Journal of the Korean Society of Water and Wastewater
Vol. 18, No. 3, pp. 351-356, 2004

상하수도학회지, 논문
18권 3호, pp.351-356, 2004

응집지 속도경사(G) 계산에 대한 이론적인 고찰

Theoretical Approach to Calculating rms-Velocity Gradient in Flocculators

김자겸*

Kim, Ja-Kyum*

한국수자원공사 수도관리1처

(2004년 2월 16일 접수, 2004년 4월 20일 최종수정논문 채택)

Abstract

Selecting appropriate *G* values in flocculator operation is important to produce high quality filter effluent in water treatment plants. However, misunderstanding and misleading of *G* calculation for the case of having power sources more than one or many paddles with one power source in a flocculation basin sometimes have led to low performance in flocculation. Theoretical analysis confirmed that the total *G* value in one flocculation unit having power sources more than one or with many paddles is the root-square of the sum of square of individual *G* value. This analysis also can give a simple calculation method of *G* value for designers and operators in fields.

Key words: flocculation, particle, velocity gradient, G, paddle, shear rate
주제어: 응집, 입자, 속도경사, 패들, 전단율

1. 서론

응집공정은 정수처리공정 중에서 응집제를 이용하여 전기적으로 불안정화된 탁질을 더욱 크게 만드는 물리적인 공정이다. 만들어지는 탁질의 최적 크기는 응집공정 이후의 공정에 따라 다르지만 혼화공정에서 형성된 탁질의 크기로는 후속되는 침전공정이나, 용존공기부상공정(DAF) 및 여과공정에 적절하다고 할 수는 없다. 따라서 후속공정의 최적화를 위하여는 불안정화된 수중의 입자들을 크게 만드는 공정이 필요하다. 이러한 응집공정의 최적화는 후속되는 침전공정뿐만 아니라 여과공정에 지대한 영향을 미친다. 최근에 더욱 엄격해진 수질 기준인 정수처리에관한기준(2002)을 준수하기 위하여는 여과공정뿐만 아니라 전단의 응집공정의 최적화도 동시에 이루어져야 한다는 점을 고려할 때 응집공정에 대한 논의는 시의 적절하다고 하겠다.

응집공정의 최적화를 위하여는 공정에 영향을 미치는 인자에 대한 최적화가 필요한데 설계에서나 응집시설 운영에 사용되는 물리적인 인자 중에서 가장 일반적으로 사용된 인자는 속도경사로서 대부분의 시

*Corresponding author Tel.: +82-42-629-2808, Fax: +82-42-629-2849 Email: jakyum@kowaco.or.kr (Kim, J.K.)

설의 설계나 운영의 지표로 오랫동안 사용되어 왔다. 하지만 한 개의 응집지에 두 개 이상의 응집기가 격벽없이 설치된 경우와 같이 한 응집지에 두개 이상의 에너지원이 있는 경우, 혹은 한 개의 에너지원에 여러 개의 패들이 달린 경우에 이에 대한 명확한 해석이 없어 설계나 운영에 혼란을 가져왔으며, 최근 발간된 일부 서적(Kawamura, 2000)에서의 속도경사에 대한 잘못된 적용은 사용자로 하여금 그 혼란을 더욱 가중시킨 것이 사실이다.

이 논문에서는 속도경사에 대한 이론적인 해석을 통하여 속도경사 계산에 있어서 혼란을 바로잡고 잘못 적용된 사례에 대한 수정의 근거를 제시함으로써 응집공정의 적절한 설계 및 운영에 도움을 주고자 한다.

2. 응집공정의 이론적인 고찰

응집공정의 설계나 운영에 지표로 사용되는 G는 일반적으로는 속도경사라고 불리지만 엄밀히 말하면 식 (1)에서 보는 바와 같이 평균속도경사의 제곱근(root-mean-square velocity gradient)으로서 Camp and Stein(1943)이 처음 제시하였다.

$$G = \sqrt{\frac{P}{\eta V}} \tag{1}$$

여기서 P: Power, η = 점성계수, V = 반응조의 체적

Camp and Stein(1943)이 제시한 응집효율식은 식 (2)로 표현되며, 식에서 보는 바와 같이 응집효율에 중요한 영향을 미치는 인자는 속도경사인 G값과 입자의 농도 및 크기에 있다.

$$N = \frac{1}{6} N_1 N_2 G (d_1 + d_2)^3 \tag{2}$$

여기서 N: 단위시간당 충돌횟수, N_1: 단위체적당 지름 d_1인 입자의 수, N_2: 단위체적당 지름 d_2인 입자의 수, G: 속도경사.

