Journal of Korean
Data & Information Science Society
2004, Vol. 15, No. 4, pp. 825~835

An Estimation of VaR under Price Limits[1]

Yun Sook Park[2] · In-Kwon Yeo[3]

Abstract

In this paper, we investigate the estimation of the value at risk(VaR) when stock prices are subjected to price limits. The mixture of probability mass functions and beta density functions is proposed to derive the distribution of asset returns. The analyses of real data show that the proposed distribution is appropriate to explain the VaR when the price limits exist in the data.

Keywords : 가격제한, 베타분포, 수익률, 위험률, 혼합형분포

1. 머릿말

현대기업들은 여유자금을 가진 투자자에게 증권을 발행하고 매각하여 필요한 장기자금을 조달하며, 투자자들은 자금을 필요로 하는 기업의 증권을 매입함으로서 투자와 경영에 참여할 수 있는 기회를 갖게 된다. 즉, 증권을 통해 자금잉여주체로부터 자금부족주체에게로 자금이 이동하게 되는데, 거래되는 대표적인 유가증권으로는 주식과 채권이 있으며 위험회피를 위한 증권으로 선물, 옵션, 스왑 등이 있다. 이 중 주식은 자본 조달에 있어 기업의 장기성 산업자본을 형성하여 영구히 사용할 수 있는 안정성이 높은 자본이 된다. 이러한 자본 형성의 중요성 때문에 주식에 대해 관심이 커질 수밖에 없게 되고 그 주가의 가격 형성에 관심을 가지게 된다. 이때 형성되는 주식가격은 순수한 시장원리에 의해 결정된다. 결과적으로 우리는 주식에 대한 정확한 분석이 필요하며 실제 우리 경제에 맞는 분석이 절실하게 필요함을 느낄 수 있다.

일반적인 주식투자에서는 급상승 현상보다 급격히 하락하는 현상에 더 많은 관심을 가지며 이런 하락의 위험을 추정하여 관리하는데 더 많은 주의를 기울이고 있다. 이 위험이라는 것은 어떤 분야에든 존재하며 적절한 위험에 노출되고 또 그 위험을 적절하게 관리할 때만이 기업이나 금융기관, 기타 여러 분야에서 수익을 창출할 수 있을

---

1) 본 연구는 숙명여자대학교 2004년도 교내특별연구비 지원에 의해 수행되었음
2) 제 1 저자 : 전라남도 해남군 전남 통계청 해남 출장소 경제조사팀
3) 서울특별시 용산구 청파동 숙명여자대학교 수학통계학부 통계학전공, 조교수
E-mail: inkwon@sookmyung.ac.kr

것이며 이것은 곧 그 기업의 존망과도 연관이 있다. 이렇게 주식과 파생상품 등의 투자로 인한 위험을 간단한 수치로 추정하여 대처할 수 있게 해주는 방법이 Value at Risk(이하 VaR)이다. 이 VaR는 통계학을 근거로 하여 위험을 평가하는 방법이다. 공식적으로 정의하면 VaR는 “정상적인 시장여건 하에서 주어진 신뢰수준에서 일정기간 동안 발생할 수 있는 최대손실금액(expected maximum loss)”을 의미한다. VaR는 그 위험을 수치적인 금액으로 알려주기 때문에 투자 결정시에 유용하게 사용된다.

우리나라의 경우, 주가의 하락과 상승에 대한 ‘1일 가격 제한’이라는 제도가 있다. 이 가격 제한은 주식의 내재가치와 직접적인 관련이 없는 소문 등으로 인한 가격의 급등락을 방지할 뿐 아니라 실제로 내재가치의 변화에 영향을 미칠만한 정보가 발생한 경우에도 과잉반응에 의한 불필요한 가격 변동을 억제하기 위한 장치이다. 그러나 이 장치는 새로운 경제정책에 따른 시장조건의 변화, 회사의 부도 등과 같은 정확한 정보에도 즉시 반영하지 못한다는 단점도 가지고 있다. 이런 단점에도 불구하고 시장의 가격과 정보 효율성을 높인다는 긍정적인 입장에서 현재 한국, 프랑스, 일본, 대만 등 23개국에서 시행되고 있다. 그리고 1일 가격 제한과 같은 별도의 제약을 두지 않는 미국이나 영국 외 5개국에서는 대신 가격급변의 완충장치로 circuit breakers를 두고 있다.

