Journal of Korean
Data & Information Science Society
2004, Vol. 15, No. 4, pp. 753~758

Properties of Extended Gamma Distribution[1)]

In Suk Lee[2)] · Sang Moon Kim[3)]

Abstarct

A generalization of gamma distribution is defined by slightly modifying the form of Kobayashi's generalized gamma function(1991). We define a new extended gamma distribution and study some properties of this distribution.

Keywords : 위험함수, 일반화감마분포, 일반화감마함수, 일반화초기하함수, 확장된 감마분포

Ⅰ. 서론

감마분포와 이들의 혼합된 분포를 따르는 것은 물리적 현상에서도 자주 발생한다. 또한 영상분석(X선 영상), 임상실험과 생존분석 등의 많은 분야에서도 혼합된 감마분포가 많이 이용되고 있다. 그래서 우리가 잘 알고 있는 두 모수 감마분포뿐만 아니라 세 개의 모수를 갖는 감마분포에 대해서 Stacy(1962), Cohen과 Whitten(1982), Bai와 Jakeman 및 Mcaleer(1991)등이 모수의 추정에 대한 연구를 하였다. 또한 Kobayashi(1991)가 회전이론에서 일반화감마함수로

$$\Gamma_\lambda(m,n) = \int_0^\infty x^{m-1}(x+n)^{-\lambda} e^{-x} dx \tag{1}$$

를 정의하고

$$m\Gamma_\lambda(m,n) = \Gamma_\lambda(m+1,n) + \lambda\Gamma_{\lambda+1}(m+1,n)$$

1) This research was supported by Kyungpook National University Research Fund 2003.
2) First author : Professor, Department of Statistics, Kuungpook National University, Daegu, 702-701, Korea.
E-mail : islee@bh.knu.ac.kr
3) Department of Statistics, Kynugpook National University, Daegu, 702-701, Korea.

과 같은 반복관계식을 얻었다. (1)에서 λ는 자연수이다. 한편 일반화감마분포에 대하여는 Pham과 Almhana(1995)이 연구하였고, (1)을 이용하여 Agarwal과 Kalla(1996)는 확률변수 X가 확률밀도함수

$$f(x) = \frac{b^{m-\lambda} x^{m-1} (x+n)^{-\lambda} e^{-bx}}{\Gamma_\lambda\ (m, bn)},\ x > 0 \tag{2}$$

를 갖는 일반화감마분포를 정의하고 몇 가지 성질을 연구하였다. (2)에서 m은 형상모수, b는 척도모수, n은 변위모수이고 λ는 대응되는 변위모수의 효과의 강도모수이다. 한편 Agarwal과 Al-Saleh(2001) 및 Al-Saleh와 Agarwal(2002)는 (2)의 $\Gamma_\lambda(m, bn)$ 대신에 각각 $\Gamma_\lambda(m, n)$와 $\Gamma_\lambda(m, 1)$를 사용하여 일반화감마분포를 정의하고 그에 대한 몇 가지 성질을 연구하였다.
그러므로 본 논문에서는 일반화초기하함수를 포함하는 좀더 확장된 감마분포를 정의하고 몇 가지 성질을 조사하고자 한다.

Ⅱ. 본론

새로운 확장된 감마분포를 만들기 위하여 다음과 같은 적분 I를 생각한다.

$$I = \int_0^\infty e^{-bx} x^{m-1} (x+n)^{-\lambda}\ {}_pF_q[(\alpha);(\beta);kx]\,dx$$

여기서 $b > 0,\ m > 0,\ n > 0$인 임의의 상수이고, ${}_pF_q[(\alpha);(\beta);x]$는 일반화초기하함수이고, $(\alpha) = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p$이며 $(\beta) = \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$이다. 한편

$$\int_0^\infty x^{m-1} (x+n)^{-\lambda} e^{-bx} dx = b^{\lambda-m} \Gamma_\lambda(m, bn)$$

이므로

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty e^{-bx} x^{m-1} (x+n)^{-\lambda}\ {}_pF_q[(\alpha);(\beta);kx]\,dx \\ &= b^{\lambda-m}\ {}_pF_q[(\alpha);(\beta);\frac{k}{b}]\Gamma_\lambda(m+k, bn) \\ &= b^{\lambda-m}\Gamma_\lambda(m, bn)\ {}_{p+1}F_q[(\alpha), m-\lambda;(\beta);\frac{k}{b}] \end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

정의. 확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x) = \frac{b^{m-\lambda}x^{m-1}(x+n)^{-\lambda}e^{-bx}\,{}_pF_q[(\alpha);(\beta);kx]}{\Gamma_\lambda(m,bn)\,{}_{p+1}F_q[(\alpha),m-\lambda;(\beta);\frac{k}{b}]}$$

일 때 X는 확장된감마분포(Extended Gamma Distribution)에 따른다고 한다.