Camp and Stein(1943)은 난류상에서 발생하는 응집효율식을 구하기 위하여 균일한 층류상태를 가정한 Smoluchowski가 제안한 응집효율식(1917)을 이용하였다. 하지만 고전적인 응집이론에서 제시하는 바와 같이 응집효율에 영향을 미치는 입자운반공정은 브라운운동에 의한 분산(Brownian diffusion), 유체전단(fluid shear), 그리고 속도차 침강(differential sedimentation)등으로서 Camp and Stein(1943)이 응집효율에 가장 영향을 많이 미친다고 생각하여 제시한 G값이 주요인자인 유체전단 이외에도 많은 인자가 효율에 영향을 미치고 있다. 이에 대하여 Clark (1985)는 Camp and Stein(1943)이 난류영역에서의 G값을 유도할 때 잘못된 가정을 사용하였다고 주장하였으며, Han and Lawler(1992)에 의하면 고전적인 직선모델(rectilinear model)에서 응집의 효율에 영향을 미치는 기작으로 알려진 유체전단(fluid shear)에 비하여 다른 두개의 기작인 속도차 침강(differential settling)이나 브라운운동에 의한 영향이 상대적으로 저평가되었다는 것을 수학적으로 증명하고, 이를 수정한 곡선모델(curvilinear model)을 제시하였다. Han and Lawler (1992)의 곡선모델에 따르면 충돌하는 입자의 크기가 1μm 이상인 경우에 그리고 두 입자의 크기가 비슷할 때는 유체전단(G값)이 중요한 기작이 되지만 입자의 크기가 1μm 이하인 경우에는 브라운운동에 의한 확산이 지배적인 기작이 된다는 것을 이론적으로 증명하였다.

하지만 응집지에서 형성되는 플락은 단단한 구의 형태보다는 눈송이와 같은 프랙탈 구조를 가지고 있어 실제적인 수리학적인 성질은 이 직선 모델과 곡선모델 사이에 있는 것으로 나타났다(Johnson et. al., 1996 and Li & Yuan, 2002). 또한 응집효율에 온도가 미치는 효과가 생각해온 것 보다는 크다는 것은 정수시설에서 동절기에 수온에 맞는 G값을 설정하여도 같은 조건에서의 하절기 응집효율보다 낮아 정상적인 운영에 상당한 어려움을 주고 있는 것으로 나타나 응집효율에는 단순히 유체전단기작 이외에도 많은 요소가 작용하고 있다는 것을 시사한다.

그러나 응집공정에서 일반적인 조건에서 1μm 이상의 크기를 가진 입자들에 대하여 가장 영향이 큰 인자는 유체전단에 의한 orthokinetic flocculation (O' Melia, 1978) 이며, 실질적으로 정수시설에서 조정이 가능한 요소는 유체전단에 의하여 지배를 받는 G값 밖에는 없는 실정이다. 따라서 이 논문에서는 현실적

