Journal of Korean
Data & Information Science Society
2004, Vol. 15, No. 4, pp. 783~791

Recent Review of Nonlinear Conditional Mean and Variance Modeling in Time Series

S.Y. Hwang[1)] · J.A. Lee[2)]

Abstract

In this paper we review recent developments in nonlinear time series modeling on both conditional mean and conditional variance. Traditional linear model in conditional mean is referred to as ARMA(autoregressive moving average) process investigated by Box and Jenkins(1976). Nonlinear mean models such as threshold, exponential and random coefficient models are reviewed and their characteristics are explained. In terms of conditional variances, ARCH(autoregressive conditional heteroscedasticity) class is considered as typical linear models. As nonlinear variants of ARCH, diverse nonlinear models appearing in recent literature including threshold ARCH, beta-ARCH and Box-Cox ARCH models are remarked. Also, a class of unified nonlinear models are considered and parameter estimation for that class is briefly discussed.

Keywords : Box-Cox, Nonlinear AR, Nonlinear ARCH, Threshold model

1. 서론

주가, 환율, 포트폴리오 수익률과 같은 시계열 자료는 시간에 따른 계열상관(serial correlation) [즉, 자기상관(autocorrelation)]과 조건부 이분산(conditional heteroscedasticity)을 가정하는 것이 타당하다. 자기상관은 기본적으로 조건부 평균으로부터 발생하며 Box-Jenkins(1976)의 ARMA(autoregressive moving average)에 의해 성공적으로 모형화 되었으며 조건부 이분산은 Engle(1982)이 제안한 ARCH(autoregressive conditional heteroscedasticity) 모형으로 효과적으로 설명하여 왔다. 조건부 평균과 분산을 동시에 고려한 모형으로는 Weiss(1984)의

---

1) First Author : Professor, Dept. of Statistics, Sookmyung Women's University, Seoul, 140-742, Korea.
Email : shwang@sookmyung.ac.kr

2) Graduate student, Dept. of Statistics, Sookmyung Women's University

ARMA-ARCH 모형을 들 수 있다. 하지만 ARMA 와 ARCH 모형은 기본적으로 선형(linear)모형으로서 안정적인(stable) 시계열의 설명에는 문제가 없지만 비선형적인 현상을 보여주는 시계열자료의 분석에는 한계점을 가지고 있다. 비선형 시계열 모형의 필요성에 대한 내용에 대해서는 Tong(1990)의 1장을 참고하기 바란다. 최근 30 여년간 시계열 평균과 분산에 대한 비선형 모형의 연구가 상당부분 누적되어 왔으며 본 연구에서는 평균과 분산 두 가지 모두에서 상대적으로 최근의 비선형 모형에 대해 검토하고 특징을 간략히 소개하고자 한다. 논의의 간편성을 위해 일차(first-order)모형만을 다루고 있지만 제시된 참고문헌을 통해 고차의 모형으로 쉽게 확장 시킬 수 있을 것이다. 또한 평균과 분산 모두에 있어서 일반적인 비선형 모형족(family of nonlinear models)을 제시하고 연관된 모수 추정에 대해서 알아보았다.

2. 조건부 평균을 위한 비선형 모형

선형모형으로 널리 쓰이고 있는 Box-Jenkins(1976)의 자기회귀(이하 AR(autoregressive)로 표기) 모형은 다음과 같다.

$$\text{AR}(1):\ X_t = \phi_1 X_{t-1} + \epsilon_t \tag{2.1}$$

여기서 $\varepsilon_t \sim i.i.d.\ (0,\ \sigma^2_{\varepsilon})$ 이다. 선형모형은 자료 분석 측면에서는 편리 하다는 장점이 있으나, 주가나 환율 자료에서와 같이 갑작스런 쇼크 현상이나 심한 변동현상이 있으면 이러한 가정이 적합하지 않음을 알게 되었으며 선형성을 가정한 ARMA 모형이 광범위하게 사용됨에도 불구하고 경제 자료를 포함하여 많은 자료들이 비선형(nonlinear) 특징을 가지고 있기 때문에 ARMA 모형으로는 잘 설명이 되지 않는다는 사실이 경험적으로 입증되었다(cf. Tong(1990, 1장)). 이 절에서는 그 동안 제시되어온 비선형 시계열 모형 중 분계(threshold) 자기회귀; TAR 모형, 지수적(exponential) 자기회귀; EAR 모형 그리고 랜덤계수(random coefficient) 자기회귀; RCA 모형에 대해서 살펴보도록 하자.