현재까지의 VaR에 대한 대부분의 연구들은 통계적 모형들을 미국의 주식시장과 같이 가격의 상승 또는 하락률에 대해 특별한 제약을 두지 않은 상황을 가정하고 있기 때문에, 우리나라와 같이 가격제한이 있는 경우에 지금까지의 이들 모형들을 그대로 적용하면 잘못된 결론을 내릴 수도 있다. 문제는 현재까지 가격제한 제도 하에서의 주가변동에 대한 통계적 특성을 잘 설명하는 확률분포를 추정하지 못하고 있어 모수적인 통계 기법을 사용하지 못하고 있다는 것이다. 이 논문에서는 1일 가격 제한이라는 제도 하에서 극단적인 손실을 의미하는 VaR을 어떻게 모델링 해야 하는지에 대해 알아보고, 지금까지의 연구결과들과 새로 제안한 방법을 실증분석을 통해 비교하여 그 효용성을 보이고자 한다. 논문의 구성은 다음과 같이 이루어져 있다. 2절에서는 위에서 정의한 VaR을 구체적으로 어떻게 계산하는지와 기존연구들에 대해 간단하게 재고찰하고, 3절에서는 가격제한이 있는 경우 VaR를 계산하기 위한 새로운 분포를 소개하고 분포에 포함되어 있는 모수의 추론에 대해 알아본다. 4절에서는 우리나라 주요 회사들을 중심으로 실증 연구를 통하여 기존 분포와 새로운 분포의 효율성을 비교하여 본다. 마지막 절에서는 제시하고자 하는 연구의 전체적인 결과와 향후 연구 방향에 대해 논의한다.

2. 기존연구 재고찰

일반적으로 금융과 관련된 분석에서는 척도에 영향을 받지 않고 통계적으로 분석이 용이하다는 측면에서 상품의 가격보다는 수익률을 더 선호하고 있다. 시점 t(단위 일)에서의 금융상품의 가격을 P_t이라고 하면 일별 (단순)수익률(simple return)은 $R_t^S = (P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$로 정의된다. 그러나 R_t^S를 이용하여 통계적인 분석을 하는데 있어 문제점은 R_t^S의 구간이 -1에서 시작하기 때문에 R_t^S의 분포를 유도하기 쉽지 않다는 것이다. 금융상품의 수익률과 관련된 분석에서는 통계적인 성질을 유도하기 쉬

운 로그수익률 $R_t^L = \log(P_t/P_{t-1})$가 많이 사용되고 있으며 많은 경우 R_t^L들은 독립이고 동일한 정규분포 또는 t-분포를 따른다고 가정한다.

정규분포의 경우 VaR 계산이 간단하고 해석이 용이하다는 이유에서 많이 사용되는데, 예를 들어, 표준편차가 커진다는 것은 분포상의 꼬리가 두터워져 위험이 증가하는 징후로 파악할 수 있다. 또한 p기간 동안의 로그수익률에 관심이 있는 경우, $\log(P_t/P_{t-p}) = R_t + \cdots + R_{t-p+1}$와 같이 여러 개의 단기 수익률의 합으로 표시될 수 있어 특별한 이상점이 없는 한 정규분포를 이용하여도 큰 문제가 없다. 그러나 위험관리라는 측면에서 예외적인 수치에 관심을 많이 가지고 발생할 위험을 미리 대비해야 하는데 정규분포의 경우 예외적 상황을 고려하는데 미흡할 수도 있다. 또한 Zangari(1996)이나 Li(1999) 등의 분석에 의하면 수익률의 분포 꼬리부분이 두텁다고 보고 되고 있는데 이러한 이유 때문에 t-분포가 종종 사용되기도 한다. 그러나 Fama(1965)와 Sharpe(1970) 등은 기존 수익률 분포에 대한 연구에서 일별 수익률의 분포가 오른쪽보다 왼쪽꼬리에 더 많은 관측치가 존재하며 왼쪽으로 치우친 형태를 가지는 것을 보였다. 이러한 점에서 표준편차는 비대칭 상황에서 설명력이 떨어지고 수익률에 대해 과소평가할 수 있는 가능성이 크게 만든다. 비대칭적 문제를 해결하기 위해 극한값분포를 사용하기도 하는데 Neftci(2000)에 의한 실증분석에서 정규분포보다 결과가 더 좋은 것으로 나타났다. 이 외에도 동일한 분산을 가지지 않는 경우 ARCH나 GARCH 등의 이분산모형들이 사용되고 있지만, 이 모형에서 사용되는 분포들은 대부분 정규분포나 t-분포와 같이 대칭인 형태를 가정하기 때문에 비대칭적 상황을 설명하는데 어려움이 있는 것으로 나타났다.