상하수도학회지, 논문
18권 3호, pp. 351-356, 2004

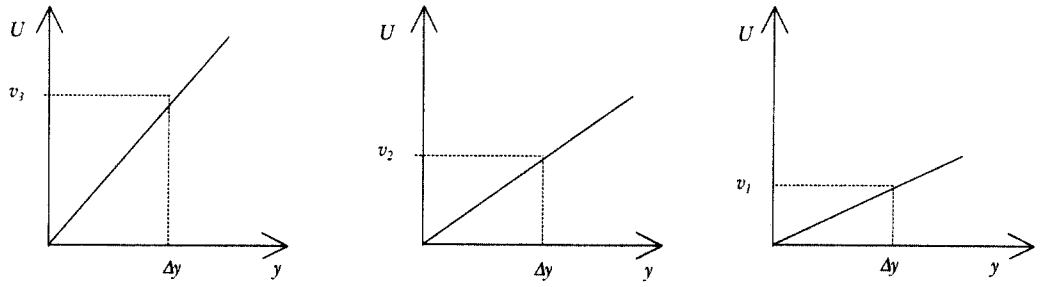

Fig. 1. Newtonian fluid의 가정 및 서로 다른 3개의 속도경사

으로 응집효율의 최적화를 달성할 수 있는 유일한 수단인 G값이 응집효율의 최적화를 달성할 수 있는 가능한 현실적인 수단으로 보고 이에 대한 이론적인 고찰을 전개한다.

G값의 정의는 위에서 정의한 대로 평균속도경사의 제곱근이며, 전단율의 제곱근과 같은 의미를 가지기 때문에 물리량으로 취급하여 1:1로서 더하거나 뺄 수는 없다. 하지만 설계시나 운영시에 G값에 대한 잘못된 이해로 한 지에 여러 개의 응집기가 있거나 한 개의 축에 여러 개 패들이 달린 경우에 전체 전체 G값을 구하는 경우에 각각의 G값을 합산하는 우를 범하여 혼란을 주고 있다. 이에 대한 대표적인 오류는 Kawamura의 최근 판인 "Integrated Design and Operation of Water Treatment Facilities, 2nd ed.(2000)"의 131페이지에 기재된 것으로서, 패들형 응집기의 전체 G값을 구하기 위하여 각 패들의 G값을 합산한 데서 볼 수 있다.

3. 논의 및 결론

이론적인 해석을 위한 가정으로는 우선 적용되는 유체는 Newtonian 유체로서 거리와 유체의 속도는 정비례관계에 있다는 것이다. 두 번째 가정은 주어진 거리인 Δy에 대하여 두개 이상의 속도경사가 한 개의 응집지에 존재한다는 가정이다. 이번 검토에서는 이론 전개의 편이상 3개의 다른 속도경사가 한 개의 반응조내 존재하는 것으로 가정하였다. 이 두개의 가정은 **Fig. 1**과 **Fig. 2**에 잘 나타나 있다.

y축상의 거리 Δy에서의 각 각의 속도경사는 다음 식 (3)로 표현할 수 있다. 그리고 각 구성요소에 대한 전단변형(shear strain) 및 전단율(shear rate)은 식 (4)와 (5)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{v_1}{\Delta y},\ \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{v_2}{\Delta y},\ \frac{\partial u_3}{\partial y} = \frac{v_3}{\Delta y} \tag{3}$$

전단변형(shear strain):

$$\gamma_1 = \frac{\Delta \chi_1}{\Delta y},\ \gamma_2 = \frac{\Delta \chi_2}{\Delta y},\ \gamma_3 = \frac{\Delta \chi_3}{\Delta y} \tag{4}$$

전단율 (shear rate):

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{d}{dt}(\gamma_1)\ \ and\ \ \dot{\gamma}_2 = \frac{d}{dt}(\gamma_2),\ \dot{\gamma}_3 = \frac{d}{dt}(\gamma_3) \tag{5}$$

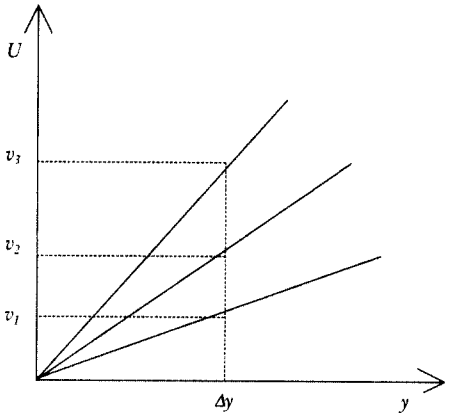

Fig. 2. Fig. 1.의 서로 다른 3개의 속도경사를 한 점에서 작용한다고 가정한 경우

이때 Δy는 상수이므로 식 (5)의 전단율은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta\chi_1}{\Delta y}\right) = \frac{1}{\Delta y}\frac{d}{dt}(\Delta\chi_1) = \frac{v_1}{\Delta y} \tag{6}$$

같은 방식으로 요소 2와 3에 대한 전단율도 다음과 같이 변환시킬 수 있다.