분계점 자기회귀 모형(threshold autoregressive model ; TAR)
TAR 시계열 $\{X_t\}$ 는 다음과 같다.

$$\text{TAR}(1):\ X_t = \phi_1 X^{+}_{t-1} + \phi_2 X^{-}_{t-1} + \epsilon_t \tag{2.2}$$

여기서 $X_t^{+} = \max(X_t, 0)$, $X_t^{-} = \min(X_t, 0)$ 이다. 모형을 살펴보면 직전 자료가 양수일 때와 음수일 때에 따라 회귀식의 기울기가 달라지는데, 예를 들어 X_t 를 주가 수익률로 보고 수익률 0을 기준으로 생각한다면 직전의 값 X_{t-1} 이 기준(0) 이상으로 올랐을 때와 기준(0) 이하로 떨어졌을 때의 비례계수가 각각 다르게 책정될 수 있다는 현실을 반영하는 것이다. $\phi_1 = \phi_2$인 경우는 AR(1) 모형과 같다. TAR 모형은 특히 극한 사이클과 비대칭성과 같은 비선형 모형을 잘 설명한다고 알려져 있다

(cf. Tong(1990)).

지수적 자기회귀 모형(exponential autoregressive model ; EAR)
시계열 $\{X_t\}$가 다음과 같은 형태일 때 지수적 자귀회귀(EAR(1)) 모형을 따른다고 한다.

$$\text{EAR(1)} \ : \ X_t = (\phi_1 + \phi_2 e^{-X_{t-1}^2}) X_{t-1} + \epsilon_t \tag{2.3}$$

모형에서 X_{t-1}^2 가 유계(bounded)인 영역에서는 선형모형인 $\phi_1 X_{t-1}$과 차별적인 모습을 보이지만 X_{t-1}^2가 커질수록 $e^{-X_{t-1}^2}$가 ‘ 0 ‘으로 수렴하여 X_t는 AR(1) 모형과 유사한 모습을 보인다.

랜덤계수 자기회귀 모형(random coefficient autoregressive model ; RCA)
시차가 1인 랜덤계수 자기회귀 모형식은 다음과 같다.

$$\text{RCA(1)} \ : \ X_t = \phi_t X_{t-1} + \epsilon_t \tag{2.4}$$

여기서 $\phi_t \sim i.i.d.(\ \phi\ , \sigma_\phi^2\ )$, $\varepsilon_t \sim i.i.d.\ (0,\ \sigma^2{}_\varepsilon)$ 이고 ϕ_t 와 ϵ_t 는 서로 독립적이다. AR 과 EAR 모형에서는 회귀계수 ϕ가 시점 t에 영향을 받지 않았던 것과 달리 랜덤계수 자기회귀 모형에서는 회귀계수가 시점에 따라 달라지므로 계수 변화가 있는 자료에 있어서는 계수 변화를 반영할 수 있으므로 효과적이다. 자세한 내용은 Nicholls와 Quinn(1982)을 참고하기 바란다.

