

작은 진폭의 불균일 온도를 갖는 두 수평 평판 사이에서의 열 대류

유 주 식[†], 김 용 진^{*}

안동대학교 기계교육과, *한국기계연구원 환경기계기술연구부

Thermal Convection Between Two Horizontal Plates with Small Amplitude Non-Uniform Temperatures

Joo-Sik Yoo[†], Yong-Jin Kim^{*}

Department of Mechanical Engineering Education, Andong National University, Andong 760-749, Korea

**Korea Institute of Machinery & Materials, Yuseong, P.O. Box 101, Daejeon 305-343, Korea*

(Received May 19, 2004; revision received August 20, 2004)

ABSTRACT: Thermal convection between two horizontal walls kept at small amplitude non-uniform temperatures of the form, $T_L = T_1 + a\Delta T \sin kx$ and $T_U = T_2 + b\Delta T \sin(kx - \beta)$ with $a, b \ll 1$, is numerically investigated. When the Rayleigh number is small, an upright cell is formed between two walls at $\beta=0$; the cell is tilted at $\beta=\pi/2$, and a flow with two-tier-structure cells occurs at $\beta=\pi$. As the Rayleigh number is increased, Nusselt number increases smoothly for $\beta=0$ and $\pi/2$, but increases rather steeply for $\beta=\pi$ near the critical Rayleigh number ($Ra_c=1708$). When the wave number is small ($k=0.5$), multicellular convection occurs over one wave length, for all phase differences, and multiple solutions are found.

Key words: Thermal convection(열 대류), Non-uniform temperatures(불균일 온도), Wave number(파동수), Phase difference(위상차), Multiple solutions(다중해)

기 호 설 명

a : 아래 벽면온도의 불균일성의 크기
 b : 위 벽면온도의 불균일성의 크기
 g : 중력 가속도 [m/s^2]
 H : 두 판 간의 거리 [m]
 k : 벽 온도 분포의 무차원 파동수
 k_c : 임계 파동수
 Nu : 평균 Nusselt 수

Pr : Prandtl 수, ν/χ
 p : 무차원 압력
 Ra : Rayleigh 수, $ag\Delta TH^3/\chi\nu$
 Ra_c : 임계 Rayleigh 수
 t : 무차원 시간
 T_L : 아래 벽면의 온도분포
 T_U : 위 벽면의 온도분포
 T_1 : 아래 벽면의 평균 온도
 T_2 : 위 벽면의 평균 온도
 ΔT : 특성 온도차이 [K]
 \vec{u} : 무차원 속도 벡터
 u : 수평방향의 속도성분

[†] Corresponding author

Tel.: +82-54-820-5671; fax: +82-54-841-1624

E-mail address: jsyoo@andong.ac.kr

- v : 수직방향의 속도성분
- x : 무차원 수평좌표
- y : 무차원 수직좌표

그리스 문자

- α : 열 팽창 계수 [1/K]
- α_ψ : 흐름함수 방정식에서의 시간완화 변수
- β : 아래와 위 벽면의 온도분포의 위상차
- η : 확장된 수직좌표
- θ : 무차원 온도
- x : 열 확산계수 [m^2/s]
- ν : 동점성계수 [m^2/s]
- ρ_0 : 밀도 [Kg/m^3]
- Ψ : 흐름 함수(streamfunction)
- ω : 와도(vorticity)

하첨자

- L : 아래 벽면
- U : 위 벽면
- x : x 에 대한 미분, $\partial/\partial x$
- y : y 에 대한 미분, $\partial/\partial y$

1. 서 론

본 연구에서는 서로 다른 평균 온도를 갖는 두 벽면에 작은 크기의 정현적인(sinusoidal) 불균일 온도가 가미되었을 때 일어나는 자연 대류 현상을 조사한다. Fig. 1과 같이 아래와 위 벽면은 각 $T_L = T_1 + a\Delta T \sin kx$, $T_U = T_2 + b\Delta T \sin(kx - \beta)$ 의 온도분포를 가지고 있다. T_1 과 T_2 는 각 벽면에서의 평균 온도를 나타내는데 여기에서는 아래

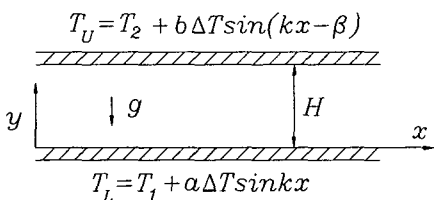


Fig. 1 Definition sketch.