또 다른 방법으로는 수익률의 분포가 특정분포를 따른다고 제한하지 않고 단지 경험적 분포함수(empirical distribution function)를 이용하여 VaR를 추정하는 방법이다. 이 방법은 분포선택에서 발생할 수 있는 오류를 제거할 수 있으며 수익률의 분포가 기울어져 있거나 꼬리부분이 두터운 경우 정규분포를 가정했을 때보다 정확한 결과를 얻을 수 있다. 그러나 특정분포를 가정했을 때는 적은 수의 모수로 전체적인 분포의 특성을 파악할 수 있지만, 경험적 분포는 많은 데이터를 보관하여 필요할 때에 확인해야 하기 때문에 대용량의 저장 공간이 필요하며 새로운 자료가 추가 되는 경우 전체 분포를 갱신하여야 하는 단점이 있다.

위의 연구들은 대부분 가격제한이 없는 상황에서의 분석이 이루어져 왔다. 가격제한에 관련된 연구를 살펴보면, Hodrick and Srivastava(1987)와 McCurdy and Morgan(1987)은 가격제한에 관련된 분석에서 가격제한선에 도달한 값을 제한선에 의해 제한된 값이 아닌 관측값으로 취급(ignoring price limits, 이하 IPL)하거나 분석에서 제외(deleting price limits, 이하 DPL)시켰는데, Wei and Chiang(1997)이 1997에서 1979 사이 일본의 엔화 선물에 대한 표준편차를 계산한 결과 IPL인 경우 5.7% DPL인 경우 14.3%정도 과소추정되었으며 이 방법은 많은 분석에서 여러 가지 문제가 있는 것으로 나타났다. Kodres(1988, 1993)는 두 연구에서 계량경제학적 관점에서 가격제한에 대한 중요한 처리방법을 제안하였는데 이 연구들에서는 가격제한을 중간절단변수(censored variables)로 취급하였다. 이 후 중간절단 형태는 많은 연구에서 이용되어 왔으며 국내 연구로는 이상빈, 김과정(1996), 박영규, 최대우, 최영수(1997), 유진(2001) 등이 있으나 대부분 정규분포를 근거를 두고 있다.

위에 연구들을 보면 가격제한이 있는 상황에서의 수익률과 관련된 분석은 중간절단함수이면서 비대칭적 상황을 설명할 수 있는 분포를 근거로 이루어져야 한다는 것으

로 정리할 수 있다.

3. 제안 모형

3.1 VaR의 정의

위험(Risk)이란 미래의 수익에 손실을 가져올 수 있는 모든 부정적인 영향이라 할 수 있는데 이는 기대하지 않았던 일로 인하여 일어날 수 있는 미래 수익의 불확실성에 노출되었을 때를 의미한다. 이런 불확실성은 임의로 통제할 수 있는 성질의 것이 아닌 외부의 여러 상황에서 예고 없이 닥치는 상황을 말한다. 더욱이 현재 금융시장의 자율화, 세계화로 경쟁이 더욱 심화되고 급변하는 환경 속에서 금융기관들은 위험관리의 필요성을 보다 절실하게 느끼게 되었으며, 이제는 적절한 위험관리를 하지 않고서는 통합된 세계화 시장에서 융통성 있게 위험을 대비하기 어렵게 되었다. 금융기관 입장에서의 위험은 일차적으로 시장위험과 신용위험을 들 수 있으며, 시장위험은 금융자산과 부채의 가치가 변함으로써 발생하는 위험이며 신용위험은 거래상대방이 계약의무를 이행하지 않음으로써 발생하는 위험이다. 전통적인 위험측정치인 베타, 듀레이션, 볼록성, 표준편차, Greeks, 위기검증 등의 사용되고 있는데 이런 측정치가 있음에도 불구하고 VaR이 선호되는 이유는 과거의 위험측정치들에서는 할 수 없었던 합산이 가능하다는 것이다. 또한 VaR 시스템은 시장위험을 계량화 할 수 있어 신용위험을 측정하는 데에도 사용될 수 있다. 많은 금융기관에서는 VaR을 이용한 위험관리시스템을 구축하고 있으며 이를 자체적으로 위험을 관리하는데 사용하기도 하고 개발 시스템을 판매하기도 한다.

머릿말에서 언급한 VaR의 정의에서 알 수 있듯이 VaR를 계산하기 위해서는 신뢰수준과 목표기간을 정하여야 한다. 이 두 값은 각 기관마다 임의로 기업의 특성을 고려하여 선택하고 있다. 예를 들면 일반적인 은행들은 신뢰수준을 95%～99%로 선택하게 되는데 Bankers Trust은행은 99%수준, Citibank는 94.5%, J.P.Morgan사는 95%수준, Chemical and Chase은행과 Bank of America은 97%의 신뢰수준을 사용하고 있다. 목표기간은 금융상품에 따라 차이가 큰데 채권과 같이 수익률의 변화가 심하지 않는 경우 보유기간이 큰 편이고, 주식이나 외환과 같이 변화가 심한 경우 보유기간이 짧은 경향이 있다. 참고로 J. P. Morgan의 RiskMetrics에서는 95% 신뢰수준에 1일 보유기간을 사용하고 바젤위원회에서는 99% 신뢰수준에 10일 보유기간을 사용하도록 권장하고 있다.