3. 조건부 분산을 위한 비선형 모형

ARCH(autoregressive conditional heteroskedasticity : Engle, 1982) 모형이란 현시점에서 관측치의 조건부 분산이 과거시점 관측치의 함수로 나타내어질 때를 말한다. 선형모형인 ARMA 모형에서는 조건부 분산이 모든 시점에서 일정한 것과 달리 시점에 따라 분산이 달라진다는 것이다. 이러한 특징은 우리나라의 IMF(국제통화기금 : 1997년 11월)시기의 주가 자료 및 환율 자료 등과 같은 급락과 급상승이 자주 반복되는 시계열 재정자료에서 흔히 나타난다. 전체 자료 중 극소수의 시점에서만 변동의 폭이 크다면, 전체의 분산을 똑같은 변동의 폭으로 설명하는 것이 합리적이지 않다. 즉, 변동이 작은 구간에 대해서는 분산의 폭을 좁혀야 하며, 일부 변동이 큰 시점에서는 그에 맞는 분산의 폭을 잡아야 합리적이라고 하겠다. 먼저 Engle(1982)이 제시한 선형 ARCH 모형 $\{\epsilon_t\}$의 모형식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sqrt{h_t}\ e_t \\ h_t &= \text{var}[\epsilon_t \mid \epsilon_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1 (\epsilon_{t-1})^2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

여기서 $\alpha_0 > 0$, $0 \leq \alpha_1 < 1$이고 h_t 와 e_t는 독립이며 $e_t \sim i.i.d.N(0,1)$ 이다. 정

의 식 으로부터 조건부 분산이 이전 시점의 자료제곱의 선형함수 형태임을 알 수 있다. 본 절에서는 ARCH 모형의 비선형 버전 중에서 분계점 조건부 이분산(threshold-ARCH) 모형, 베타 조건부 이분산(β-ARCH) 모형, 박스-콕스 변환 조건부 이분산(Box-Cox transformed ARCH) 모형, 박스-콕스 변환 분계점 조건부 이분산(Box-Cox transformed threshold ARCH) 모형 그리고 랜덤 멱변환 조건부 이분산(random power ARCH) 모형에 대해서 살펴보도록 한다.

분계점 조건부 이분산(threshold-ARCH) 모형

분계점 ARCH 모형을 TARCH 라 부르며 모형 식은 다음과 같다(Li and Li(1996) ; Hwang and Woo(2001)).

$$\text{TARCH(1)}: \quad \varepsilon_t = \sqrt{h_t}\, e_t$$
$$h_t = \operatorname{var}[\epsilon_t \mid \epsilon_{t-1}] = \alpha_0 + \alpha_1(\epsilon_{t-1}^{+})^2 + \alpha_2(\epsilon_{t-1}^{-})^2 \tag{3.2}$$

여기서 ε_{t-s} 와 e_t는 독립($s \geqq 1$)이고, $\alpha_0 > 0,\ 0 \leqq \alpha_1, \alpha_2 < 1$이다. TARCH 에서는 ARCH 모형과 달리 바로 이전 시점의 오차항의 부호에 따라 계수가 달라지며 따라서 비대칭(non-symmetry)특징을 확인할 수 있다.

베타 조건부 이분산(β-ARCH) 모형

이 모형은 Guegan and Diebolt(1994)가 처음 제안하였으며 모형 식은 다음은 같다.

$$\beta\text{-ARCH(1)}: \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 |\epsilon_{t-1}|^{\beta} \tag{3.3}$$

여기서 $0 \le \beta \le 2$이다. 모형 식에서 $\beta = 2$일 때 h_t는 ARCH(1) 모형과 같아지고, $\beta = 1$일 때는 절대값(absolute)-ARCH(1) 모형이 된다. 특히 $\beta < 1$ 에서는 이분산 함수 h_t 가 오목함수이며 $\beta > 1$ 일때는 볼록함수 형태임에 주목한다.

박스-콕스 변환 조건부 이분산(Box-Cox transformed ARCH) 모형

일반적으로 ARCH 모형에서는 오차항(innovation) $\{e_t\}$이 표준정규분포를 따른다고 가정하고 있다. 하지만 현실적으로 ARCH 자료 중에서 이 가정을 만족시키지 못하는 경우가 있고 이러한 문제점을 해결하는 방안 중에 하나가 Box-Cox 변환이다. Higgins와 Bera(1992)는 Box-Cox 변환을 통해서 $\{e_t\}$ 의 정규성을 만족시킬 수 있음을 주장하였으며, Box-Cox 변환 ARCH 의 조건부 분산식의 형태는 다음과 같다.

$$h_t^{\delta} = \alpha_0 + \alpha_1(\epsilon_{t-1}^2)^{\delta} \tag{3.4}$$

이때, δ 가 1이면 모형은 ARCH 와 같다.