벽면이 위 벽면보다 높은 평균 온도를 유지하고 있는 경우($T_1 > T_2$)에 대해 조사한다. 따라서 평균적으로 이 시스템은 열적으로 불안정한 상태에 있으며 $a = b = 0$ 이면 표준적인 Rayleigh-Benard 문제^(1,2)가 된다. 본 연구에서는 a, b 가 모두 zero 인 경우는 고려하지 않는다. 이 경우 수평방향의 파동수(wave number)가 k 로 주어진다라는 것이 임의의 파동수를 가질 수 있는 Rayleigh-Benard 문제와 크게 다른 점이다.

자연 대류의 연구에서는 대개 벽면의 온도가 일정한 경우를 고려하며, 불균일 온도분포에 대한 연구는 상대적으로 적다. Patankar et al.⁽³⁾은 축방향으로 정현적인 온도분포를 갖는 관 내에 충분히 발달된 강제 대류가 있을 때의 열전달 문제에 대한 연구를 하였다. 한편 불균일한 벽면온도를 갖는 다공성 매질(porous medium)에서의 대류에 관한 연구로는 Paulikakos and Bejan,⁽⁴⁾ Bradean et al.,⁽⁵⁾ Yoo,⁽⁶⁾ Yoo and Schultz⁽⁷⁾의 연구가 있다. Paulikakos and Bejan,⁽⁴⁾ Bradean et al.⁽⁵⁾은 주기적으로 가열되고 냉각되는 수평 평판을 가진 반 무한 다공성 매질에서의 대류를 조사하였다. 그리고 Yoo^(6,7)는 다공성 매질에서 평균 온도차이가 없는 두 벽면이 정현적인 온도분포를 가지고 있을 때의 유동을 작은 Rayleigh 수에 대한 점근적인 해를 구하여 조사하였다.

본 문제와 밀접한 관계를 가지는 기존의 연구로는 Kelly and Pall⁽¹⁾의 연구가 있다. 그들은 $T_L = T_1 + \delta L \Delta T \sin kx$, $L = 0$ or 1 , $T_U = T_2 + \delta U \Delta T \sin(kx - \beta)$, $U = 0$ or 1 , $\delta \ll 1$ 인 경우를 고려하였는데 파동수 k 는 표준적인 Rayleigh-Benard 대류⁽²⁾에 있어서의 임계 파동수인 3.117로 고정시키고 Rayleigh 수는 임계값인 $Ra_c = 1707.8$ 근방의 것을 고려하였다. 즉, 정현적인 형태의 아주 작은 공간적인 불균일성이 Rayleigh-Benard 대류에 어떤 영향을 미치는가를 살펴보았다.

본 문제에서는 Rayleigh-Benard 문제와는 달리 정지상태는 존재하지 않는다. 유동장은 벽면온도와 같은 공간적인 주기를 가지므로 파장(wave length) $2\pi/k$ 는 시스템의 기하학적 형태를 나타내는 일종의 aspect ratio(길이/높이)에 해당되며 위상차(phase difference) β 는 두 벽면에 있는 온도분포의 불균일성의 어긋남의 형태를 나타내어 준다. Kelly and Pall⁽¹⁾은 임계점 부근에서의 해

를 $\delta^{1/3}$ 에 대해 전개하여 second order($\delta^{2/3}$)까지 구함으로써 불균일성의 영향을 조사하였다. 여기에서는 방정식을 근사시키지 않고 전체 방정식에 대한 수치적인 해를 구하여 벽면온도의 공간적인 불균일성의 형태(k, β)에 따라서 어떠한 대류현상이 일어나는지를 조사한다.