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{v_2}{\Delta y} = \frac{du_2}{dy},\quad \dot{\gamma}_3 = \frac{v_3}{\Delta y} = \frac{du_3}{dy}$$

그리고 전단강도(shear stress) σ_1는 Newtonian 유체에서 $F_1/A = \eta\dot{\gamma}_1$의 형태로 나타낼 수 있으므로 다음 식 (7)와 같이 전개할 수 있다. (F_1: force, A: 면적)

$$\sigma_1 = \eta\dot{\gamma}_1 = \eta\frac{d}{dt}\gamma_1 = \eta\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta\chi_1}{\Delta y}\right) = \frac{\eta}{\Delta y}\frac{d\Delta\chi_1}{dt} \tag{7}$$

이때 구성요소 2와 3에 대하여 전단강도에 대한 정의한대로 표현할 수 있다.

$$\sigma_2 = \eta\dot{\gamma}_2 = \frac{\eta}{\Delta y}\frac{d\Delta\chi_2}{dt},\quad \sigma_3 = \eta\dot{\gamma}_3 = \frac{\eta}{\Delta y}\frac{d\Delta\chi_3}{dt}$$

그리고 각 구성요소을 구동시킨 힘에 의한 일은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$W_1 = F_1\Delta\chi_1 = \sigma_1 A\Delta\chi_1,\ W_2 = F_2\Delta\chi_2 = \sigma_2 A\Delta\chi_2$$
$$W_3 = F_3\Delta\chi_3 = \sigma_3 A\Delta\chi_3 \tag{8}$$

이때 한 일에 대한 미분을 적용하면 다음 형태로 표현할 수 있다.

$$\dot{W}_1 = \frac{dW_1}{dt} = \frac{d}{dt}(\sigma_1 A\Delta\chi_1) = A\frac{d}{dt}(\sigma_1\Delta\chi_1),$$
$$\dot{W}_2 = A\frac{d}{dt}(\sigma_2\Delta\chi_2),\ \dot{W}_3 = A\frac{d}{dt}(\sigma_3\Delta\chi_3) \tag{9}$$

하지만 이 경우는 한 일의 양이 서로 다르므로 수행한 일의 전체 양은 다음과 같이 표현할 수 있으며 각 항에 해당하는 식 (8)을 대입하면 다음과 같이 전개된다.

$$W_{total} = W_T = W_1 + W_2 + W_3$$
$$\dot{W}_T = \frac{dW_T}{dt} = \frac{d}{dt}(W_1 + W_2 + W_3)$$
$$= \frac{d}{dt}(\sigma_1 A\Delta\chi_1 + \sigma_2 A\Delta\chi_2 + \sigma_3 A\Delta\chi_3)$$
$$\dot{W}_T = A\frac{d}{dt}(\sigma_1\Delta\chi_1 + \sigma_2\Delta\chi_2 + \sigma\Delta\chi_3)$$
$$= A\left\{\frac{d\sigma_1}{dt}\cdot\Delta\chi_1 + \sigma_1\frac{d\Delta\chi_1}{dt} + \frac{d\sigma_2}{dt}\cdot\Delta\chi_2\right.$$
$$\left.+\sigma_2\frac{d\Delta\chi_2}{dt} + \frac{d\sigma_3}{dt}\cdot\Delta\chi_3 + \sigma_3\frac{d\Delta\chi_3}{dt}\right\}$$

여기서 식 (4)의 각 요소를 변환하여 $\Delta\chi_1 = \gamma_1\Delta y$, $\Delta\chi_2 = \gamma_2\Delta y$, $\Delta\chi_3 = \gamma_3\Delta y$, 를 대입하면,

$$\dot{W}_T = A\left\{\frac{d\sigma_1}{dt}\cdot\gamma_1\Delta y + \sigma_1\frac{d(\gamma_1\Delta y)}{dt} + \frac{d\sigma_2}{dt}(\gamma_2\Delta y)\right.$$
$$\left.+\sigma_2\frac{d(\gamma_2\Delta y)}{dt} + \frac{d\sigma_3}{dt}\cdot\gamma_3\Delta y + \sigma_3\frac{d(\gamma_3\Delta y)}{dt}\right\} \tag{10}$$