박스-콕스 변환 분계점 조건부 이분산(Box-Cox transformed threshold ARCH) 모형

식 (3.4)의 박스-콕스 변환 조건부 이분산 모형은 대칭(symmetric) 모형인 바 이를 분계점 비대칭화 한 모형으로서 수식은 다음과 같다.

$$h_t^{\delta} = \alpha_0 + \alpha_1 (\epsilon_{t-1}^{+2})^{\delta} + \alpha_2 (\epsilon_{t-1}^{-2})^{\delta} \tag{3.5}$$

여기서 $\delta > 0$ 는 박스-콕스 멱변환을 나타내며 $\delta < 1$ 과 $\delta > 1$ 에 따라 비대칭 이분산 함수가 각각 오목함수와 볼록함수 형태를 나타낸다. 자세한 내용는 Hwang and Kim(2004)을 참고하기 바란다.

랜덤 멱변환 조건부 이분산(random power ARCH) 모형

이 모형은 식(3.5)의 박스-콕스 변환 분계점 조건부 이분산 모형에서 박스-콕스 멱변환 δ 가 직전 관측치 ϵ_{t-1} 의 부호에 따라 바뀌는 랜덤 멱변환 모형으로서 다음과 같이 정의된다.

$$h_t^{R_{t-1}} = \alpha_0 + \alpha_{t-1} \cdot (Z_{t-1}^2)^{R_{t-1}} \tag{3.6}$$

여기서 R_{t-1} 은 랜덤 멱변환으로서

$$R_{t-1} = \delta_1 I[\varepsilon_{t-1} \geq 0] + \delta_2 I[\varepsilon_{t-1} < 0]$$

이며 α_{t-1} 은 랜덤 계수로서 다음과 같다.

$$\alpha_{t-1} = \alpha_1 I[\varepsilon_{t-1} \geq 0] + \alpha_2 I[\varepsilon_{t-1} < 0].$$

최근에 Kim and Hwang(2004) 는 이 모형을 국내 종합주가지수(KOSPI)에 적용시킨 바 있다.

4. 통합 모형과 연관된 모수추정 방법

지금까지 논의한 조건부 평균의 비선형 모형과 조건부 분산의 비선형 모형을 다음과 같이 종합해 볼 수 있다.

$$X_t = f(X_{t-1}\ ;\ \phi) + \epsilon_t \tag{4.1}$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t}\, e_t\ ,\ h_t = Var[X_t \mid X_{t-1}] = g(\epsilon_{t-1}\ ;\ \theta) \tag{4.2}$$

여기서 $e_t \sim i.i.d. N(0,1)$, $g(\cdot\,;\theta) > 0$, $t = 1, 2, 3, \ldots$ 이고 ε_{t-s} 와 e_t는 독립이다. 위에서 함수 $f(\cdot)$는 조건부 평균을 나타내는 함수이고, 함수 $g(\cdot)$는 조건부 분산을 나타낸다. 앞 장에서 설명한 세 종류의 평균함수와 다섯 종류의 분산 함수

를 조합하면 여러 가지의 가능한 모형이 나올 수 있다. 예를 들어 조건부 평균 $f(\cdot)$이 EAR(1) 모형을 따르고, 조건부 분산$g(\cdot)$가 $\beta-ARCH(1)$ 인 조합된 모형 $\{X_t\}$는 다음과 같다.

$$X_t = (\phi_1 + \phi_2 e^{-X_{t-1}^2}) X_{t-1} + \epsilon_t$$
$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t}\, e_t\,, \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1 |\epsilon_{t-1}|^{\beta} \tag{4.3}$$