2. 해 석

Fig. 1과 같은 온도분포를 갖는 두 개의 수평 평판 사이에 유체가 채워져 있다. 유체의 속도와 온도에 대한 연속방정식, 운동방정식, 에너지방정식을 나타내는 Boussinesq equations⁽⁸⁾을 특성 길이, 시간, 속도, 압력 및 온도를 각각 $H, H^2/\alpha, \alpha/H, \rho_0 \alpha^2/H^2, \Delta T$ 로 택하여 무차원화시키면 지배방정식은 다음과 같이 나타내어진다. 여기에서 $Pr = \nu/\alpha, Ra = ag\Delta TH^3/\alpha\nu$ 는 각각 Prandtl 수와 Rayleigh 수를 나타낸다.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + Pr \nabla^2 \vec{u} + Pr Ra \vec{\theta} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \theta = \nabla^2 \theta \quad (3)$$

흐름 함수 Ψ 와 와도 ω 로써 표현되는 무차원화된 지배방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = J(\Psi, \omega) + Pr \nabla^2 \omega + Pr Ra \theta_x \quad (4)$$

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \quad (5)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = J(\Psi, \theta) + \nabla^2 \theta \quad (6)$$

여기에서 와도(ω)와 흐름 함수(Ψ), Jacobian $J(f, g)$ 및 Laplacian은 다음과 같이 정의된다.

$$\omega = v_x - u_y, \quad u = \Psi_y, \quad v = -\Psi_x \quad (7)$$

$$J(f, g) = f_x g_y - f_y g_x, \quad \nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$$

그리고 상하 벽면에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \Psi_y = 0 \quad \text{at } y=0, 1 \quad (8)$$

$$\theta = 1 + a \sin kx \quad \text{at } y=0 \quad (9)$$

$$\theta = b \sin(kx - \beta) \quad \text{at } y=1 \quad (10)$$

위의 식에서 k 는 불균일성의 공간 주기적인 변화의 파동수(wave number)이며, 위상차(phase difference) β 는 상하 벽면에서의 온도가 어떤 모양으로 어긋나게 분포하고 있는가를 나타낸다.

고려하고 있는 문제는 x 방향으로 주기적이므로 다음과 같이 평균 Nusselt 수를 정의하여 벽면에서의 열전달률을 구한다.

$$Nu = -\frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} \frac{\partial \theta}{\partial y} dx \quad \text{at } y=0, 1 \quad (11)$$

x 방향으로 $2\pi/k$ 의 주기를 갖는 식(4)~(10)의 해는 Napolitano and Quartapelle⁽⁹⁾가 제안한 Block ADI 방법을 써서 구한다. 계산 영역은 ($0 \leq x \leq 2\pi/k, 0 \leq y \leq 1$)가 되며, y -방향으로는 경계조건 (8)~(10)이 적용되고, x -방향으로는 다음과 같은 주기적인 조건이 흐름함수(Ψ), 와도(ω), 및 온도(θ)에 추가된다.

$$F(x, y, t) = F(x + 2\pi/k, y, t), \quad F = \Psi, \omega, \theta \quad (12)$$

Block ADI 방법에서는 우선 Mallinson and De Vahl Davis⁽¹⁰⁾에 의해 고안된 False Transient 개념을 도입하여 유동함수에 대한 식(5)를 다음과 같이 변환한다.

$$\frac{1}{\alpha_\Psi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \nabla^2 \Psi - \omega = 0 \quad (13)$$

식(4), (6), (13)을 Implicit Euler scheme과 Beam and Warming⁽¹¹⁾의 증분 형태를 써서 시간에 대해 차분화시키고, 공간적으로는 표준적인 ADI 방법을 써서 유한한 방정식 계로 바꾸어 준다. 이러한 과정은 흐름함수, 와도, 및 온도의 증분량 각각에 대한 tridiagonal 형태의 방정식 계를 형성

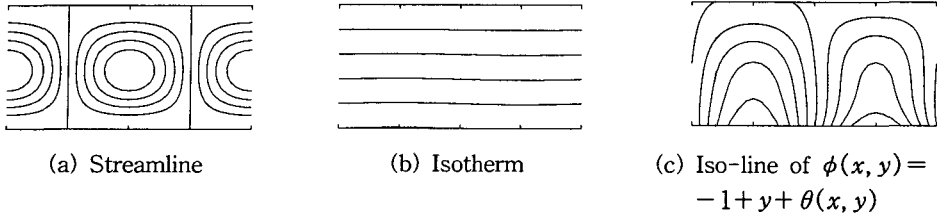


Fig. 2 Streamline and isotherm patterns when $a=0.01$ and $b=0$ with $k=3.117$, $Ra=1000$, and $Pr=0.7$.