이 논문에서는 1일 가격제한의 상황을 고려하기 위해 포트폴리오 대신 개별 기업의 주식에서 발생하는 일별 수익률을 이용하여 VaR의 분포를 유도하는 것에 초점을 맞춘다. 신뢰수준이 $100(1-\alpha)\%$에서의 VaR를 계산하기 위해서는 보유기간 말 기준의 주식가치 또는 수익률을 나타낼 수 있는 확률밀도함수 f를 구하고 이 밀도함수를 이용하여 아래와 같은 조건을 만족하는 최소가치 R^*를 찾아야 한다.

$$\int_{-\infty}^{R^*} f(u)\,du = \alpha. \tag{2.1}$$

즉, VaR은 α에 해당하는 분위수(quantile)를 추정하는 것으로 여기서의 문제는 확률밀도함수 f를 어떻게 가정하고 함수에 포함된 모수를 어떻게 추정할 것인가이다.

3.2 제안분포

자연적 또는 사회적 현상을 통계적인 방법으로 분석하기 위해서는 먼저 현상 또는 현상에서 관측된 자료의 특성을 제대로 설명할 수 있는 통계적 모형을 설정하는 것이 선행되어야 한다. 잘못된 분석결과의 많은 부분은 이런 특성에 맞지 않는 분포나 모형을 기초로 한 분석방법을 사용하는데 그 원인을 찾을 수 있다. 이 절에서는 한국 주식시장의 가격제한과 같이 관찰 자료의 값이 강제적으로 정해 놓은 임의의 구간 $[l, u]$에서만 관측되도록 만든 구조를 가지는 현상에 대한 확률분포를 유도하고자 한다. 추가적으로 대부분의 (로그)수익률 분포는 오른쪽보다 왼쪽꼬리에 더 많은 관측치가 존재하며 VaR에서의 주된 관심사는 분포에서 왼쪽부분이라는 것을 주의할 필요가 있다.

관측된 자료가 임의의 구간을 벗어날 수 있는데도 불구하고 강제적으로 특정구간에서만 값을 가지도록 만든 가격제한 모형은 각 끝점에서 질량을 가지고 사이에서는 밀도를 가지는 중도절단분포(censored distribution)로 생각할 수 있다. 즉, 확률변수 X를 가격제한이 없는 상황에서의 수익률이라고 하고 가격제한의 제약이 주어진 경우의 수익률을 R라고 하면 R는 다음과 같이 정의된다.

$$R = \begin{cases} l, & X \le l \\ X, & l < X < u \\ u, & X \ge u. \end{cases}$$

가격제한 상황에서 R가 l과 u에서 가질 확률은 각각 $\delta_L = P(R = l) = P(X \le l)$과 $\delta_U = P(R = u) = P(X \ge u)$이 된다. 문제는 가격제한이 없는 상황에서의 X의 분포가 앞에서 언급한 많은 연구에 의해 보였던 것처럼 꼬리부분이 두터우면서 비대칭적이기 때문에, 유도하는 것도 쉽지 않지만 유도하더라도 가격제한에 의해 발생한 확률 δ_L과 δ_U의 추정값이 실제자료에서 하한값이나 상한값에 있는 비율과 차이가 있을 수 있다는 것이다. 이런 문제를 해결하기 위해 이 논문에서는 가격제한에 도달한 비율을 먼저 구하고 구간 (l, u)사이에서의 분포를 유도하는 방법을 사용한다. 함수 $I(a)$는 a가 참이면 값이 1이고 거짓이면 0인 지시함수라고 하고 g를 임의의 밀도함수라고 했을 때, R의 확률밀도함수를 다음과 같이 이산형과 연속형이 혼합되어 있는 혼합분포 구조를 가진다고 가정한다.

$$f(r) = \delta_L I(r = l) + \delta_U I(r = u) + (1 - \delta_L - \delta_U) g(r) I(l < r < u).$$

베타분포는 두 형태모수에 따라 다양한 모양을 제공하기 때문에 일반적으로 제한된 구간에서의 임의의 확률밀도함수는 베타밀도함수의 혼합형(mixture of beta densities)을 이용하여 근사시킬 수 있다는 것이 알려져 있다. 이 논문에서는 밀도함수 g를 추