다시 여기서 $\frac{d}{dt}(\gamma_1\Delta y) = \frac{d\gamma_1}{dt}\Delta y + \frac{d\Delta y}{dt}\cdot\gamma_1$ 이고 Δy는 상수이므로 $\frac{d}{dt}(\gamma_1\Delta y) = \dot{\gamma}_1\Delta y$, $\frac{d}{dt}(\gamma_2\Delta y) = \dot{\gamma}_2\Delta y$, $\frac{d}{dt}(\gamma_3\Delta y) = \dot{\gamma}_3\Delta y$ 로 나타낼 수 있다.

그러므로 위의 식 (10)을 다시 전개하면,

$$\dot{W}_T = A\{\frac{d\sigma_1}{dt}(\gamma_1\Delta y) + \sigma_1\dot{\gamma}_1\Delta y + \frac{d\sigma_2}{dt}(\gamma_2\Delta y)$$
$$+\sigma_2\dot{\gamma}_2\Delta y + \frac{d\sigma_3}{dt}(\gamma_3\Delta y) + \sigma_3\dot{\gamma}_3\Delta y\}$$

이때 식 (4)와 같이 $\sigma_1 = \eta\dot{\gamma}_1$, $\sigma_2 = \eta\dot{\gamma}_2$, $\sigma_3 = \eta\dot{\gamma}_3$이므로,

$$\dot{W}_T = A\Delta y\eta\{\gamma_1 \frac{d\dot{\gamma}_1}{dt} + \dot{\gamma}_1^{\,2} + \gamma_2 \frac{d\dot{\gamma}_2}{dt} + \dot{\gamma}_2^{\,2} + \gamma_3 \frac{d\dot{\gamma}_3}{dt} + \dot{\gamma}_3^{\,2}\}$$
$$= A\Delta y\eta\{\gamma_1 \ddot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_1^{\,2} + \gamma_2\ddot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_2^{\,2} + \gamma_3\ddot{\gamma}_3 + \dot{\gamma}_3^{\,2}\} \quad (11)$$

이때 *Volume* $V = A\Delta y$이므로, 식 (11)을 재 구성하면 다음 식 (12)와 같다.

$$\frac{\dot{W}_T}{\eta V} = (\dot{\gamma}_1^{\,2} + \dot{\gamma}_2^{\,2} + \dot{\gamma}_3^{\,2} + \gamma_1\ddot{\gamma}_1 + \gamma_2\ddot{\gamma}_2 + \gamma_3\ddot{\gamma}_3) \quad (12)$$

각 전단율에 대하여 미분은 각 요소의 속도가 항상 일정하다고 가정하므로 다음과 같이 전개되어 $\ddot{\gamma}_1, \ddot{\gamma}_2, \ddot{\gamma}_3 = 0$ 으로 귀착된다.

$$\ddot{\gamma}_1 = \frac{d(\dot{\gamma}_1)}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{d\gamma_1}{dt}) = \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}(\frac{\Delta\chi_1}{\Delta y}))$$
$$= \frac{d}{dt}(\frac{1}{\Delta y}\frac{d\Delta\chi_1}{dt}) = \frac{1}{\Delta y}(\frac{dv_1}{dt})$$

여기서 속도 v_1은 항상 일정하므로,

$$\ddot{\gamma}_1 \frac{1}{\Delta y}(\frac{dv_1}{dt}) = \frac{1}{\Delta y}(0) = 0,\ \ddot{\gamma}_2 = \frac{1}{\Delta y}(\frac{dv_2}{dt}) = 0,$$
$$\ddot{\gamma}_3 = \frac{1}{\Delta y}(\frac{dv_3}{dt}) = 0 \quad (13)$$

따라서 위의 식 (12)에서 0가 되는 항을 소거하면 다음 식 (14)와 같이 표현된다.

$$\frac{\dot{W}_T}{\eta V} = (\dot{\gamma}_1^{\,2} + \dot{\gamma}_2^{\,2} + \dot{\gamma}_3^{\,2}) \quad (14)$$