하는데 이것을 모두 모아서 Block tridiagonal 형태의 방정식을 만든다. 최종적으로 얻어지는 것은, y 방향으로는 표준적인 Block tridiagonal 방정식 계이고, x 방향으로는 주기적인 Block tridiagonal 방정식 계이다. 이러한 방정식 계를 매 시간 단계마다 Block 소거방법을 써서 직접적으로 구하고, 이와 같은 과정을 수렴할 때까지 반복한다. 이 방법의 가장 큰 장점은 벽면에서의 와도가 내 시간 단계마다 직접적으로 구해지는데 있다. x 방향으로는 균일한 격자계를 사용하고, y 방향으로는 벽면 부근의 얇은 경계층을 분해하기 위하여 다음과 같은 좌표 확장을 이용한다.

$$y = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\tanh\{C(2\eta-1)\}}{\tanh(C)} \right] \quad (14)$$

3. 결과 및 논의

3.1 $a=0.01$, $b=0$, $k=3.117$

균일한 벽면 온도를 갖는 Rayleigh-Benard 문제에서는 $Ra < Ra_c = 1707.8$ 에서는 유체가 정지상태를 유지한다. 그러나 본 문제에서는 벽면온도에 교란이 가해지므로 $Ra < Ra_c$ 에서도 유동이 일어난다. 이와 같은 임계 Rayleigh 수 이하의 유동장의 예로써 $Ra=1000$, $a=0.01$, $b=0$, $k=3.117$, $Pr=0.7$ 에서의 유선과 등온선을 Fig. 2에 나타내었다. 비록 Fig. 2(a)와 같은 유동이 일어나지만 작은 Rayleigh 수에서의 등온선은 Fig. 2(b)와 같이 수평으로 성층화된 전도상태의 온도분포와 거의 같은 모양을 보여주고 있다. 그러나 전도상태의 온도분포를 제거시킨 $\phi(x, y) = -1 + y + \theta(x, y)$ 를 도시한 Fig. 2(c)는 대류가 일어나는 모양을 잘 보여주고 있다.

Kelly and Pall⁽¹⁾은 $k=k_c=3.117$ 일 때 $Ra_c = 1707.8$ 부근에서의 점근적인 해를 조사하여 정지상태의 전도영역 ($Ra < Ra_c$)으로부터 유동이 일어나는 대류영역 ($Ra > Ra_c$)으로의 천이는 완만하게 일어난다는 것을 보였다. 이와 같은 천이 현상을 보기 위하여 $a=0.01$, $b=0$ 로 하여 $k=3.117$ 인 경우에 대해 임계점 부근에서의 Rayleigh 수에 따른 Nusselt 수의 거동을 Fig. 3에 도시하였다. Fig. 3는 모든 Prandtl 수에 대하여, 전도영역으로부터 열불안정으로 인해 대류가 일어나는 영역으로 넘어갈 때 Nusselt 수가 완만하게 증가하고 있음을 보여주고 있다. 한편 $Pr=1$ 인 경우, 임계점 부근에서의 Kelly and Pall⁽¹⁾의 결과는 여기에서의 결과와 잘 일치한다.