정하는데 다음과 베타밀도함수의 혼합형을 이용하는 것을 제안한다.

$$g(r) = \sum_{i=1}^{p} w_i B(r; \alpha_i, \beta_i) \tag{3.1}$$

여기서 $w_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{p} w_i = 1$이고 모수 $\alpha > 0$, $\beta > 0$에 대해

$$B(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \dfrac{(x-L)^{\alpha-1}(U-x)^{\beta-1}}{(U-L)^{\alpha+\beta-1}} & , x \in (L, U) \\ 0 & , x \notin (L, U) \end{cases}$$

이렇게 가정했을 때, 추정해야할 모수가 $\theta = (\delta_L, \delta_U, w_2, \ldots, w_p, \alpha_{1,} \ldots, \alpha_p, \beta_1 \ldots, \beta_p)$ 인데 p가 큰 경우 밀도함수 g에 대한 섬세한 추정밀도함수를 제공할 수 있겠지만 $3p+1$개나 되는 모수를 추정해야 하는 어려움이 있다. 이러한 문제를 해결할 수 있는 방법으로 모수 $\sigma > 0$에 대해 밀도함수 g를 다음과 같이 가정하는 것이다.

$$g(r) = \sum_{i=1}^{p} w_i B(r; i\sigma, (p+1-i)\sigma) \tag{3.2}$$

이렇게 가정하면 추정할 모수가 $(\delta_L, \delta_U, w_2, \ldots, w_p, \sigma)$로 $p+2$로 줄어들지만 다양한 형태의 밀도함수를 제공할 수 있다. 여기에 $(w_1, \ldots, w_p)$ 중 하나만이 1이고 나머지는 0으로 만들면 p개의 베타밀도함수 중 가장 적합력이 뛰어난 베타밀도함수를 선택하는 것이 되어 실제로 추정해야 하는 모수가 $(\delta_L, \delta_U, \sigma)$로 줄일 수 있다. 그러나 대부분의 경우, 다음과 같은 단순한 형태의 분포를 가정하여도 좋은 결과를 얻는 것으로 나타났다.

$$f(r) = \delta_L I(r=l) + \delta_U I(r=u) + (1-\delta_L-\delta_U) B(r; \alpha, \beta) \tag{3.3}$$

3.3 추정 방법

식 (3.1) 또는 (3.2)을 가정할 경우 추정해야 할 모수가 많아지고 가중치 w에 대한 제약 조건 때문에 단순히 Newton-Raphson 방법과 같은 수치해석학적 방법을 사용해서 추정량을 구하기 어렵다. 이 같은 모형에서는 simulated-annealing과 같은 방법을 확률적 최적화 방법을 사용하는 것이 더 실용적이다. 또한 관점이 다를 수 있지만 MCMC 방법을 사용한 베이지안 방법을 사용하여 추론할 수도 있다. 이 논문에서는 정규분포와 같이 모수의 수가 많지 않은 기존 연구와의 비교를 위해, 식 (3.3)을 가격제한에 대한 분포로 가정하고 모수에 대한 추론과 실제자료를 이용한 분석비교를 하고자 한다.

중간절단된 확률변수 $R_1, R_2, \ldots, R_n$는 독립이고 관측값 $r_1, r_2, \ldots, r_n$이 주었졌을 때

하한값과 상한값에 도달한 개수를 $n_L = \sum_{i=1}^{n} I(r_i = l)$과 $n_U = \sum_{i=1}^{n} I(r_i = u)$라고 하면 식 (3.3) 가정 하에서의 모수 $\theta = (\delta_L, \delta_U, \alpha, \beta)$에 대한 로그가능도함수는 다음과 같이 주어진다.

$$l(\theta;r) = n_L \log(\delta_L) + n_U \log(\delta_U) + (n - n_L - n_U)\log(1 - \delta_L - \delta_U) + \sum_{i \in A} B(r_i;\alpha, \beta) \tag{3.4}$$

여기서 집합 A는 r_i가 (l, u)안에 있는 $n - n_L - n_U$개의 자료를 의미한다. 최대가능도추정법에 의한 모수 δ_L과 δ_U의 추정량은 각각 $\hat{\delta}_L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(r_i = l) = \frac{n_L}{n}$과 $\hat{\delta}_U = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(r_i = u) = \frac{n_U}{n}$가 되는 것을 쉽게 보일 수 있다. 모수 α와 β의 최대가능도추정량은 (l, u)구간에서만 관측된 r들만을 이용하여 아래의 최대가능도 방정식을 만족하는 $\hat{\alpha}$과 $\hat{\beta}$를 수치해석학적으로 구할 수 있다.

