퍼지 및 지능시스템학회 논문지 2004, Vol. 14, No. 3, pp. 316-323

특이섭동 퍼지시스템의 H_∞ 출력 궤환제어

An H_∞ Output Feedback Control for Singularly Perturbed Fuzzy Systems

류석환* · 최병재*
Seog-Hwan Yoo and Byung-Jae Choi

* 대구대학교 전자정보공학부

요 약

이 논문에서는 특이섭동 T-S 퍼지시스템의 H_∞ 출력 궤환 제어기의 설계를 취급한다. 특이섭동 시스템에서 저속 부시스템과 고속 부시스템의 H_∞ 노옴이 각각 γ 보다 적다면 충분히 적은 $\varepsilon>0$에 대해서 특이섭동 퍼지시스템의 H_∞ 노옴이 γ보다 적음을 증명한다. 이러한 사실을 이용하여 특이섭동 파라메터 ε과 무관한 선형 행렬부등식을 기반으로하는 제어기 설계법을 제시한다. 제시된 설계법의 효용성을 입증하기 위하여 수치예를 보여준다.

Abstract

This paper deals with an H_∞ output feedback controller design for singularly perturbed T-S fuzzy systems. It is shown that the H_∞ norm of the singularly perturbed T-S fuzzy system is less than γ for a sufficiently small $\varepsilon>0$ if the H_∞ norms of both the slow and fast subsystem are less than γ. Using this fact, we develop a linear matrix inequality based design method which is independent of the singular perturbation parameter ε. A numerical example is provided to demonstrate the efficacy of the proposed design method.

Key Words : Singularly Perturbed Systems, Linear Matrix Inequality, H_∞ Fuzzy Control, Nonlinear system, T-S Fuzzy System

1. 서 론

특이섭동형 시스템은 상태변수에서 저속모드(slow mode)와 고속모드(fast mode)가 동시에 존재하는 시스템을 모델할 때 발생하는 시스템이다. 예를 들어 아주 적은 질량이나 관성 모멘트를 갖는 역학계통을 포함하는 동적시스템, 고속의 액츄에이터를 포함한 동적시스템 그리고 이득이 큰 궤환시스템을 모델할 때 특이섭동형 시스템으로 모델한다[1]. 특이섭동법은 원래는 유체역학이나 천체역학과 같은 응용수학의 한 분야에서 근사적인 해를 얻기 위하여 널리 사용된 수학의 한 분야이다. 제어문제에는 P. Kokotovic[2]에 의해 처음으로 사용되어 최적제어문제에서 발생하는 리카티 미분방정식의 근사해를 구하는데 많이 사용되었다. 그후 선형 혹은 비선형의 특이섭동 시스템에서 효과적으로 제어기를 설계하는 방법이 많은 연구자들에 의해 끊임없이 연구가 되었다[3].

J. Doyle[4] 등이 상태공간에서 리카티 형태 방정식의 해를 이용하여 H_∞ 제어기를 합성하는 방법을 제시한 이후 상태공간에서 견실 안정성과 성능을 보장하는 제어기 설계법에 관한 연구가 괄목할 만한 성장을 보이고 있다. 그후 리카티 형태 방정식의 해를 이용하는 대신에 선형 행렬부등식의 해를 이용하여 견실한 H_∞ 제어기를 합성하는방법이 많이 연구되었다[5]. 특히 선형 행렬부등식을 이용하는 방법은 가치함수가 여러 개인 제어문제와 시변 파라메터를 갖는 시스템의 제어문제에 성공적으로 적용되어 견실한 제어기 설계 문제의 해를 쉽게 구할 수 있었다[6,10-13]. 위에서 언급한 H_∞ 제어이론의 발전에 발맞추어 특이섭동 시스템에서도 H_∞ 제어기를 합성하는 연구가 많이 수행되었다[7-9].

제어시스템이 비선형 시스템일 때 견실한 제어기를 설계하기 위해서 H_∞ 제어기 설계법을 사용할 경우에는 Hamilton-Jacobi-Bellman(H-J-B) 방정식을 풀어서 제어기를 합성할 수 있다. 그러나 H-J-B 방정식은 비선형 편미분 방정식이어서 특수한 경우를 제외하고는 일반적으로 해를 구하기가 극히 어렵다. 최근에는 이러한 비선형 제어문제를 취급하기 위해서 비선형 시스템을 T-S (Takagi-Sugeno) 퍼지 시스템으로 모델하여 효과적으로 비선형 시스템을 제어하는 퍼지 제어방식이 많이 제시되었다.[14-16] T-S 퍼지시스템은 일반적인 시스템과는 달리 통상 여러 개의 선형시스템으로 모델 되어진 국부적인 모델로 구성되어 있으며 여러 개의 국부적인 선형시스템이 결합하여 시스템의 전역적인 비선

접수일자 : 2004년 2월 26일
완료일자 : 2004년 4월 9일
이 논문은 2002학년도 대구대학교 학술연구비 지원에 의한 논문임.

형 특성을 묘사한다. 따라서 비선형 시스템을 T-S 퍼지시스템으로 모델할 경우 선형시스템에서 개발된 많은 제어이론을 사용하여 비선형 시스템을 효과적으로 제어할 수 있다.

비선형 특이섭동 시스템의 경우에도 T-S 퍼지시스템으로 모델하여 효과적으로 제어기를 설계하는 연구가 최근 많이 시도되고 있다.[17-19] W. Assawinchaichote 등은 특이섭동 T-S 퍼지시스템을 관측기 기반으로 출력궤환 제어기를 설계하였으며[18] 또한 선형행렬 부등식을 이용하여 전상태 궤환 H_∞ 제어기를 제시하였다.[19]

본 연구에서는 국부적인 모델이 선형 특이섭동 시스템으로 표현되는 특이섭동 T-S 퍼지시스템의 출력궤환 제어기 설계법을 제시하고자한다. 이를 위하여 2절에서는 특이섭동 퍼지시스템을 정의하고 제어문제를 설정한다. 3절에서는 특이섭동 퍼지시스템의 H_∞ 노옴 유계조건을 선형 행렬부등식의 형태로 제시하고 4절에서는 3절에서 제시된 선형 행렬부등식을 이용하여 출력궤환 제어기를 합성한다. 5절에서 수치예를 통하여 본 연구에서 제시한 방법의 타당성을 예시하고 6절에서 결론을 맺는다.

주어진 행렬 A에 대해 A^T는 A의 전치행렬을 A^{-1}는 A의 역행렬을 $A^\perp$는 A^T의 null space를 구성하는 basis 벡터이고 $A>0$는 A가 양 한정 행렬임을 나타낸다. I_n은 $n\times n$ 단위행렬이고 0은 영 행렬을 의미하고 문맥상 차원을 쉽게 알 수 있는 경우 아래 첨자를 생략한다. 블록 행렬에서 (i,j)블록의 $*$는 (j,i)블록의 전치행렬을 의미한다. $diag(A,B)$는 A,B로 만들어진 대각행렬이고 $\|\cdot\|_\infty$는 H_∞ 노옴을 의미한다.