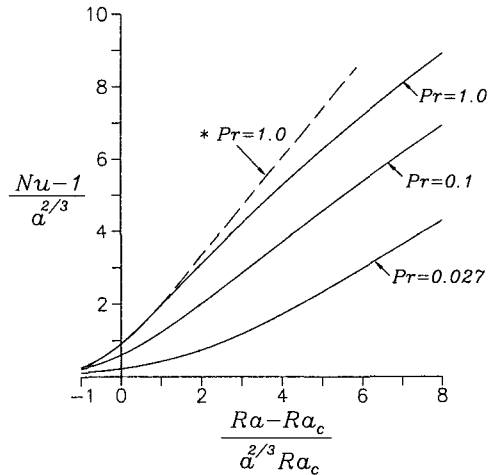


Fig. 3 Nusselt number near $Ra_c=1707.8$ for the resonant forcing $k=k_c=3.117$ when $a=0.01$ and $b=0$ with $Pr=0.027$, 0.1 , and 1 . Dashed curve for $Pr=1$ is the result of Kelly and Pall.⁽¹⁾

3.2 $a=b=0.01, k=3.117$

Kelly and Pall⁽¹⁾은 Fig. 3와 같은 Rayleigh 수에 따른 Nusselt 수의 거동을 보임으로써 전도영역으로부터 대류영역으로의 완만한 천이를 강조하였다. 그러나 그들은 $O(\delta^{2/3})$ 까지 고려하여 $\beta=0$ 인 경우에 대해서만 조사하였으며 $\beta=\pi$ 인 경우는 임계점 부근에서의 거동을 살펴보지 않았다. $O(\delta^{2/3})$ 까지 고려할 때 $\beta=\pi$ 인 경우 불균일성에 의해 생기는 항이 없어짐으로 인하여 $O(\delta^{2/3})$ 까지는 그 불균일성이 대류에 아무 영향을 미치지 않기 때문이다.

위상차 β 가 미치는 영향을 알기 위하여 먼저 $\beta=0, \pi/2, \pi$ 에 대한 $Ra=1000$ 에서의 유동장을 Fig. 4에 도시하였다. $\beta=0$ 인 경우, 벽면에서 최대 온도를 갖는 점($kx=\pi/2$)에서는 올라가고 최소 온도를 갖는 점($kx=3\pi/2$)에서는 내려가는 모양의 셀(cell)이 형성된다(Fig. 4(a)). 그러나 $\beta=\pi/2$ 에서는 기울어진 모양의 셀이 생성되며(Fig. 4(b)), $\beta=\pi$ 에서는 이층 모양의 서로 반대방향으로 회전하는 두 개의 셀이 형성된다(Fig. 4(c)). 임계 Rayleigh 수 이하의 $Ra=1000$ 에서의 등온선의 모

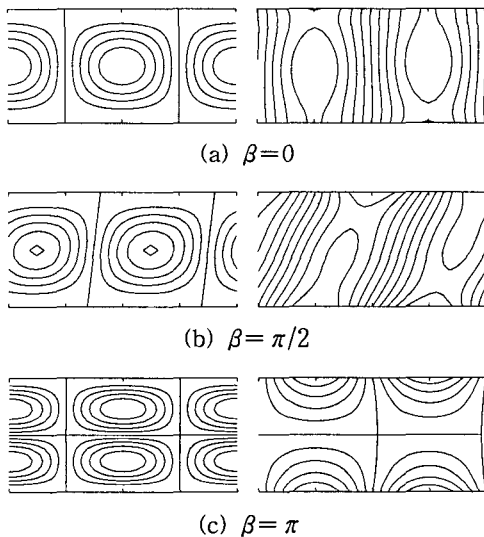


Fig. 4 Streamlines and iso-line of $\phi(x, y) = -1 + y + \theta(x, y)$ for several phase differences at $Ra=1000$ with $a=b=0.01, k=3.117$, and $Pr=0.7$.

양은 Fig. 2(b)와 유사하다. 그러나 $\phi(x, y) = -1 + y + \theta(x, y)$ 를 도시한 Fig. 4의 그림은 위상차 β 에 따른 온도 분포의 형상을 잘 보여주고 있다.