참고 ① 만일 $\lambda=0$ 이고 $k=0$ 이면 X는 통상적인 감마분포 $\Gamma(m,1/b)$ 이다.
② 만일 $k=0$ 이면 X의 확률밀도함수는

$$f(x) = \frac{x^{m-1}(x+n)^{-\lambda}e^{-bx}}{b^{\lambda-m}\Gamma_\lambda(m,bn)}$$

로서 Agarwal과 Kalla(1996)의 일반화감마분포이다.

정리 1. 확률변수 X가 확장된감마분포에 따르면 X의 r째 적률 $\mu_r{}'$과 적률모함수 $M(t)$는 각각 다음과 같다.

$$\mu_r{}' = \frac{\Gamma_\lambda(m+r,bn)_{p+1}F_q[(\alpha),m+r;(\beta);\frac{k}{b}]}{b^r\Gamma_\lambda(m,bn)_{p+1}F_q[(\alpha),m-\lambda;(\beta);\frac{k}{b}]},$$

$$M(t) = \frac{(1-\frac{t}{b})^{\lambda-m}\Gamma_\lambda(m,bn[1-\frac{t}{b}])_{p+1}F_q[(\alpha),m;(\beta);\frac{k}{b-t}]}{\Gamma_\lambda(m,bn)_{p+1}F_q[(\alpha),m-\lambda;(\beta);\frac{k}{b}]}$$

증명. $\mu_r{}' = E(X^r)$

$$= \int_0^\infty \frac{b^{m-\lambda}x^{m+r-1}(x+n)^{-\lambda}e^{-bx}\,{}_pF_q[(\alpha);(\beta);kx]}{\Gamma_\lambda(m,bn)_{p+1}F_q[(\alpha),m-\lambda;(\beta);\frac{k}{b}]}dx$$

$$= \frac{{}_pF_q[(\alpha);(\beta);\frac{k}{b}]\Gamma_\lambda(m+r+k,bn)}{b^r\Gamma_\lambda(m,bn)_{p+1}F_q[(\alpha),m-\lambda;(\beta);\frac{k}{b}]}$$

$$= \frac{\Gamma_\lambda (m+r, bn)_{p+1}F_q[(\alpha), m+r; (\beta); \frac{k}{b}]}{b^r \Gamma_\lambda (m, bn)_{p+1}F_q[(\alpha), m-\lambda; (\beta); \frac{k}{b}]}.$$

$$M(t) = \int_0^\infty \frac{e^{tx} x^{m-1}(x+n)^{-\lambda} e^{-bx}\, {}_pF_q[(\alpha);(\beta);kx]}{b^{\lambda-m}\Gamma_\lambda(m, bn)_{p+1}F_q[(\alpha), m-\lambda; (\beta); \frac{k}{b}]} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-(b-t)x} x^{m+k-1}(x+n)^{-\lambda}\, {}_pF_q[(\alpha);(\beta);\frac{k}{b}]}{b^{\lambda-m}\Gamma_\lambda(m, bn)_{p+1}F_q[(\alpha), m-\lambda; (\beta); \frac{k}{b}]} dx$$

$$= \frac{(1-\frac{t}{b})^{\lambda-m}\, {}_pF_q[(\alpha);(\beta);\frac{k}{b-t}]\Gamma_\lambda(m+k; bn[1-\frac{k}{b}])}{\Gamma_\lambda(m, bn)_{p+1}F_q[(\alpha), m-\lambda; (\beta); \frac{k}{b}]}$$

$$= \frac{(1-\frac{t}{b})^{\lambda-m}\Gamma_\lambda(m, bn[1-\frac{t}{b}])_{p+1}F_q[(\alpha), m; (\beta); \frac{k}{b-t}]}{\Gamma_\lambda(m, bn)_{p+1}F_q[(\alpha), m-\lambda; (\beta); \frac{k}{b}]}.$$

따름정리 1. **정리 1**에서 X의 평균 μ는

$$\mu = E(X) = \mu_1{}'$$
$$= \frac{\Gamma_\lambda (m+1, bn)_{p+1}F_q[(\alpha), m+1; (\beta); \frac{k}{b}]}{b\,\Gamma_\lambda (m, bn)_{p+1}F_q[(\alpha), m-\lambda; (\beta); \frac{k}{b}]}$$

이고, 분산 σ^2도 $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$에 의하여 쉽게 구할 수 있다.