2. 특이섭동 퍼지시스템과 문제설정

다음의 T-S 퍼지모델로 모델 되는 시스템을 생각한다.
R_i: IF $\rho_1(t)$ is M_{i1} and … and $\rho_g(t)$ is M_{ig}
THEN

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \epsilon\dot{x}_2(t)\end{bmatrix} &= A_i\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+B_{i,1}w(t)+B_{i,2}u(t)\\ &= \begin{bmatrix}A_{i,11} & A_{i,12}\\ A_{i,21} & A_{i,22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{i,11}\\ B_{i,12}\end{bmatrix}w(t)\\ &\quad+\begin{bmatrix}B_{i,21}\\ B_{i,22}\end{bmatrix}u(t)\\ z(t) &= C_{i,1}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+D_{i,11}w(t)+D_{i,12}u(t)\\ &= [\,C_{i,11}\;\; C_{i,12}]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+D_{i,11}w(t)+D_{i,12}u(t)\\ y(t) &= C_{i,2}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+D_{i,21}w(t)\\ &= [\,C_{i,21}\;\; C_{i,22}]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+D_{i,21}w(t)\end{aligned} \tag{2.1}$$

여기에서 R_i는 i번째 퍼지규칙이고 퍼지규칙의 수는 r이다. 즉 $i=1,\cdots,r$이다. $\rho_j(t)$와 M_{ij} $j=1,\cdots,g$는 전제변수와 퍼지집합이고 $x^T(t)=[\,x_1(t)^T\;x_2(t)^T]$ ($x_1(t)\in R^{n_1}$, $x_2(t)\in R^{n_2}$)은 상태변수, $w(t)\in R^q$는 외부 잡음신호, $u(t)\in R^m$은 입력변수, $y(t)\in R^p$는 출력변수이고 A_i, $B_{i,1}$, $\cdots$, $D_{i,21}$는 적절한 차원으로 분할된 상수 행렬이고 특이섭동 파라메터 ε은 아주작은 양수이다.

정규화된 소속함수 $\mu_i(\rho(t))$ $i=1,\cdots,r$를 다음과 같이 정의한다.

$$\mu_i(\rho(t))=\frac{h_i(\rho(t))}{\sum_{i=1}^{r}h_i(\rho(t))} \tag{2.2}$$

여기에서

$$h_i(\rho(t))=\prod_{j=1}^{g}M_{ij}(\rho_j(t)),\quad \rho(t)=[\,\rho_1(t)\;\cdots\;\rho_g(t)]^T \tag{2.3}$$

이다. 본 연구에서는

$$h_i(\rho(t))\geq 0\ \ (i=1,\cdots,r),\ \sum_{i=1}^{r}h_i(\rho(t))>0,\qquad t\geq 0 \tag{2.4}$$

이라 가정한다. 따라서

$$\mu_i(\rho(t))\geq 0,\ \ i=1,\cdots,r,\ \ \sum_{i=1}^{r}\mu_i(\rho(t))=1 \tag{2.5}$$

를 얻는다. 간편성을 위하여 $\mu_i=\mu_i(\rho(t))$, $\mu^T=[\mu_1\cdots\mu_r]$이라 정의하면, 시스템 (2.1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \epsilon\dot{x}_2(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}A_{11}(\mu) & A_{12}(\mu)\\ A_{21}(\mu) & A_{22}(\mu)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11}(\mu)\\ B_{12}(\mu)\end{bmatrix}w(t)\\ &\quad+\begin{bmatrix}B_{21}(\mu)\\ B_{22}(\mu)\end{bmatrix}u(t)\\ &= \sum_{i=1}^{r}\mu_i\left(\begin{bmatrix}A_{i,11} & A_{i,12}\\ A_{i,21} & A_{i,22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{i,11}\\ B_{i,12}\end{bmatrix}w(t)\right.\\ &\quad\left.+\begin{bmatrix}B_{i,21}\\ B_{i,22}\end{bmatrix}u(t)\right)\\ z(t) &= [\,C_{11}(\mu)\;\; C_{12}(\mu)]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+D_{11}(\mu)w(t)+D_{12}(\mu)u(t)\\ &= \sum_{i=1}^{r}\mu_i\left([\,C_{i,11}\;\; C_{i,12}]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+D_{i,11}w(t)+D_{i,12}u(t)\right)\\ y(t) &= [\,C_{21}(\mu)\;\; C_{22}(\mu)]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+D_{21}(\mu)w(t)\\ &= \sum_{i=1}^{r}\mu_i\left([\,C_{i,21}\;\; C_{i,22}]\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+D_{i,21}w(t)\right)\end{aligned} \tag{2.6}$$

식 (2.6)에서 $\dot{x}_2$는 $\dot{x}_1$에 비해 대략 $1/\varepsilon$배 정도 크므로 x_2를 고속 변수, x_1을 저속 변수라 호칭한다. 특이섭동 파라메터 ε이 0으로 변할 때 시스템 (2.6)의 차원이 n_1+n_2에서 n_1으로 변하므로 이러한 섭동을 정칙섭동 (regular perturbation)과 구별하여 특이섭동이라 호칭한다. $A_{22}(\mu)^{-1}$이 존재한다면 (2.6)에서 $\varepsilon=0$으로 특이섭동을 취하면 고속변수 $x_2(t)$는

$$\begin{aligned}x_2(t) &= -A_{22}(\mu)^{-1}(A_{21}(\mu)x_1(t)+B_{12}(\mu)w(t)\\ &\quad+B_{22}(\mu)u(t))\end{aligned} \tag{2.7}$$

의 관계식을 만족한다. (2.7)을 (2.6)에 대입하여 정리하면 다음의 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= A_s(\mu)x_1(t)+B_{s1}(\mu)w(t)+B_{s2}(\mu)u(t)\\ z(t) &= C_{s1}(\mu)x_1(t)+D_{s1}(\mu)w(t)+D_{s12}(\mu)u(t)\\ y(t) &= C_{s2}(\mu)x_1(t)+D_{s21}(\mu)w(t)\end{aligned} \tag{2.8}$$

여기에서

$$\begin{aligned} A_s(\mu) &= A_{11}(\mu) - A_{12}(\mu)A_{22}(\mu)^{-1}A_{21}(\mu) \\ B_{si}(\mu) &= B_{i1}(\mu) - A_{12}(\mu)A_{22}(\mu)^{-1}B_{i2}(\mu),\ i=1,2 \\ C_{si}(\mu) &= C_{i1}(\mu) - C_{i2}(\mu)A_{22}(\mu)^{-1}A_{21}(\mu),\ i=1,2 \\ D_{sij}(\mu) &= D_{ij}(\mu) - C_{i2}(\mu)A_{22}(\mu)^{-1}B_{j2}(\mu),\ i,j=1,2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

이다. 식 (2.8)은 저속 변수만으로 구성된 ε에 무관한 시스템이며 저속 부시스템(slow subsystem)이라 호칭한다. 다음 시스템 (2.6)에서 저속변수 $x_1(t)$를 제거하면

$$\begin{aligned} \dot{x}_2(t) &= A_{22}(\mu)x_2(t) + B_{12}(\mu)w(t) + B_{22}(\mu)u(t) \\ z(t) &= C_{12}(\mu)x_2(t) + D_{11}(\mu)w(t) + D_{12}(\mu)u(t) \\ y(t) &= C_{22}(\mu)x_2(t) + D_{21}(\mu)w(t) \end{aligned} \tag{2.10}$$

이 된다. 시스템 (2.10)을 고속 부시스템(fast subsystem)이라고 정의한다.