$$\psi(\alpha) - \psi(\alpha + \beta) = \frac{1}{n - n_L - n_U} \sum_{i \subset A} \log\left(\frac{r_i - l}{u - l}\right)$$

$$\psi(\beta) - \psi(\alpha + \beta) = \frac{1}{n - n_L - n_U} \sum_{i \in A} \log\left(\frac{u - r_i}{u - l}\right)$$

여기서 ψ는 digamma함수를 의미한다. 이렇게 계산된 최대가능도추정량 $\hat{\theta} = (\hat{\delta}_L, \hat{\delta}_U, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$의 점근적 성질에 대해서는 Johnson, Kotz, and Kemp(1992)의 11장과 Johnson, Kotz, and Balakrishnan (1995)의 25장을 참고하기 바란다.

신뢰구간 $100(1-\alpha)\%$의 VaR를 구하고자 한다면 분포의 왼쪽 꼬리부터 시작하여 $\alpha\%$에 해당하는 분위수 값을 구해야 하는데, 먼저 하한값과 상한값에 도달한 비율 $\hat{\delta}_L$과 $\hat{\delta}_U$를 구한 후, 베타분포 $g(x)$에서 나머지 $(\alpha - \hat{\delta}_L)/(1 - \hat{\delta}_L - \hat{\delta}_U)$에 해당하는 분위수 값을 구한다. 수익률로 R^S을 사용한 경우 해당 분위수를 q_α^S라고 하고 현재 투자액을 W라고 하면 VaR은 $W q_\alpha^S$가 되고 R^L을 사용한 경우 분위수를 q_α^L이라고 하면 $W(\exp(q_\alpha^L) - 1)$이 된다.

제 4 장 실증 연구

가격제한장치는 주식의 급격한 오르내림에 따른 투자자들의 불안감 등을 막기 위해 정한 하루의 주가가 변동할 수 있는 최고한도(상한가)와 최저한가(하한가)의 폭을 의미하며 기준은 전일 종가이다. KOSPI와 KOSDAQ은 각각 15%와 12%로 가격제한폭이 있으며 이는 전일 종가의 가격 제한폭 내에서만 주문이 가능함을 의미하며 KOSPI의 R^S와 R^L은 각각 [-0.15, 0.15]와 [-0.163, 0.139] 그리고 KOSDAQ은 [-0.12, 0.12]와 [-0.138, 0.113]에서만 값을 가지고 진다. 그러나 실제 자료에 대한 상한가와 하한가는 조금 다르다. 예를 들어 기준가가 10200원인 경우 15%는 10200×0.15가 되어 1530원이 되는데 이런 경우에는 끝자리를 자르고 1500원만 계산하여 상한가는 11500원(14.7%상승)이 된다. 이렇게 끝자리를 자르는 경우는 가격대별로 호가단위에 따라 다른데 10000원 이상인 경우에는 호가단위가 100원씩, 5000원에서 9950원까지는 50원씩이고 5000원 미만은 10원단위를 사용하고 있다. 그러므로 제안된 분포를 이용하여 분석할 경우에는 수익률이 l이나 u는 아니지만 하한값이나 상한값으로 분류된 자료를 이용하여 $\hat{\delta}_L$과 $\hat{\delta}_U$를 먼저 계산하고 나머지 자료를 이용하여 구간 (l, u)에서의 베타분포를 추정해야 한다.

실증분석에서는 KOSPI와 KOSDAQ에 등록된 기업 중 극값이 존재하지 않은 기업과 극값이 어느 정도 존재하는 기업을 선별하여 2002년 9월 18일부터 2004년 9월 30일까지 501일간의 종가를 이용하여 분석하였다. 주식의 감자나 증자에 의한 급격한 가격변동은 분석에서 제외시켰으며 정규분포를 가정한 모형과의 비교를 통해 제안한 분포가 얼마나 효과적인지를 확인하였다.