다음에는 위상차에 따른 천이현상을 보기 위하여 $k=3.117$ 일 때 $\beta=0, \pi/2, \pi$ 에 대한 임계점 부근에서의 Nusselt 수의 거동을 Fig. 5에 도시하였다. 그림에서 보이듯이 $\beta=0, \pi/2$ 인 경우에는 임계점 부근에서도 매우 완만한 Nusselt 수의 증가를 보여준다. 그러나 $\beta=\pi$ 인 경우에는 $\beta=0, \pi/2$ 인 경우와는 달리 상대적으로 매우 급격한 Nusselt 수의 증가가 임계점 부근에서 일어남을 알 수 있다. 이와 같은 현상은 Fig. 6에서 보이는 것과 같은 유동형태의 천이 때문에 일어나는 것이다. Fig. 6은 $\beta=\pi$ 일 때 임계점 $Ra_c=1707.8$ 바로 아래($Ra=1705$)와 위($Ra=1715$)에서의 유동장을 도시한 것이다. 임계점 이하인 $Ra \leq 1705$ 에서는 언제나 Fig. 6(a)와 같은 이중구조의 유동형태를 유지한다. 그러나 임계점 이상인 $Ra \geq 1715$ 에서는 열적인 불안정으로 인하여 상하의 두 roll 간의 균형이 깨어지면서 Fig. 6(b)와 같은 형태의 유동장을 형성하게 된다. 이때의 $\phi(x, y) = -1 + y + \theta(x, y)$ 의 분포는 Fig. 6(b)-(III)와 같이 임계점 이하와는 완전히 다른 양상을 하게 되며, 상하 대칭성이 깨어지는 이때 Nusselt 수는 크게 증가한다. 그러나 $\beta=0, \pi/2$ 인 경우에는 $Ra > Ra_c$

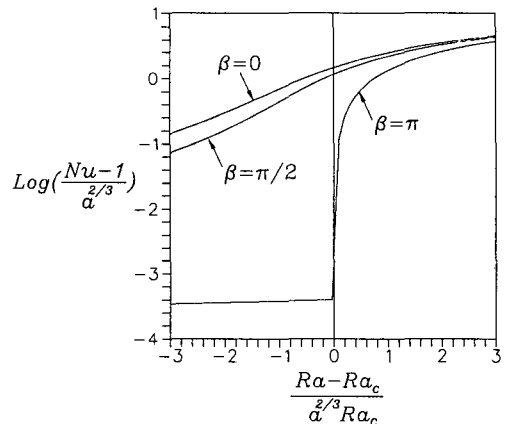


Fig. 5 Nusselt number near $Ra_c=1707.8$ for several phase differences $\beta=0, \pi/2$, and π when $a=b=0.01$ and $k=3.117$ with $Pr=0.7$.

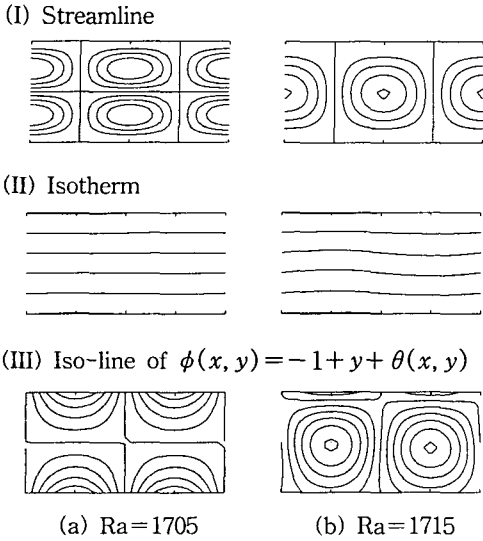


Fig. 6 Streamline and isotherm patterns at $Ra = 1705(a)$ and $Ra = 1715(b)$ with $a = b = 0.01$, $\beta = \pi$, $k = 3.117$, and $Pr = 0.7$.

에서도 $Ra < Ra_c$ 에서와 거의 같은 형태의 유동장을 유지하므로 급격한 Nusselt 수의 증가는 일어나지 않는다. 그리고 $Ra < Ra_c$ 에서는 β 에 따른 Nusselt 수의 차이가 상대적으로 크지만 대류영역 ($Ra > Ra_c$)으로 넘어간 후에는 Rayleigh 수가 증가할수록 점점 그 차이가 작아진다.