본 연구에서는 폐루프 시스템을 안정화하고 $w(t)$를 입력, $z(t)$를 출력으로 하는 폐루프 연산자를 T_{zw}라 정의할 때 T_{zw}의 L_2 이득(추후 편의상 H_∞ 노옴으로 호칭하고 $\|T_{zw}\|_\infty$라 표기한다)을 γ 미만으로 유지하는, 즉

$$\int_0^\infty z(\tau)^T z(\tau)d\tau < \gamma^2 \int_0^\infty w(\tau)^T w(\tau)d\tau \tag{2.11}$$

을 보장하는 출력궤환 제어기를 설계한다.

3. 특이섭동 T-S 퍼지시스템의 H_∞ 노옴 유계조건

이 절에서는 제어기 합성에 사용될 폐루프 시스템이 만족해야할 특이섭동 T-S 퍼지시스템의 H_∞ 노옴 유계조건을 소개한다. 다음과 같이 시스템 (2.1)과 차원이 동일한 특이섭동 T-S 퍼지시스템으로 표현되는 출력 궤환 제어기를 생각한다.

R_i: IF $\rho_1(t)$ is M_{i1} and … and $\rho_g(t)$ is M_{ig} THEN

$$\begin{aligned} E_\varepsilon \dot{x}_k(t) &= \sum_{j=1}^{r} \mu_j A_{k,ij} x_k(t) + B_{k,i} y(t) \\ u(t) &= C_{k,i} x_k(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

여기에서 $E_\varepsilon = diag(I_{n_1}, \varepsilon I_{n_2})$이다.

제어기 (3.1)을 정규화된 소속함수를 이용하여 식 (2.7)과 같은 형태로 표현하면

$$\begin{aligned} E_\varepsilon \dot{x}_k(t) &= A_k(\mu)x_k(t) + B_k(\mu)y(t) \\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i \mu_j (A_{k,ij}x_k(t) + B_{k,i}y(t)) \\ u(t) &= C_k(\mu)x_k(t) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \mu_i C_{k,i} x_k(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

참조 1 : 출력 궤환 제어기 (3.2)에서 $A_k(\mu)$는 μ의 2차식으로 정의되었지만 $B_{i,2}$와 $C_{i,2}$가 모든 i에 대해서 각각 동일하면 $A_k(\mu)$는 μ의 1차식으로 정의할 수 있다. 즉 (3.1)의 규칙 i에서의 제어기 상태방정식은 $E_\epsilon \dot{x}_k(t) = A_{k,i}x_k(t) + B_{k,i}y(t)$로 정의한다.

제어기 (3.2)를 특이섭동 T-S 퍼지시스템 (2.1)에 적용하면 폐루프 시스템은

$$\begin{aligned} E_{\varepsilon\varepsilon}\dot{x}_c(t) &= A_c(\mu)x_c(t) + B_c(\mu)w(t) \\ z(t) &= C_c(\mu)x_c(t) + D_c(\mu)w(t) \end{aligned} \tag{3.3}$$

이 되고 여기에서

$$E_{\varepsilon\varepsilon} = \begin{bmatrix} E_\varepsilon & 0 \\ 0 & E_\varepsilon \end{bmatrix},\ x_c(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_k(t) \end{bmatrix},$$

$$A_c(\mu) = \begin{bmatrix} A(\mu) & B_2(\mu)C_k(\mu) \\ B_k(\mu)C_2(\mu) & A_k(\mu) \end{bmatrix},$$

$$B_c(\mu) = \begin{bmatrix} B_1(\mu) \\ B_k(\mu)D_{21}(\mu) \end{bmatrix},\ C_c(\mu) = [\,C_1(\mu)\ \ D_{12}(\mu)C_k(\mu)\,],$$

$$D_c(\mu) = D_{11}(\mu)$$

이다. 폐루프 시스템 (3.3)에서 다음의 좌표변환을 도입한다. $\zeta(t) = Mx_c(t)$라 정의하면 변환된 좌표에서 시스템 (3.3)은

$$\begin{aligned} E_{2\varepsilon}\begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1(t) \\ \dot{\zeta}_2(t) \end{bmatrix} &= \overline{A}_c(\mu)\begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{bmatrix} + \overline{B}_c(\mu)w(t) \\ &= \begin{bmatrix} \overline{A}_{c11}(\mu) & \overline{A}_{c12}(\mu) \\ \overline{A}_{c21}(\mu) & \overline{A}_{c22}(\mu) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{B}_{c1}(\mu) \\ \overline{B}_{c2}(\mu) \end{bmatrix} w(t) \\ z(t) &= \overline{C}_c(\mu)\zeta(t) + \overline{D}_c(\mu)w(t) \\ &= [\,\overline{C}_{c1}(\mu)\ \ \overline{C}_{c2}(\mu)\,]\begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \end{bmatrix} + \overline{D}_c(\mu)w(t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

로 나타낼 수 있고 여기에서

$$M = \begin{bmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_2} \end{bmatrix},\ E_{2\varepsilon} = \begin{bmatrix} I_{2n_1} & 0 \\ 0 & \varepsilon I_{2n_2} \end{bmatrix},$$

$$\overline{A}_c(\mu) = MA_c(\mu)M^{-1},\quad \overline{B}_c(\mu) = MB_c(\mu),$$
$$\overline{C}_c(\mu) = C_c(\mu)M^{-1},\quad \overline{D}_c(\mu) = D_c(\mu)$$

이다. 시스템 (3.4)의 저속 부시스템은

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1(t) &= A_s(\mu)\zeta_1(t) + B_s(\mu)w(t) \\ z(t) &= C_s(\mu)\zeta_1(t) + D_s(\mu)w(t) \end{aligned} \tag{3.5}$$