<표4.1> 단순수익률에 대한 VaR 추정과 비율

신뢰수준		95%		97%		99%	
분포		정규	중간절단	정규	중간절단	정규	중간절단
삼성전자 (15%,0,0)	VaR(%)	-3.84	-3.88	-4.41	-4.42	-5.47	-5.42
	비율	.044	.044	.034	.034	.018	.018
	CV	.050	.046	.034	.034	.018	.018
국민은행 (15%,0,0)	VaR(%)	-4.56	-4.59	-5.21	-5.20	-6.45	-6.33
	비율	.048	.048	.026	.026	.016	.016
	CV	.054	.054	.030	.030	.016	.016
안철수연구소 (12%,1,5)	VaR(%)	-5.70	-5.79	-6.45	-6.51	-8.02	-7.82
	비율	.046	.040	.026	.024	.006	.006
	CV	.050	.050	.026	.026	.008	.010
LG카드 (15%,19,17)	VaR(%)	-12.12	-13.88	-13.77	-15.00	-16.87	-15.00
	비율	.084	.070	.070	.038	.000	.038
	CV	.086	.070	.070	.048	.032	.038
하이닉스 (15%,5,15)	VaR(%)	-8.95	-9.63	-10.26	-10.82	-12.72	-15.00
	비율	.034	.024	.024	.022	.018	.010
	CV	.036	.028	.024	.024	.018	.016
코리아텐터 (12%,11,25)	VaR(%)	-9.12	-9.63	-10.41	-10.76	-12.86	-12.00
	비율	.054	.050	.038	.030	.000	.022
	CV	.054	.048	.042	.034	.000	.022

<표 4.2> 로그수익률에 대한 VaR 추정과 비율

	신뢰수준	95%		97%		99%	
	분포	정규	중간절단	정규	중간절단	정규	중간절단
삼성전자 (15%,0,0)	VaR(%)	-3.80	-3.86	-4.34	-4.40	-5.36	-5.39
	비율	.044	.044	.034	.034	.018	.018
	CV	.050	.046	.036	.034	.018	.018
국민은행 (15%,0,0)	VaR(%)	-4.50	-4.56	-5.12	-5.17	-6.28	-6.28
	비율	.050	.048	.028	.026	.016	.016
	CV	.054	.054	.032	.030	.016	.016
안철수연구소 (12%,1,5)	VaR(%)	-5.54	-5.74	-6.29	-6.45	-7.71	-7.74
	비율	.050	.046	.028	.026	.006	.006
	CV	.052	.050	.030	.028	.010	.012
LG카드 (15%,19,17)	VaR(%)	-11.73	-13.81	-13.19	-15.00	-15.86	-15.00
	비율	.086	.070	.074	.038	.000	.038
	CV	.088	.070	.076	.052	.036	.038
하이닉스 (15%,5,15)	VaR(%)	-8.61	-9.53	-9.79	-10.70	-11.96	-15.00
	비율	.040	.024	.024	.024	.020	.010
	CV	.040	.028	.026	.024	.020	.016
코리아텐더 (12%,11,25)	VaR(%)	-8.83	-9.57	-9.99	-10.70	-12.16	-12.00
	비율	.054	.048	.046	.034	.000	.022
	CV	.056	.048	.044	.036	.002	.022

<표4.1>은 단순수익률을 <표4.2>는 로그수익률을 이용하여 분석한 결과이다. 신뢰수준 95%, 97%, 99%에서의 VaR를 계산하였으며 500개의 수익률 중 계산된 VaR보다 작은 값을 가지는 수익률의 비율을 계산하였다. 또한 모형의 타당성을 확인하기 위해 500개의 수익률을 10개의 집단으로 나누어 교차타당성(cross validation) 방법을 이용하여 VaR의 타당성을 확인하였는데, 450개의 훈련자료(training data)로 VaR를 계산하고 나머지 50개의 수익률 검증자료(test data)에서 VaR보다 작은 개수를 구하는 작업을 10번 반복했을 때, 전체에서 VaR보다 작은 수익률의 비율을 CV란에 추가하였다. 기업명의 아래에 있는 괄호의 값은 각각 변동제한폭, 하한값의수, 상한값의 수를 나타낸다.

<표4.1>과 <표4.2>를 보면 삼성전자나 국민은행과 같이 재무구조가 건실하고 자본금이 크며, 기업 내용이 우량한 기업의 경우 상한이나 하한값이 존재하지 않고 안정적인 형태를 가지며 있어 정규분포로도 설명이 잘 되는 것으로 나타났으며, 제안된 분포의 결과도 정규분포와 차이가 거의 없는 것으로 나타났다. 안철수연구소와 같이 적은 수의 상한 또는 하한값을 가지는 기업 또한 정규분포와 제안된 분포에 차이가 거의 없으며 설명도 잘 하고 있는 것으로 나타났다. 문제는 LG카드, 하이닉스 반도체, 코리아텐더와 같이 상한과 하한의 값이 어느 정도 있는 경우이다. <표4.1>과 <표4.2>에서 위의 세 기업의 경우 VaR값이 큰 차이가 없는 반면 아래의 세 기업은 정규분포를 가정한 경우, 모든 신뢰구간에 대해 계산된 VaR값의 차이가 큰 것으로 나타나 어떤 수익률을 도구로 사용하는가에 따라 VaR에 차이가 있을 수 있다는 것을 의미한