Fig. 7에는 유동의 천이가 일어난 후인 $Ra = 3000$ 에서의 $\beta = \pi$ 에 대한 유선과 등온선을 도시하였다. 유동의 형태가 변화한 직후인 $Ra = 1715$ 에서의 등온선은 Fig. 6(b)-(II)와 같다. 비록 유동의 모양이 완전히 달라졌지만 임계점 부근인 $Ra = 1715$ 에서의 등온선은 수평으로 성층화된 전도영역의 등온선과 유사하다. 그러나 Rayleigh 수가 커지면 등온선의 형태도 Fig. 7과 같이 크게 변화한다.

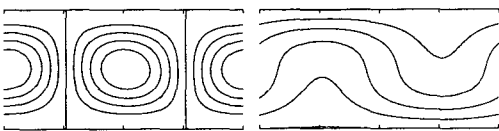


Fig. 7 Streamline and isotherm patterns at $Ra = 3000$ with $a = b = 0.01$, $\beta = \pi$, $k = 3.117$, and $Pr = 0.7$.

3.3 $a = b = 0.01$, $k = 0.5$

상하 벽면 사이의 거리를 1로 하였을 때 벽면 온도분포의 공간적인 주기는 $2\pi/k$ 이므로, 파동수 (wave number) k 가 작은 시스템의 형태는 하나의 얇은 공동(shallow cavity)을 나타낸다고 할 수 있다. 이 경우에는 $Ra > Ra_c$ 에서 여러 개의 셀을 갖는 multicellular convection이 일어난다(Fig. 8).

k 가 작을 때 특히 주목할 것은 대류영역 내에서는 똑같은 조건 하에서 여러 가지의 해가 나타난다는 것이다. Fig. 8은 $Ra = 3000$, $Pr = 0.7$ 일 때 $\beta = \pi$ 인 경우에 있어서 4가지 형태의 셀 대류 (cellular convection)을 보여주고 있다. $\beta = 0, \pi/2$ 에서도 이들과 유사한 형태의 여러 가지의 해를 갖는다. Fig. 8의 (a), (b), (c), (d)는 각각 10, 12, 14, 16개의 cell pattern을 형성하고 있다. 시스템의 높이를 1로 하고 평균 셀 크기에 기초하여 파동수를 정하면 (a), (b), (c), (d)는 각각 2.5, 3, 3.5, 4의 파동수를 갖는다. 그리고 벽면에서의 평균 Nusselt 수는 각각 1.57, 1.63, 1.61, 1.54이다. 즉, Rayleigh-Benard 대류에서의 임계파동수 $k_c = 3.117$ 에 가장 가까운 파동수를 갖는 (b)에서 가장 큰 Nusselt 수를 갖는다는 것을 알 수 있다.

Fig. 8이 보여주고 있는 여러 가지의 해는 Benjamin and Mullin⁽¹²⁾에 의해 Taylor 실험에서 발견된 여러 개의 유동과 아주 유사한 면을 가지고 있다. 그들은 aspect ratio가 12.61인 Taylor ap-

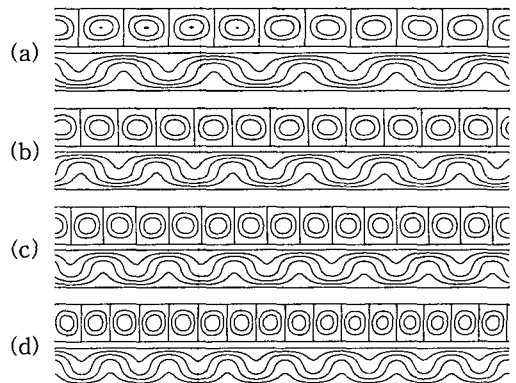


Fig. 8 Streamline and isotherm patterns showing four multiple solutions at $k = 0.5$ and $Ra = 3000$ with $a = b = 0.01$, $\beta = \pi$, and $Pr = 0.7$.

paratus에서 같은 조건 하에서 8개에서 18개 사이의 셀을 갖는 서로 다른 15가지의 정상유동을 관측하였다. 본 문제에서 $k=0.5$ 이므로 aspect ratio는 약 12.57이 되며, Fig. 8에 있는 10, 12, 14, 16개의 셀은 그들이 실험으로 관찰한 것과 좋은 비교가 된다. 한편, 그들은 완전히 제한된 밀폐용기를 가지고 실험하였으므로 9개, 11개 등의 홀수개의 cell pattern도 관찰할 수 있었다. 그러나 본 문제에 있어서는 주기적인 조건과 연속법칙(continuity)에 의해 완전히 분리된 홀수개의 cell pattern은 형성되지 않는다.