라 쓸 수 있고 여기에서

$$\begin{aligned} A_s(\mu) &= \overline{A}_{c11}(\mu) - \overline{A}_{c12}(\mu)\overline{A}_{c22}(\mu)^{-1}\overline{A}_{c21}(\mu) \\ B_s(\mu) &= \overline{B}_{c1}(\mu) - \overline{A}_{c12}(\mu)\overline{A}_{c22}(\mu)^{-1}\overline{B}_{c2}(\mu), \\ C_s(\mu) &= \overline{C}_{c1}(\mu) - \overline{C}_{c2}(\mu)\overline{A}_{c22}(\mu)^{-1}\overline{A}_{c21}(\mu), \\ D_s(\mu) &= \overline{D}_c(\mu) - \overline{C}_{c2}(\mu)\overline{A}_{c22}(\mu)^{-1}\overline{B}_{c2}(\mu) \end{aligned} \tag{3.6}$$

이다. 저속 부시스템 (3.5)에서 $w(t)$를 입력 $z(t)$를 출력으로 하는 연산자를 T^s_{zw}라 할 때 (2.5)를 만족하는 모든 μ에 대해서 다음 선형 행렬부등식을 만족하는 대칭 양한정 행렬 P_s가 존재하면 $\|T^s_{zw}\|_\infty < \gamma$이다.

$$\begin{bmatrix} A_s(\mu)^T P_s + P_s A_s(\mu) & * & * \\ B_s(\mu)^T P_s & -\gamma I & * \\ C_s(\mu) & D_s(\mu) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \tag{3.7}$$

다음 특이섭동 T-S 퍼지시스템의 고속 부시스템은

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_2(t) &= \overline{A}_{c22}(\mu)\zeta_2(t) + \overline{B}_{c2}w(t) \\ z(t) &= \overline{C}_{c2}\zeta_2(t) + \overline{D}_c(\mu)w(t) \end{aligned} \tag{3.8}$$

이고 $w(t)$를 입력 $z(t)$를 출력으로 하는 연산자를 T^f_{zw}라 할 때 (2.5)를 만족하는 모든 허용 가능한 μ에 대해서 다음 선형 행렬부등식을 만족하는 대칭 양한정 행렬 P_f가 존재하면 $\|T^f_{zw}\|_\infty<\gamma$이다.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{c22}(\mu)^T P_f + P_f\bar{A}_{c22}(\mu) & * & * \\ \bar{B}_{c2}(\mu)^T P_f & -\gamma I & * \\ \bar{C}_{c2}(\mu) & \bar{D}_c(\mu) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.9)$$

선형 행렬부등식 (3.7)과 (3.9)는 저속 부시스템과 고속 부시스템의 H_∞ 노옴이 유계되기 위한 충분조건이다.

본 연구에서는 P_s와 P_f를 상수행렬로 정한다. 궤환 제어기를 설계하기에 앞서 만약 (3.7)과 (3.9)를 충족하는 대칭 양한정 행렬 P_s와 P_f가 존재할 때 폐루프 시스템 (3.3)에서 $\|T_{zw}\|_\infty<\gamma$를 만족하는가를 조사한다. 이를 위하여 먼저 다음의 보조정리들을 소개한다.

보조정리 1[10] : 대칭행렬 Ω와 행렬 U, V가 주어져 있을 때 다음의 두 조건 (i)과 (ii)는 등가이다.

(i) 선형 행렬부등식 (3.10)을 만족하는 행렬 K가 존재한다.

$$\Omega + UKV + (UKV)^T < 0 \quad (3.10)$$

(ii) $$U^{\perp T}\Omega U^{\perp} < 0, \quad V^{T\perp T}\Omega V^{T\perp} < 0 \quad (3.11)$$

보조정리 2 : 다음의 두 조건은 등가이다.
(i) 허용가능한 모든 $\mu(t)$에 대해서 선형 행렬부등식 (3.7)과 (3.9)를 만족하는 대칭 양한정 행렬 P_s와 P_f가 존재한다.
(ii) 허용가능한 모든 $\mu(t)$에 대해서 (3.12)의 선형 행렬 부등식을 만족하는 행렬 $\bar{P}$가 존재한다.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_c(\mu)^T\bar{P} + \bar{P}^T\bar{A}_c(\mu) & * & * \\ \bar{B}_c(\mu)^T\bar{P} & -\gamma I & * \\ \bar{C}_c(\mu) & \bar{D}_c(\mu) - \gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.12)$$

여기에서

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 \\ \bar{P}_2 & \bar{P}_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{P}_1 = \bar{P}_1^T > 0, \quad \bar{P}_3 = \bar{P}_3^T > 0 \quad (3.13)$$

이다.

(증명) 선형 행렬부등식 (3.12)를 (3.13)에서 정의된 $\bar{P}$를 이용하여 (3.14)와 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\Omega + U\bar{P}_2 V + (U\bar{P}_2 V)^T < 0 \quad (3.14)$$

여기에서

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & * & * & * \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & * & * \\ \bar{B}_{c1}(\mu)^T\bar{P}_1 & \bar{B}_{c2}(\mu)^T\bar{P}_3 & -\gamma I & * \\ \bar{C}_{c1}(\mu) & \bar{C}_{c2}(\mu) & \bar{D}_c(\mu) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0,$$

$$U = \begin{bmatrix} \bar{A}_{c21}(\mu)^T \\ \bar{A}_{c22}(\mu)^T \\ \bar{B}_{c2}(\mu)^T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V^T = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{11} = \bar{A}_{c11}(\mu)\bar{P}_1 + \bar{P}_1\bar{A}_{c11}(\mu),$$
$$\Omega_{21} = \bar{A}_{c12}(\mu)^T\bar{P}_1 + \bar{P}_3\bar{A}_{c21}(\mu),$$
$$\Omega_{22} = \bar{A}_{c22}(\mu)^T\bar{P}_3 + \bar{P}_3\bar{A}_{c22}(\mu)$$

이다. $U^\perp$와 $V^{T\perp}$를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$U^\perp = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -\bar{A}_{c22}(\mu)^{-1}\bar{A}_{c21}(\mu) & -\bar{A}_{c22}(\mu)^{-1}\bar{B}_{c2}(\mu) & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$V^{T\perp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

따라서 보조정리 1을 사용하면

$$U^{\perp T}\Omega U^\perp = \begin{bmatrix} A_s(\mu)^T\bar{P}_1 + \bar{P}_1 A_s(\mu) & * & * \\ B_s(\mu)^T\bar{P}_1 & -\gamma I & * \\ C_s(\mu) & D_s(\mu) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.15)$$

$$V^{T\perp T}\Omega V^{T\perp} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{c22}(\mu)^T\bar{P}_3 + \bar{P}_3\bar{A}_{c22}(\mu) & * & * \\ \bar{B}_{c2}(\mu)^T\bar{P}_3 & -\gamma I & * \\ \bar{C}_{c2}(\mu) & \bar{D}_c(\mu) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.16)$$

를 얻는다. 선형 행렬부등식 (3.7)과 (3.15)는 동일하고 선형 행렬 부등식 (3.9)와 (3.16)은 동일하므로 증명 완료.