따라서 조건부 평균함수 $f(\cdot)$와 조건부 분산 함수 $g(\cdot)$를 적절히 변화시켜가면서 다양한 비선형 모형을 생성할 수 있으며 통계적 추론을 위해서는 $f(\cdot)$와 $g(\cdot)$ 가 "좋은"함수 (smooth functions)이어야 하며 이는 정상성 및 적률존재성을 위해 필요한 조건이 된다. 모수추정방법은 여러 가지가 있을 수 있으나 오차항(innovation) $\{e_t\}$ 의 표준정규분포 가정이 필요 없는 반복 가중최소제곱법(IWLS)과 유사(pseudo)-최우추정법(PML)에 대해 살펴보도록 한다. 모수추정량의 성질 규명을 위해 앞으로는 평균 $f(\cdot)$와 분산 $g(\cdot)$가 적절한 정규 조건(regularity conditions)을 만족하고 또한 정상성 및 적률존재성을 가정하기로 한다(cf. Weddeburn(1974) ; Kim and Hwang(2004)).

반복 가중최소제곱(IWLS : iterative weighted least squares)추정량

제안된 모형에서 추정되어야 할 모수는 식(4.1)과 식(4.2)를 구성하는 ϕ 값과 θ 값이다. 잔차를 다음과 같이 모수의 함수로 표현할 수 있으며

$$\epsilon_t(\phi) = X_t - f(X_{t-1}\ ;\ \phi)$$

모수 ϕ와 θ의 최소제곱추정량은 이분산 모형을 감안하여 다음의 목적식을

$$\sum_{t=1}^{n} [X_t - f(X_{t-1}\ ;\ \phi)]^2 / h_t(\phi, \theta)$$

최소화시켜서 얻을 수 있지만, 함수 $h_t(\cdot)$가 ϕ와 θ를 동시에 가지고 있기 때문에 최소화시키는 추정량을 찾는 방법은 현실적으로 쉬운 일이 아니다. 따라서 다음과 같은 과정을 반복하여 모수를 추정할 수 있다(Hwang and Basawa(2003) 참조).

[1] 식(4.1)을 이용하여 $\sum_{t=1}^{n} \epsilon_t^{\,2}$을 최소로 하는 ϕ 값을 추정한다. 즉, $\sum_{t=1}^{n}[X_t - f(X_{t-1}\ ;\ \phi)]^2$을 최소로 하는 ϕ 값을 $\tilde{\phi}$ 라 하고 이를 식(4.1)에 대입하여 $\epsilon_t(\tilde{\phi}) = X_t - f(X_{t-1}\ ;\ \tilde{\phi})$를 얻는다.

[2] $\sum_{t=1}^{n}[\epsilon_t^{\,2}(\tilde{\phi}) - h_t(\theta)]^2 = \sum_{t=1}^{n}[(X_t - f(X_{t-1};\ \tilde{\phi}))^2 - h_t(\theta)]^2$ 을 최소로 하는 θ를 찾아서 $\tilde{\theta}$ 라고 하자.

[3] $\tilde{\theta}$를 이용하여 $h_t(\tilde{\theta})$를 얻은 후에 $\sum_{t=1}^{n}[X_t - f(X_{t-1};\ \phi)]^2 / h_t(\tilde{\theta})$를 최소로 하는 ϕ 값을 추정하여, $\hat{\phi}$이라 하자. $\hat{\phi}$을 이용하여 $\epsilon_t(\hat{\phi}) = X_t - f(X_{t-1}\ ;\ \hat{\phi})$을 얻는다.

[4] $\sum_{t=1}^{n}[\epsilon_t^2(\hat{\phi}) - h_t(\theta)]^2$을 최소로 하는 θ를 찾아서 $\hat{\theta}$이라 하자.

이러한 [1]-[4] 과정을 수렴(convergence)할 때까지 반복하여 $\hat{\phi}_n$과 $\hat{\theta}_n$을 찾을 수 있으며, 이렇게 구한 추정량을 반복적인 가중최소제곱(IWLS)추정량이라 부른다. 적당한 조건 아래에서 $\hat{\phi}_n$과 $\hat{\theta}_n$의 극한분포는 정규분포임을 증명할 수 있다(cf. Hwang and Basawa(2003); Kim and Hwang(2004))).