다. 이에 반해 제안된 분포를 사용한 경우 단순수익률과 로그수익률의 차이가 상대적으로 작은 것을 볼 수 있다. 또한 LG카드(99%)와 코리아텐더(99%)에서의 VaR를 보면 가격제한에 의해 발생할 수 없는 수익률이 정규분포에서 계산이 되었으며 해당 비율이 0인 것을 볼 수 있다. 일반적으로 수익률에서 상한 또는 하한값을 갖는 경우 경험적 분포함수를 이용한 실제분포의 값이 의미를 가지는 것으로 알려져 있는데 위의 표들을 보면 정규분포보다는 제안된 분포가 실제분포에 더 가깝다는 것을 알 수 있다. 결론적으로 제안된 분포를 이용한 VaR 계산은 안정적인 상황에서의 정규분포와 비슷한 결과를 제시하면서도 극값이 존재하는 경우에는 정규분포보다 설명력이 높은 것으로 나타났다.

5. 결론 및 논의

이 논문에서는 주가를 중심으로 지금까지와는 다른 방법으로 '1일 가격 제한'이라는 제약 하에서의 VaR를 추정하기 위한 분포를 제안하였다. 일정한 범위 내에서만 주가가 관측되는 점을 고려하여 관측된 자료가 임의의 구간을 벗어날 경우, 강제적으로 특정구간에서만 값을 가지고 있기 때문에 제안된 분포는 상한과 하한값에서 확률을 가지고 구간 내에서 모수에 따라 다양한 형태를 가지는 베타 분포로 가정하였다. 실증분석 결과, 극값이 많이 존재하는 경우 실제 분포에 맞게 추정되어 효과적인 분포임을 확인하였다. 보다 정확한 VaR를 계산하기 위해 모수추정과 실증분석에서 사용된 분포 외에 식 (3.1)과 (3.2)의 분포에 대해서도 연구할 필요가 있으며 이들 분포에 대해서는 최대가능도추정법 뿐만 아니라 MCMC 방법을 이용한 Bayesian 방법을 사용하여 수익률 분포를 추정해보고 비교해 보는 작업도 필요하다고 생각된다.

참고문헌

1. 박영규, 최대우, 최영수 (1997), 상하한가 제도하에서의 다항옵션평가모형 개발연구, *재무관리* 14, 263-286.
2. 유진 (2001), 1일 주가수익률제한과 진실한 변동성의 추정, *증권학회지* 28, 543-577.
3. 이상빈, 김광정 (1996), 한국주식시장에서 가격제한제도가 주가변동성에 미치는 효과에 관한 실증적 연구, *재무관리연구* 10, 231-248.
4. Fama, E. F. (1965), The Behavior of Stock Market Prices, *Journal of Business*, 38, pp.34-105.
5. Hodrick, R. and Srivastava, S. (1987), Foreign currency futures, *Journal of International Economics* 22, 1-24.
6. Johnson, N., Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1994), Univariate Distribution Distribitions Vol 2, 2nd Ed. John Wiley & Sons, New York.
7. Johnson, N., Kotz, S., and Kemp, A. (1992), Univariate Discrete Distributions, , 2nd Ed. John Wiley & Sons, New York.
8. Kodres, L. E. (1988), Tests of unbiasedness in foreign exchange futures

markets: the effects of price limits(with discussion), *Review of Futures Markets* 7, 139-175.
9. Kodres, L. E. (1993), Tests of unbiasedness in foreign exchange futures markets: an examination of price limits and conditional heteroscedasticity, *Journal of Business* 66, 463-490.
10. Neftci, S. (2000), Value at Risk Calculation, Extreme Events, and Tail Estimation, *The Journal of Derivatives* 7, 23-37.
11. Li, D. X. (1999), Value at Risk Based on the Volatility Skewness and Kurtosis, RiskMetrics Group
12. McMurdy, T. H. and Morgan, I. G. (1987), Tests of the Martingale hypothesis for foreign currency futures, *International Journal of Forecasting* 3, 131-148.
13. Sharpe, W. F.(1970), Portfolio Theory and Capital Markets, McGraw-Hill.
14. Wei, K. C. J., and Chiang, R. (1997), GMM and MLE approaches for estimation of volatility and regression models when daily prices are subjected to price limits, Mimo, Department of Finance, School of Business and Management, The Hong Kong University of Science and Technology.
15. Zangari, P.(1996), An Improved Methodology for Measuring VaR. *RiskMetrics Monitor*, Reuters/ J. P. Morgan

[2004년 8월 접수, 2004년 11월 채택]