선형 행렬부등식 (3.12)를 만족하는 행렬 $\bar{P}$가 존재하면 저속 부시스템에서 $\|T^s_{zw}\|_\infty<\gamma$를 만족하고 고속 부시스템에서 $\|T^f_{zw}\|_\infty<\gamma$를 만족한다. 다음의 보조정리는 선형 행렬부등식 (3.12)를 만족하는 행렬 $\bar{P}$가 존재할 때 $\|T_{zw}\|_\infty<\gamma$를 만족하는지를 기술한다.

보조정리 3 : 모든 허용 가능한 $\mu(t)$에 대해서 선형 행렬 부등식 (3.12)를 만족하는 행렬 $\bar{P}$가 존재하면 $0<\varepsilon<\bar{\varepsilon}$를 만족하는 모든 ε에 대해 특이섭동 퍼지시스템 (3.4)에서 $\|T_{zw}\|_\infty<\gamma$를 만족하는 $\bar{\varepsilon}$가 존재한다.

(증명) 시스템 (3.4)에서

$$\bar{A}_c(\mu,\varepsilon) = \begin{bmatrix} \bar{A}_{c11}(\mu) & \bar{A}_{c12}(\mu) \\ \bar{A}_{c21}(\mu)/\varepsilon & \bar{A}_{c22}(\mu)/\varepsilon \end{bmatrix},$$
$$\bar{B}_c(\mu,\varepsilon) = \begin{bmatrix} \bar{B}_{c1}(\mu) \\ \bar{B}_{c2}(\mu)/\varepsilon \end{bmatrix}$$

이라 정의하면 모든 허용 가능한 $\mu(t)$에 대해서 다음의 선형 행렬부등식 (3.17)을 만족하는 대칭 양한정 행렬 P_ε이 존재하면 $\|T_{zw}\|_\infty<\gamma$이다.

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_c(\mu,\epsilon)^T P_\epsilon + P_\epsilon\bar{A}_c(\mu,\epsilon) & * & * \\ \bar{B}_c(\mu,\epsilon)^T P_\epsilon & -\gamma I & * \\ \bar{C}_c(\mu) & \bar{D}_c(\mu) - \gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.17)$$

$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & 0 \\ \bar{P}_2 & \bar{P}_3 \end{bmatrix}$를 선형 행렬부등식 (3.12)의 해라고 할 때 $P_\varepsilon = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \varepsilon\bar{P}_2 \\ \varepsilon\bar{P}_2 & \varepsilon\bar{P}_3 \end{bmatrix}$이라 정의하면 $\bar{P}_1$과 $\bar{P}_3$이 양한정 행렬이므로 $\varepsilon<\varepsilon_1$이면 P_ε이 양한정 행렬이 되는 ε_1이 존재한다. 다음 P_ε을 (3.17)에 대입하여 정리하면

(3.17)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_c(\mu,\varepsilon)^T P_\varepsilon + P_\varepsilon \overline{A}_c(\mu,\varepsilon) & * & * \\ \overline{B}_c(\mu,\varepsilon)^T P_\varepsilon & -\gamma I & * \\ \overline{C}_c(\mu) & \overline{D}_c(\mu) & -\gamma I \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_c(\mu)^T \overline{P} + \overline{P}^T \overline{A}_c(\mu) & * & * \\ \overline{B}_c(\mu)^T \overline{P} & -\gamma I & * \\ \overline{C}_c(\mu) & \overline{D}_c(\mu) & -\gamma I \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 & * & * & * \\ \overline{P}_2 \overline{A}_{c11}(\mu) & \overline{A}_{c12}(\mu)^T \overline{P}_2^T + \overline{P}_2 \overline{A}_{c12}(\mu) & * & * \\ 0 & \overline{B}_{c1}(\mu)^T \overline{P}_2^T & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

(3.18)의 우변 첫째항은 음한정이므로 $\varepsilon < \varepsilon_2$이면 선형 행렬부등식 (3.18)이 음한정 행렬이 되는 ε_2가 존재한다. $\overline{\varepsilon} = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$이라 정의하면 $\varepsilon < \overline{\varepsilon}$이면 P_ε은 선형 행렬 부등식 (3.17)의 해이다. 이하 증명 끝.

4. 출력궤환 제어기 설계

이 절에서는 보조정리3의 결과를 이용하여 폐루프 특이섭동 퍼지시스템 (3.4)에서 $\| T_{zw} \|_\infty < \gamma$를 보장하도록 제어기를 설계한다. 즉, 선형행렬부등식 (3.12)를 만족하도록 출력궤환 제어기를 합성한다. 선형 행렬부등식 (3.12)의 앞과 뒤에 $diag(M^T, I, I)$와 $diag(M, I, I)$를 각각 곱하면

$$\begin{bmatrix} A_c(\mu)^T P + P^T A_c(\mu) & * & * \\ B_c(\mu)^T P & -\gamma I & * \\ C_c(\mu) & D_c(\mu) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.1)$$

를 얻는다. 여기서

$$P = M^T \overline{P} M = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

이다. (3.12)와 (4.2)에서 각각 정의된 $\overline{P}$와 P의 관계로부터 P의 부분행렬 P_i $(i=1,\cdots,4)$ 는 (4.3)의 구조를 가지고 P_i의 부분행렬 P_{i1}, $P_{i3}(i=1,\cdots,4)$는 상호간에 (4.4)의 관계를 만족한다.

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{i1} & 0 \\ P_{i2} & P_{i3} \end{bmatrix}, \ (i=1,\ \cdots, 4) \quad (4.3)$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} \\ P_{31} & P_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} \\ P_{31} & P_{41} \end{bmatrix}^T > 0,\ \begin{bmatrix} P_{13} & P_{23} \\ P_{33} & P_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{13} & P_{23} \\ P_{33} & P_{43} \end{bmatrix}^T > 0$$
(4.4)

출력궤환 제어기를 합성하기 위하여 다음의 보조정리가 필요하다.

보조정리 4 : P_1과 Q_1이 다음의 조건 (i)과 (ii)를 만족한다고 가정한다.

(i) P_1과 Q_1은 (4.3)과 (4.4)에 정의된 행렬 구조를 가진다.

(ii) $I - P_{11} Q_{11} < 0$ 이고 $I - P_{13} Q_{13} < 0$ 이다.

그러면 부분행렬이 (4.3)-(4.4)에서 정의된 구조를 가지고 $PQ = I$를 만족하는 행렬 P와 Q가 존재한다.