정리 1 : 표본크기 n이 무한대로 갈 때, $\hat{\phi}_n$ 과 $\hat{\theta}_n$ 의 분포는 결합적으로 정규분포에 접근한다.

증명 : 간략한 증명을 위해 ϕ와 θ를 동시에 $\eta = (\phi, \theta)$ 로 표현하자. 다음 근사식으로부터

$$\sqrt{n}\ (\ \hat{\eta}_n - \eta\ ) = \left[n^{-1} \frac{\partial^2 Q_n}{\partial \eta^2} \right]^{-1} \left[n^{-1/2} \frac{\partial\ Q_n}{\partial \eta} \right] +\ o_p(1) \tag{4.4}$$

에르고딕 정리를 이용하여 식 (4.4) 우변의 첫 항은 다음과 같으며

$$n^{-1} \frac{\partial^2 Q_n}{\partial \eta^2}\ =\ A + o_p(1),$$

여기서 $A = plim\left[n^{-1} \frac{\partial^2 Q_n}{\partial \eta^2} \right]$ 이다.

또한 마팅게일 중심극한 정리를 이용하여 식 (4.4)의 두 번째 항 $n^{-1/2} \frac{\partial\ Q_n}{\partial \eta}$ 은 정규분포를 따르므로 $\hat{\phi}_n$ 과 $\hat{\theta}_n$ 의 분포는 결합적으로 정규분포에 접근한다.

유사 최대우도추정량(PMLE : pseudo-maximum likelihood estimator)

식 (4.1)에서 $\{e_t\}$가 표준정규분포를 따른다고 가정하고 얻은 우도함수를 최대화 시켜 얻은 추정량을 유사 최대우도추정량(PMLE)라 부르며 Gaussian 우도로부터 얻었다 하여 Gaussian-MLE 라고 부르기도 한다. PMLE는 실제 우도함수가 Gaussian 이든 아니든 관계없이 일치추정량(consistent estimator)이며 극한분포의 분산은 실제 우도함수에 의존한다는 것이 잘 알려져 있다(cf. Gouerioux(1997, ch. 4)). PMLE 는 다음 목적 식을 최대화 시키는 값이다.

$$ln(\phi,\theta) = -\sum_{t=1}^{n}\frac{n}{2}log(h_t(\phi,\theta)) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}(\frac{\epsilon_t^2}{h_t}) \tag{4.5}$$

여기서 $\epsilon_t(\phi) = X_t - f(X_{t-1}\ ;\ \phi)$ 이다. 이 때 $\triangle_n(\phi,\theta)$, $G_n(\phi,\theta)$와 $F_n(\phi,\theta)$를 다음과 같이 정의하자.

$$\triangle_n(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial ln(\phi,\theta)}{\partial\phi} \\ \frac{\partial ln(\phi,\theta)}{\partial\theta} \end{pmatrix}$$

$$G_n(\phi,\theta) = \triangle_n(\phi,\theta)\triangle_n^T(\phi,\theta)$$

$$F_n(\phi,\theta) = -\frac{\partial\triangle_n(\phi,\theta)}{\partial(\phi,\theta)'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 ln\ (\phi,\theta)}{\partial\phi\partial\phi'} & \frac{\partial ln\ (\phi,\theta)}{\partial\phi\partial\theta} \\ \frac{\partial^2 ln(\phi,\theta)}{\partial\theta\partial\phi} & \frac{\partial ln\ (\phi,\theta)}{\partial\theta\partial\theta'} \end{pmatrix}$$

여기서 $G_n(\phi,\theta)$는 $\triangle_n(\phi,\theta)$의 제곱형태이고, $F_n(\phi,\theta)$는 $\triangle_n(\phi,\theta)$를 미분한 함수 형태이다. 에르고딕(ergodic) 정리에 의해서 $F_n(\phi,\theta)$과 $G_n(\phi,\theta)$는 확률적으로(in probability) 수렴하며 각각의 극한을 F와 G 라 하자. 일반적으로 F와 G는 같지 않지만, $\{e_t\}$의 실제 분포가 표준정규분포일 때 F와 G는 같아진다. PMLE 는 다음의 방정식의 해를 구함으로서 찾을 수 있다.

