.A., Thomas, D.A., Lu, Le-Wu and Connelly, G.M. "External reinforcement of concrete beams using fiber reinforced plastics", *ACI Structural Journal*, Vol.88, No.4, 1991, pp.490~500
13. Zhang, J.W., Teng, J.G., Wong, Y.L., Lu, Z.T., "Behavior of two-way RC externally bonded with steel plate", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol.127, No.4, 2001, pp.390~397