(증명) $P_2 = \begin{bmatrix} P_{21} & 0 \\ P_{22} & P_{23} \end{bmatrix}$, $P_3 = \begin{bmatrix} P_{31} & 0 \\ P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$라 정의하고 $P_{21} = P_{31}^T$, $P_{23} = P_{33}^T$를 만족하는 역행렬이 존재하는 임의의 P_2와 P_3를 선정하고 다음과 같이 부분행렬을 정의한다.

$$Q_2 = (I - Q_1 P_1) P_3^{-1}, \quad Q_3 = P_2^{-1}(I - P_1 Q_1)$$
$$P_4 = -P_3 Q_1 (I - P_1 Q_1)^{-1} P_2, \quad Q_4 = (P_4 - P_3 P_1^{-1} P_2)^{-1}$$

$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{bmatrix}$라 정의하면 $PQ = I$이다. 또한 단순한 행렬연산을 통하여 각 부분행렬이 (4.3) - (4.4)의 구조를 가짐을 쉽게 알 수 있다. 이하 증명 끝.

$A_c(\mu)$, $B_c(\mu)$, $C_c(\mu)$, $D_c(\mu)$는 다음 (4.5)와 같이 표현된다.

$$A_c(\mu) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i \mu_j A_{c,ij} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i \mu_j \begin{bmatrix} A_i & B_{i,2} C_{k,j} \\ B_{k,j} C_{i,2} & A_{k,ij} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$B_c(\mu) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i \mu_j B_{c,ij} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i \mu_j \begin{bmatrix} B_{i,1} \\ B_{k,j} D_{i,21} \end{bmatrix},$$

$$C_c(\mu) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i \mu_j C_{c,ij} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i \mu_j [\, C_{i,1} \ \ D_{i,12} C_{k,j} \,],$$

$$D_c(\mu) = \sum_{i=1}^{r} \mu_i D_{c,i} = \sum_{i=1}^{r} \mu_i D_{i,11}$$

따라서 선형행렬 부등식 (4.1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i \mu_j \Phi_{ij} = \quad (4.6)$$
$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \mu_i \mu_j \begin{bmatrix} A_{c,ij}^T P + P A_{c,ij} & * & * \\ B_{c,ij}^T P & -\gamma I & * \\ C_{c,ij} & D_{c,i} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

다소 제한적(conservative)이기는 하지만 모든 허용 가능한 $\mu(t)$에 대해서 선형행렬 부등식 (4.6)이 성립할 충분조건은

$$\Phi_{ii} < 0, \quad \Phi_{ij} + \Phi_{ji} < 0, \quad i = 1, \cdots, r,\ \ j > i, \cdots, r \quad (4.7)$$

임은 잘 알려진 사실이다.

제어기의 상태공간 구현 $(A_{k,ij}, B_{k,i}, C_{k,i})$, $(i, j = 1, \cdots, r)$ 를 C. Scherer[6]가 제시한 방법처럼 결정변수(decision variable)을 선형화하여 구할 수 있으며 정리 5에 결과를 기술한다.

정리 5 : 선형 행렬부등식 (4.8)을 충족하는 P_1, Q_1, $\hat{A}_{ij}$, $\hat{B}_i$, $\hat{C}_i$ $(i, j = 1, \cdots, r)$가 존재하면 충분히 적은 $\varepsilon > 0$에 대해서 특이섭동 시스템 (2.1)을 안정화하고 폐루프 시스템의 $\| T_{zw} \|_\infty < \gamma$를 보장하는 출력궤환 제어기가 존재한다.

$$\Psi_{ii} < 0, \quad \Psi_{ij} + \Psi_{ji} < 0, \quad i = 1, \cdots, r,\ \ j > i, \cdots, r \quad (4.8)$$

여기에서 P_1과 Q_1은 보조정리 4의 조건 (i)과 (ii)를 만족하고

$$\Psi_{ij} = \left[\begin{matrix} A_i Q_1 + Q_1^T A_i + B_{i,2} \hat{C}_j + \hat{C}_j^T B_{i,2}^T \\ A_i^T + \hat{A}_{ij} \\ B_{i,1}^T \\ C_{i,1} Q_1 + D_{i,12} \hat{C}_j \end{matrix} \right.$$

$$
\left.\begin{matrix} * & * & * \\ P_1^T A_i + A_i^T P_1 + \widehat{B}_j C_{i,2} + C_{i,2}\ \widehat{B}_j^T & * & * \\ B_{i,1}^T P_1 + D_{i,21}^T\ \widehat{B}_j^T & -\gamma I & * \\ C_{i,1} & D_{i,11} & -\gamma I \end{matrix}\right]
$$

이다. 이때 출력궤환 제어기의 상태공간 구현 상태공간 구현 $(A_{k,ij}, B_{k,i}, C_{k,i})$, $(i,j=1,\cdots,r)$는 $\widehat{A}_{ij}$, $\widehat{B}_i$, $\widehat{C}_i$ 로부터 (4.9)를 이용하여 계산한다.

$$
\begin{aligned}
\widehat{A}_{ij} &= P_1^T A_i Q_1 + P_1^T B_{i,2}\ \widehat{C}_j + \widehat{B}_j C_{i,2} Q_1 + P_3^T A_{k,ij} Q_3 \\
\widehat{B}_i &= P_3^T B_{k,i}, \quad \widehat{C}_i = C_{k,i} Q_3
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

(증명) 선형 행렬부등식 (4.1)을 만족하는 행렬 P와 $PQ=I$를 만족하는 Q의 부분행렬 P_1, P_3, Q_1, Q_3를 이용하여 Π_1과 Π_2를 다음과 같이 정의하면 $P\Pi_1 = \Pi_2$를 만족한다.

$$
\Pi_1 = \begin{bmatrix} Q_1 & I \\ Q_3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} I & P_1 \\ 0 & P_3 \end{bmatrix} \tag{4.10}
$$

행렬 Φ_{ij}의 앞과 뒤에 $diag(\Pi_1^T, I, I)$와 $diag(\Pi, I, I)$를 각각 곱하고 (4.9)에서 정의한 $\widehat{A}_{ij}$, $\widehat{B}_i$, $\widehat{C}_i$ 로부터 Ψ_{ij}를 얻는다. 상세 증명 생략.

선형행렬 부등식 (4.8)은 $r(r+1)/2$ 개의 선형행렬 부등식으로 구성되어 있으며 선형행렬 부등식 (4.1)을 만족시키기 위한 상당히 제한적인 충분조건이다. 그러나 $B_{i,2}$와 $C_{i,2}$가 모든 규칙에 대해서 일정이면 $(B_{1,2} = \cdots = B_{r,2}, C_{1,2} = \cdots = C_{r,2})$ 참조 1에서 언급한 것과 같이 $A_k(\mu)$를 $\mu(t)$의 1차식으로 정의 가능하며 따라서 (4.1)도 $\mu(t)$의 1차식으로 표현된다. 이 경우 정리5는 다음의 정리 6과 같이 수정된다.