$$\triangle_n(\phi,\theta) = 0.$$

이렇게 구한 ϕ와 θ의 추정량을 $\hat{\phi}_{ML}$와 $\hat{\theta}_{ML}$라고 하자. 적절한 정규조건하에서 $\hat{\phi}_{ML}$와 $\hat{\theta}_{ML}$의 극한 분포는 정규분포임을 증명할 수 있으며(Gouerioux(1997, ch. 4) 참조) 특히 $\{e_t\}$가 표준정규분포를 따를 때는 PMLE는 통상적인 MLE와 같아진다(cf. Kim and Hwang(2004)).

5. 결론

본 연구에서는 시계열 분석에서 조건부 평균 및 분산의 비선형 모형에 대해 상대적으로 최근의 모형을 중심으로 살펴보았으며 이들을 통합시킨 모형족의 모수 추정에 대해 알아보았다. 상세한 이론적인 (technical details) 부분은 배제하였으나 제시된 참고문헌 등을 통해 보완할 수 있으리라 생각된다. 본 논문을 통해 시계열 평균 및 분산의 비선형 모형에 대한 최근 동향과 모형의 의미를 쉽게 제시하려고 노력하였으며 추후 이 분야의 연구에 조금이나마 도움이 되었으면 바란다.

참 고 문 헌

1. Box, G.E.P. and Jenkins, G.M.(1976). *Time Series Analysis : Forecasting and Control.* Holden Day, SFO.
2. Engle, R. F.(1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation, *Econometrica*, 50 , 987-1008.
3. Gourieroux, C.(1997). *ARCH Models and Financial Applications*. Springer, N.Y.
4. Guegan, D. and Diebolt, J. (1994). Probabilistic properties of the beta-ARCH model. *Statistica Sinica,* 4, 71-87.
5. Higgins, M.L. and Bera, A.K. (1992), A class of nonlinear ARCH models, *International Economic Review*, Vol. 33, No 1.
6. Hwang, S.Y. and Woo, M.J (2001), Threshold ARCH(1) processes: asymptotic inference, *Statistics & Probability Letter,* Vol. 53, 11-20.
7. Hwang, S.Y. and Basawa, I.V. (2003), Estimation for nonlinear autoregressive models generated by beta-ARCH processes, *Sankhya,* 65, 744-762.
8. Hwang, S.Y. and Kim, T.Y.(2004). Power transformation and threshold modeling for ARCH innovations with applications to tests for ARCH structure. *Stochastic Processes and their Applications*, 110, 295-314.
9. Kim, S and Hwang, S.Y. (2004). Binary random power approach to modeling asymmetric conditional heteroscedasticity. *Journal of Korean Statistical Society*, To appear.
10. Li, C. W. and Li, W. K.(1996). On a double-threshold autoregressive heteroscedastic time series model. *Journal of Applied Econometrics*, 11, 253-274.
11. Nicholls, D.F. and Quinn, B.G.(1982). *Random Coefficient Autoregressive Models : An Introduction.* Lecture Notes in Statistics, 11, Springer, N.Y.
12. Rabemanjara, R. and Zakoian, J.M.(1993). Threshold ARCH models and asymmetries in volatility. *Journal of Applied Econometrics*, 8, 31-49.
13. Tong, H.(1990). *Non-linear Time Series. A Dynamical System Approach.* Oxford Publications, Oxford University Press.
14. Wedderburn, R.W.M. (1974), Quasi-likelihood functions, generalized linear models, and the Gauss-Newton method, *Biometrika*, Vol. 61, 3, 439
15. Weiss, A.A. (1984), ARMA models with ARCH errors. *Journal of Time Series Analysis,* Vol. 5, 129-143.

[2004년 7월 접수, 2004년 10월 채택]