여기서 각 요소의 전단율 $\dot{\gamma}_i$는 Camp and Stein (1943)의 정의에 의하면 G_i에 해당하므로 G를 대체하여 식 (14)를 다시 쓰면 식 (15)와 같다.

$$\frac{\dot{W}_T}{\eta V} = G_1^{\,2} + G_2^{\,2} + G_3^{\,2} \quad (15)$$

이때 전체 한 일을 반응조 내의 평균 G값으로 표현하면 다음 식 (16)과 같은데,

$$\dot{W}_T = \eta V G_T^{\,2} \quad (16)$$

식 (16)을 G_T에 대하여 정리하면 다음 식 (17)과 같다.

$$G_T^{\,2} = \frac{\dot{W}_T}{\eta V} \quad (17)$$

식 (14)와 (15)를 비교하면 $G_T^2 = G_1^2 + G_2^2 + G_3^2$와 같은 관계가 정리된다. 양변에 제곱근을 적용하면 $G_T = \sqrt{G_1^2 + G_2^2 + G_3^2}$ 으로 나타내지만, 식 (13)에서와 같이 각 요소에 대한 전단율의 미분은 일정한 속도의 조건에서 항상 0이므로 일반 식으로 나타내면 다음 식 (18)과 같다.

$$G_T = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} G_i^{\,2}} \quad (18)$$

이와 같이 한 응집지에 두개 이상의 에너지 공급원이 있거나 한 개의 에너지원에 여러 개의 패들이 달려있는 경우에 응집지 전체에 작용하는 G값은 각 각의 G값을 더한 것이 아니라 각 각의 G값의 제곱을 더한 합산 값의 제곱근인 것이다. 따라서 일부에서 생각하듯이 전체의 G값이 각 각의 G값의 합산이라면 실제로 발현되는 G값보다 크게 계산된다. 실례로 Kawamura(2000)의 경우, 페이지 130(번역본: p. 143)에서 제시한 식은 정확하였지만 그의 책 페이지 132(번역본: p. 145)에서 제시한 전체의 G값은 각각의 패들에 대한 G값의 합산으로 생각하는 오류를 범하여, 페이지 132에서 당초 계산된 회전수로는 필요한 전체 G값을 발현할 수 없으며 페이지 133(번역본: p. 146)이후의 D와 F의 계산에 오류를 발생시키기 때문에 사용자로 하여금 혼란을 가져오는 결과가 되었다. 그러므로 효율적인 응집공정의 운영을 위하여는

주요 인자인 G값에 대한 정확한 이해와 적용이 필요하다고 하겠다.

참고문헌

Camp, T.R. and Stein, P.C. (1943) Velocity Gradients and Internal Work in Fluid Motion, *J. Boston Soc. Civil Engineers*, **30**, pp. 219-237.

Camp, T.R. (1955) Flocculation and Flocculation Basins, *Trans., ASCE*, **120**, pp. 1-16.

Clark, M.M. (1985) Critique of Camp and Stein's rms velocity gradient, *Jour. of Environ. Engineering, ASCE*, **111**(6), pp. 741-764.

Han, M., and Lawler, D.F. (1992) The (relative) Insignificance of G in Flocculation, *JAWWA*, **84**(10), pp. 79-91.

Johnson, C.P., Li, X.Y., and Logan, B.E., (1996) Settling Velocities of Fractal Aggregates, *Environ. Sci. Technol.*, **30**, pp. 1911-1918.

Kawamura, S. (2000) *Integrated Design and Operation of Water Treatment Facilities*. 2nd Ed. p. 131, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Li, X.Y., and Yuan, Y. (2002) Settling Velocities and Permeabilities of Microbial Aggregates, *Water Research*, **36**, pp. 3110-3120.

O'Melia, C.R. (1978) Coagulation in Water Treatment in *The Scientific Basis of Flocculation*, K. J. Ives ed., p. 73, KLEWAR Academic Publishers, The Netherlands.

Smoluchowski, M. (1917) Versuch einer mathematischen Theorie der Koagulationskinetic kolloider Losunger, *Zeitschrift Physicalische Chemie*, **92**, pp. 129.