정리 6 : $B_{1,2} = \cdots = B_{r,2}$, $C_{1,2} = \cdots = C_{r,2}$일때 선형행렬부등식 (4.11)을 충족하는 P_1, Q_1, $\widehat{A}_i$, $\widehat{B}_i$, $\widehat{C}_i$ $(i=1,\cdots,r)$가 존재하면 충분히 적은 $\varepsilon > 0$에 대해서 특이섭동 퍼지시스템 (2.1)을 안정화하고 폐루프 시스템의 $\| T_{zw} \|_\infty < \gamma$를 보장하는 출력궤환 제어기가 존재한다.

$$
\Psi_i < 0, \quad i=1,\cdots,r \tag{4.11}
$$

여기에서 P_1과 Q_1은 보조정리 4의 조건 (i)과 (ii)를 만족하고

$$
\Psi_i = \left[\begin{matrix} A_i Q_1 + Q_1^T A_i + B_{i,2}\ \widehat{C}_i + \ \widehat{C}_i^T B_{i,2}^T \\ A_i^T + \widehat{A}_i \\ B_{i,1}^T \\ C_{i,1} Q_1 + D_{i,12}\ \widehat{C}_i \end{matrix}\right.
$$

$$
\left.\begin{matrix} * & * & * \\ P_1^T A_i + A_i^T P_1 + \widehat{B}_i C_{i,2} + C_{i,2}\ \widehat{B}_i^T & * & * \\ B_{i,1}^T P_1 + D_{i,21}^T\ \widehat{B}_i^T & -\gamma I & * \\ C_{i,1} & D_{i,11} & -\gamma I \end{matrix}\right]
$$

이다. 이때 출력궤환 제어기의 상태공간 구현 $(A_{k,i}, B_{k,i}, C_{k,i})$, $(i=1,\cdots,r)$는 (4.12)를 이용하여 계산한다.

$$
\begin{aligned}
\widehat{A}_i &= P_1^T A_i Q_1 + P_1^T B_{i,2} \widehat{C}_i + \widehat{B}_i C_{i,2} Q_1 + P_3^T A_{k,i} Q_3 \\
\widehat{B}_i &= P_3^T B_{k,i}, \quad \widehat{C}_i = C_{k,i} Q_3
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

참조 2 : 특이섭동형 시스템에서 특이섭동 접근법의 목적은 아주 적은 특이 섭동 파라메터 ε으로 기인하는 수치적인 ill-conditioning 문제를 피하기 위해서이다.[1] 본 연구에서 제시한 정리 5 혹은 정리 6을 기반으로 하는 제어기 합성법은 ε에 무관한 선형행렬 부등식의 해를 이용하므로 수치적인 ill-conditioning 문제는 발생하지 않는다.

5. 수치 예

이 절에서는 간단한 수치 예를 통하여 앞 절에서 제시한 제어기 설계법의 타당성을 보인다. 다음의 직류전동기로 구동되는 역진자 문제를 생각한다.[19]

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) + 0.1w(t) \\
\dot{x}_2(t) &= 9.8\sin x_1(t) + x_3(t) \\
\varepsilon\dot{x}_3(t) &= -x_2(t) - x_3(t) + u(t) \\
z(t) &= 0.1x_1(t) + 0.1u(t) \\
y(t) &= x_1(t) + 0.1w(t)
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

여기에서 $x_1(t)$는 진자의 각도이고 $x_2(t)$는 각속도, $x_3(t)$는 직류전동기의 전기자 전류, $u(t)$는 직류전동기에 인가하는 전압으로 제어입력이다. 파라메터 ε은 직류전동기의 전기자 코일의 인덕턴스이며 아주 적은 값이다.

비선형 특이섭동 시스템 (5.1)을 특이섭동 T-S 퍼지 시스템으로 표현하면 다음과 같다.

R_1: IF $x_1(t)$ is M_1
THEN

$$
\begin{aligned}
E_\varepsilon \dot{x}(t) &= A_1 x(t) + B_{1,1} w(t) + B_{1,2} u(t) \\
z(t) &= C_{1,1} x(t) + D_{1,12} u(t) \\
y(t) &= C_{1,2} x(t) + D_{1,21} w(t)
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

R_2: IF $x_1(t)$ is M_2
THEN

$$
\begin{aligned}
E_\varepsilon \dot{x}(t) &= A_2 x(t) + B_{2,1} w(t) + B_{2,2} u(t) \\
z(t) &= C_{2,1} x(t) + D_{2,12} u(t) \\
y(t) &= C_{2,2} x(t) + D_{2,21} w(t)
\end{aligned}
$$

여기에서 소속함수는 $M_1 = \sin x_1(t)/x_1(t)$, $M_2 = 1 - M_1$이고

$$
E_\varepsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 9.8 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},
$$

$$
B_{1,1} = B_{2,1} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{1,2} = B_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},
$$

$$
C_{1,1} = C_{2,1} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad C_{1,2} = C_{2,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T,
$$

$$
D_{1,12} = D_{2,12} = D_{1,21} = D_{2,21} = 0.1
$$

$\gamma = 0.4$일때 선형행렬 부등식 (4.11)의 해 P_1과 Q_1을 다음과 같이 얻었다.

$$
P_1 = \begin{bmatrix} 28.5 & -9.06 & 0 \\ -9.06 & 3.74 & 0 \\ 6.65 & 248 & 248 \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 2.80 & -7.92 & 0 \\ -7.92 & 27.6 & 0 \\ -7.16 & -270 & 257 \end{bmatrix}
$$

$P_2 = P_3 = I$라 두고 보조정리 4를 만족하는 Q_3를 구한 후 식 (4.12)를 이용하여 다음의 제어기를 얻었다.

$$A_{k,1} = \begin{bmatrix} -507 & -1377 & -0.0645 \\ -16870 & -46235 & -1.029 \\ -16897 & -46306 & -1.045 \end{bmatrix},$$

$$A_{k,2} = \begin{bmatrix} -396 & -1075 & -0.0645 \\ -16922 & -46375 & -1.0299 \\ -16894 & -46295 & -1.046 \end{bmatrix},$$

$$B_{k,1} = \begin{bmatrix} -55.1 \\ 6.945 \\ 1.521 \end{bmatrix}, \quad B_{k,2} = \begin{bmatrix} -62.0 \\ 7.557 \\ 0.793 \end{bmatrix},$$

$$C_{k,1} = [68.1 \ \ 187 \ \ 0.0002], \quad C_{k,2} = [68.1 \ \ 186.5 \ \ 0.0002]$$

이때 폐루프 시스템은 식 (3.3)에서

$$A_c(\mu) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i \begin{bmatrix} A_i & B_{i,2}C_{k,i} \\ B_{k,i}C_{i,2} & A_{k,i} \end{bmatrix},$$

$$B_c(\mu) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i \begin{bmatrix} B_{i,1} \\ B_{k,i}D_{i,21} \end{bmatrix},$$

$$C_c(\mu) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i [C_{i,1} \ \ D_{i,12}C_{k,i}], \quad D_c(\mu) = \sum_{i=1}^{2} \mu_i D_{i,11}$$

이며 $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$ 일때의 H_∞ 노옴은 표 1과 같다.