4. 결 론

일정 온도를 갖는 Rayleigh-Benard 문제에 작은 크기의 공간적인 불균일성이 가미되었을 때 일어나는 자연 대류현상을 조사하였다. 전도영역으로부터 대류영역으로의 유동의 천이와 관련하여 임계점 부근에서의 Rayleigh 수의 변화에 따른 Nusselt 수의 거동을 요약하면 다음과 같다. 위상차가 $\beta=0, \pi/2$ 인 경우에는 임계점 부근에서도 Nusselt 수가 완만하게 증가한다. 그러나 $\beta=\pi$ 인 경우에는 임계점 부근에서 유동형태가 완만하게 바뀐에 따라 상대적으로 매우 급격한 Nusselt 수의 증가가 일어난다. 즉, 벽면온도의 불균일성의 형태에(β)에 따라서 전도영역으로부터 대류영역으로 넘어가는 부근에서 Nusselt 수는 크게 증가할 수도 있고 완만하게 증가할 수도 있다.

한편 파동수 k 가 작은 경우($k=0.5$)에는 임계점 이상의 Rayleigh 수에서 복수 셀 대류(multicellular convection)가 일어나며, 4 개의 다중해(multiple solutions)가 발견되었다.

참고문헌

1. Kelly, R. E. and Pal, D., 1978, Thermal convection with spatially periodic boundary conditions: resonant wavelength excitation, *J. Fluid Mech.*, Vol. 86, pp. 433-456.
2. Busse, F. H., 1981, Transition to turbulence in Rayleigh-Bénard convection, In *Topics in Applied Physics*, Vol. 45, Edited by H. L. Swinney and J. P. Gollub, Springer-Verlag, pp. 97-137.
3. Patankar, S. V., Liu, C. H. and Sparrow, E. M., 1978, The periodic thermally developed regime in ducts with streamwise periodic wall temperature or heat flux, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 21, pp. 557-566.
4. Poulikakos, D. and Bejan, A., 1984, Natural convection in a porous layer heated and cooled along one vertical side, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 27, No. 10, pp. 1879-1891.
5. Bradean, R., Ingham, D. B., Heggs, P. J. and Pop, I., 1996, Buoyancy-induced flow adjacent to a periodically heated and cooled horizontal surface in porous media, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, Vol. 39, No. 3, pp. 615-630.
6. Yoo, J.-S., 2003, Thermal convection in a vertical porous slot with spatially periodic boundary temperatures: low Ra flow, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 2, pp. 381-384.
7. Yoo, J.-S. and Schultz, W. W., 2003, Thermal convection in a horizontal porous layer with spatially periodic boundary temperatures: small Ra flow, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 46, No. 24, pp. 4747-4750.
8. Drazin, P. and Reid, W., 1982, *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press.
9. Napolitano, M. and Quartapelle, L., Block ADI Methods for steady natural convection in two dimensions, in *Numerical Methods in Heat and Mass Transfer*, Vol. 3, John Wiley and Sons, 1985.
10. Mallinson, G. D. and De Vahl Davis, D., 1973, The method of the false transient for the solution of coupled elliptic equations, *J. Comp. Phys.*, Vol. 12, pp. 435-461.
11. Beam, R. M. and Warming, R. F., 1978, An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations, *AIAA. J.*, Vol. 16, pp. 393-402.
12. Benjamin, T. B. and Mullin, T., 1982, Notes on the multiplicity of flows in the Taylor experiment, *J. Fluid Mech.*, Vol. 121, pp. 219-310.