따름정리 2. $k=0$이면 X의 평균 μ와 분산 σ^2 및 적률모함수 $M(t)$는

$$\mu = \frac{\Gamma_\lambda(m+1, bn)}{b\Gamma_\lambda(m, bn)}$$

$$\sigma^2 = \frac{\Gamma_\lambda(m+2, bn)\Gamma_\lambda(m, bn) - \Gamma_\lambda{}^2(m+1, bn)}{b^2\Gamma_\lambda{}^2(m, bn)}$$

$$M(t) = [b(1-\frac{t}{b})]^{\lambda-m-1}\Gamma_\lambda(m+1, bn[1-\frac{t}{b}])$$

이고, 특히 bn이 작을 경우에는 Abramowitz와 Stegun(1972, p.504)에 의하여

$$\Gamma_\lambda(m, bn) \cong \Gamma(m-\lambda) \ ; \ m-\lambda \neq 0, \ -1, \ -2, \ \cdots \mu = \frac{m-\lambda}{b}$$

이므로 $\mu = \dfrac{m-\lambda}{b}$, $\sigma^2 = \dfrac{m-\lambda}{b^2}$로 따름정리 2의 결과들은 Agarwal과 Kalla(1996)의 결과와 같다.

정리 2. 확률변수 X가 확장된감마분포에 따르면 X의 위험함수 $H(x)$는

$$H(x) = \frac{x^{m-1}(x+n)^{-\lambda}e^{-bx}{}_pF_q[(\alpha);(\beta);kx]}{b^{\lambda-m}\Gamma_\lambda(m, bn, bx)_{p+1}F_q[(\alpha), m-\lambda;(\beta);\frac{k}{b}]}$$

이다. 여기서 $\Gamma_\lambda(m, n, x)$는 불완일반화감마함수로 다음과 같다.

$$\Gamma_\lambda(m, n, x) = \int_x^\infty y^{m-1}(y+n)^{-\lambda}e^{-y}dy.$$

증명. 정의에 의하여

$$\begin{aligned}
H(x) &= \frac{f(x)}{1-F(x)} \\
&= \frac{x^{m-1}(x+n)^{-\lambda}e^{-bx}{}_pF_q([(\alpha);(\beta);kx]}{\int_x^\infty x^{m-1}(x+n)^{-\lambda}e^{-bx}{}_pF_q[(\alpha);(\beta);kx]\,dx} \\
&= \frac{x^{m-1}(x+n)^{-\lambda}e^{-bx}{}_pF_q[(\alpha);(\beta);kx]}{b^{\lambda-m}{}_pF_q[(\alpha);(\beta);\frac{k}{b}]\Gamma_\lambda(m+k, bn, bx)} \\
&= \frac{x^{m-1}(x+n)^{-\lambda}e^{-bx}{}_pF_q[(\alpha);(\beta);kx]}{b^{\lambda-m}\Gamma_\lambda(m, bn, bx)_{p+1}F_q[(\alpha), m-\lambda;(\beta);\frac{k}{b}]}.
\end{aligned}$$

Ⅲ. 결론

일반화감마분포에 대하여 지금까지 연구된 많은 결과들이 Kobayashi(1991)의 일반

화감마함수를 약간 수정하여 얻은 것이다. 따라서 본 논문에서는 지금까지 연구된 결과들과 달리 일반화초기하함수를 포함하는 확장된감마분포를 정의하고 이들의 몇 가지 성질을 조사하였다. 그러므로 본 논문의 확장된감마분포는 지금까지의 연구결과들보다 좀더 확장된 감마분포이므로 보다 폭넓은 모형에 적용할 수 있다.

참 고 문 헌

1. Abramowitz, M. and Stegun, I. A., (1972), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
2. Agarwal, S. K. & Al-Saleh, J. A., (2001), Generalized gamma type distribution and its Hazard rate function, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 30(2), 309-318.
3. Agarwal, S. K. and Kalla, S. L., (1996), A generalized gamma distribution and its applications in reliability, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 25(1), 201-210.
4. Al-Saleh, J. A. and Agarwal, S. K., (2002), Finite mixture of certain distributions, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 31(12), 2123-2137.
5. Bai, J., Jakeman, A. J. and McAleer, M., (1991), A new approach to maximum likelihood estimation of the three-parameter gamma and Weibull distributions, *The Australian J. of Statistics*, 33, 397-410.
6. Cohen, A. C. and Whitten, B. J., (1982), Modified moment and maximum likelihood estimators for parameters of the three-parameter gamma distribution, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 11(2), 197-216.
7. Kobayashi, K., (1991), On generalized gamma functions occuring in diffration theory, *J. of Physical Society of Japan*, 60(5), 1501-1512.
8. Pham, T. and Almhana, (1995), The generalized gamma distribution : Its hazard rate and stress strength model, *IEEE Transactions on Reliability,* 44, 392-397.
9. Stacy, E. W., (1962), A generalized of the gamma distributions, *The Annals of Mathematical Statistics,* 33, 1187-1192.

[2004년 7월 접수, 2004년 9월 채택]