표 1에서 보는 바와 같이 특이섭동 파라메터 ε이 아주 적은 경우($\varepsilon \le 1.2 \times 10^{-4}$) 본연구에서 제시한 ε에 무관한 제어기 설계법을 사용한 결과 설계조건인 H_∞ 노옴이 0.4 보다 적은 것을 알 수 있다. 반면에 $\varepsilon = 1.3 \times 10^{-3}$일 때는 H_∞ 노옴이 0.4 보다 조금 커짐을 보여준다.

표 1 : H_∞ 노옴
Table1 : H_∞ norm

ε	$\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$	$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$
10^{-8}	0.3416	0.2172
10^{-7}	0.3415	0.2172
10^{-6}	0.3415	0.2173
10^{-5}	0.3415	0.2179
$1.2*10^{-4}$	0.3971	0.2268
$1.3*10^{-4}$	0.4055	0.2278

6. 결 론

본 연구에서는 특이섭동 T-S 퍼지시스템의 견실한 H_∞ 출력궤환 제어기를 합성하였다. 제어기 합성을 위해 특이섭동 시스템에서 저속 부시스템의 H_∞ 노옴과 고속 부시스템의 H_∞ 노옴이 각각 γ보다 적을 때 전체 특이섭동 시스템도 충분히 적은 ε에 대해서 H_∞ 노옴이 γ보다 적음을 증명하였다. 특이섭동 퍼지 시스템의 H_∞ 노옴이 γ보다 적기 위한 충분조건을 ε의 크기에는 무관한 선형 행렬부등식의 형태로 제시하였다. 출력궤환 제어기는 선형행렬 부등식의 해를 이용하여 합성되며 상용의 소프트웨어를 이용하여 쉽게 풀 수 있다. 선형행렬 부등식이 특이섭동 파라메터 ε과는 무관하기 때문에 아주 적은 ε으로 기인하여 발생가능한 수치적인 ill-conditionig 문제를 피할 수 있다.

참 고 문 헌

[1] V. Sakensa, J. O'reilly and P. Kokotovic, "Singular Perturbations and Time Scale Methods in Control Theory : Survey 1976 - 1983", Automatica, Vol. 20, No.3, pp. 273-293, May 1984.
[2] P. Sannuti and P. Kokotovic, "Near Optimum Design of Linear Systems by a Singular Perturbation Method", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-14, No. 1, pp. 15-21, 1969.
[3] P. Kokotovic, R. Khalil and J. O'Reilly, "Singular Perturbation Methods in Control : Analysis and Design", Academic Press, New York, 1986.
[4] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar and B. Francis, "State Space Solutions to the Standard H_2 and H_∞ Control Problems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-34, No. 8, pp. 831-847, 1989.
[5] A. Nemirovskii and P. Gahinet, "The Projective Method for Solving Linear Matrix Inequalities", Proceedings of American Control Conference, pp.840-844, Baltimore, Maryland, June, 1994.
[6] C. Scherer, P. Gahinet and M. Chilali, "Multiobjective Output Feedback Control via LMI Optimization", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-42, No. 7, pp. 896-911, 1997.
[7] Z. Pan and T. Basar, " H_∞ Optimal Control for Singularly Perturbed Systems-Part II: Imperfect State Measurements", IEEE Trans, on Automatic Control, Vol. AC-39, No. 2, pp. 280-299, 1994.
[8] E. Fridman, "Near Optimal H_∞ Control of Linear Singularly Perturbed Systems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-41, No. 2, pp. 236-240, 1996.
[9] P. Shi and V. Dragan, " H_∞ Control for Singularly Perturbed Systems with Parametric Uncertainties", Proceedings of American Control Conference, Albuquerque, NM, 1997.
[10] P. Gahinet, "Explicit Controller Formulas for LMI Based H_∞ Synthesis", Automatica, Vol. 32, pp.1007-1014, 1996.
[11] E. Feron, P. Apkarian and P. Gahinet, "Analysis and Synthesis of Robust Control Systems via Parameter Dependent Lyapunov Functions", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-41, No. 7, pp. 1041-1046, 1996.
[12] P. Apkarian, P. Gahinet and G. Becker, "Self-Scheduled H_∞ Control of Linear Parameter Varying Systems", Proceedings of American Control Conference, pp.856-860, Baltimore, June, 1994
[13] G. Becker, "Additional Results on Parameter Dependent Controllers for LPV Systems", Proceedings of 1996 IFAC 13th Triennial World Congress, pp. 351-356, San Francisco, 1996.
[14] K. Tanaka, T. Ikeda and H. Wang, "Robust Stabilization of a Class of Uncertain Nonlinear System

s via Fuzzy Control : Quadratic Stability, H_∞ Control Theory, and Linear Matrix Inequalities", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.4, No.1, pp.1-13, feb. 1996.
[15] B. Chen, C. Tseng and H. Uang, "Mixed H_2/H_∞ Fuzzy Output Feedback Control Design for Nonlinear Dynamic Systems : An LMI Approach", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.8, No. 3, pp.249-265, June 2000.
[16] S. Nguang and P. Shi, "H_∞ Fuzzy Output Feedback Control Design for Nonlinear Systems : An LMI Approach", IEEE Trans. on Fuzzy Systems, Vol.11, No.3, pp.331-340, June 2003.
[17] G. Calcev, R. Gorez and V. Wertz, "Passivity and Fuzzy Control of Singularly Perturbed Systems", Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, pp.4364-4367, Phoenix, Arizona, December 1999.
[18] W. Assawinchaichote and S.K.Nguang, "Fuzzy Observer Based Controller Design for Singularly Perturbed Nonlinear Systems: An LMI Approach", Proceedings of the 41th IEEE Conference on Decision and Control, pp.2165-2170, Las Vegas, Nevada, December 2002.
[19] W. Assawinchaichote and S.K.Nguang, "H_∞ Fuzzy Control Design for Nonlinear Singularly Perturbed Systems with Pole Placement Constraints : An LMI Approach", IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics-Part B : Cybernetics, pp.1-10, 2004.

저 자 소 개

류석환(Seog-Hwan Yoo)
1975년 : 서울대학교 전기공학과 졸업.
1989년 :University of Florida 전기공학과 졸업(공학박사)

관심분야 : 견실제어, 지능제어, 모델간략화, 제어응용
Phone : 053-850-6621
Fax : 053-850-6619
E-mail : shryu@daegu.ac.kr

최병재(Byung-Jae Choi)
1987: 경북대학교 전자공학과 공학사
1989: 한국과학기술 원자력공학과 공학석사
1998: 한국과학기술원 전기전자공학과 공학박사
1999현재: 대구대학교 전자정보공학부 교수

관심분야: 지능시스템, 인공지능 이론 및 응용, 마이크로프로세서 응용
Phone : 053-850-6635
Fax : 053-850-6619
E-mail : bjchoi@daegu.ac.kr