Journal of Korean
Data & Information Science Society
2004, Vol. 15, No. 4, pp. 743~752

Bayesian Model Selection in the Unbalanced Random Effect Model

Dal Ho Kim[1)] · Sang Gil Kang[2)] · Woo Dong Lee[3)]

Abstract

In this paper, we develop the Bayesian model selection procedure using the reference prior for comparing two nested model such as the independent and intraclass models using the distance or divergence between the two as the basis of comparison. A suitable criterion for this is the power divergence measure as introduced by Cressie and Read(1984). Such a measure includes the Kullback -Liebler divergence measures and the Hellinger divergence measure as special cases. For this problem, the power divergence measure turns out to be a function solely of ρ, the intraclass correlation coefficient. Also, this function is convex, and the minimum is attained at $\rho=0$. We use reference prior for ρ. Due to the duality between hypothesis tests and set estimation, the hypothesis testing problem can also be solved by solving a corresponding set estimation problem.

The present paper develops Bayesian method based on the Kullback-Liebler and Hellinger divergence measures, rejecting $H_0: \rho=0$ when the specified divergence measure exceeds some number d. This number d is so chosen that the resulting credible interval for the divergence measure has specified coverage probability $1-\alpha$. The length of such an interval is compared with the equal two-tailed credible interval and the HPD credible interval for ρ with the same coverage probability which can also be inverted into acceptance regions of $H_0: \rho=0$. Example is considered where the HPD interval based on the one-at- a-time reference prior turns out to be the shortest credible interval having the same coverage probability.

---

1) 제1저자 : 대구광역시 북구 산격동 1370번지 경북대학교 통계학과 부교수
E-mail : dalkim@knu.ac.kr
2) 강원도 원주시 우산동 660번지 상지대학교 응용통계학과 조교수
E-mail : sangkg@sangji.ac.kr
3) 경상북도 경산시 유곡동 290번지 대구한의대학교 자산운용과학과 부교수
E-mail : wdlee@dhu.ac.kr

Keywords : Intraclass Correlation Coefficient, Power Divergence Measure, Unbalanced Random Effect Model

1. 서론

불균형 임의효과모형(unbalanced random effect model)에서 분산성분(variance component), 분산비(variance ratio) 그리고 급내상관계수(intraclass correlation coefficient)에 대한 연구는 오랫동안 많은 학자들에 의하여 연구되어 왔다. 전통적인 통계학에서 분산비나 분산성분의 추정치들이 음수값을 가질 수 있다는 것은 잘 알려진 사실 이다. 그러나 베이지안 분석에서는 이러한 문제점 없이 올바른 결과를 주는 것으로 밝혀졌다. 베이지안 연구에서, 균형 임의효과모형(balanced random effect model)에서 많은 연구가 이루어져 왔다 (Hill(1965), Box와 Tiao(1973), Donner(1986), Palmer와 Broemeling(1990), Ye(1994) 참고). 그러나 불균형 임의효과모형에서의 연구는 상대적으로 적다. 그 중 주목할 연구는 Chaloner(1987)와 Datta, Ghosh 그리고 Kim(2002)의 연구가 있다.

이 논문의 목적은 불균형 임의효과모형에서 급내상관계수를 이용한 베이지안 모형선택 절차를 개발하는 것이다. 급내상관계수가 0이 되면 임의효과모형은 독립모형(independent model)이 된다. 따라서 모형선택 문제는 두개의 지분된 모형, 즉, 급내상관모형(intraclass model)과 독립모형의 비교 문제가 된다. 우리는 Cressie와 Read(1984)에 의하여 제안된 멱 발산측도(power divergence measure)를 사용하여 두 모형을 비교하는 절차를 개발하고자 한다. 멱 발산측도는 쿨백-라이블러(Kullback-Liebler) 발산측도와 헬링거(Hellinger) 발산측도를 포함하는 측도이다. 우리의 모형선택 문제에서 멱 발산측도는 급내상관계수 ρ만의 함수로 표현된다. 또한 이 측도는 $\rho>0$인 경우에 증가, $\rho<0$인 경우에 감소 그리고 $\rho=0$인 경우에 최소값을 가지게 된다. 따라서 모형 비교의 문제는 가설 $H_0: \rho=0$를 검정하는 문제와 같게 된다. 또한, 가설검정과 구간추정은 근본적으로 동일한 문제이다.

본 논문은 주어진 멱 발산측도가 명시된 값 d를 넘어설 때 가설 $H_0: \rho=0$ 기각하는 쿨백-라이블러 발산측도와 헬링거 발산측도에 근거한 베이지안 모형선택 절차를 개발하는 것이다. 이 값 d는 주어진 발산측도의 신뢰구간(credible interval)이 명시된 포함확률(coverage probability) $1-\alpha$를 만족하는 값이다. 그리고 제안된 절차에 의한 신뢰구간과 ρ의 사후분포(posterior distribution)에 의하여 주어지게 되는 등신뢰구간(equal two-tailed credible interval)과 최고사후밀도구간(HPD credible interval)들을 구간의 길이측면에서 비교하고자 한다.

Cressie와 Read의 발산측도는 쿨벡-라이블러의 특별한 경우로 고려될 수 있는 Bernardo (1999)의 측도와 비슷하다. 그러나 Bernardo는 발산측도의 사후평균(posterior mean)을 계산하고, 이 사후평균이 어떤 주어진 값 (2.5 또는 5)를 넘어설 때 H_0 기각을 제안하였다. 반면 우리의 방법은 발산측도의 사후분포의 주어진 꼬리확률(tail probability)에 근거한다. 따라서 우리의 방법은 사후분포의 모양을 반영하게 된다. 그러나 Bernardo의 기준은 정규분포에서는 타당하지만, 기운(skewed) 사후분포에서 적용이 잘되리라는 것은 확신할 수 없다.

2절에서는 모형선택 또는 가설검정문제를 다룬다. 사후분포로부터 등신뢰구간 그리고 최고사후밀도구간에 근거한 가설검정과 두 개의 쿨백-라이블러 발산측도와 헬링거 발산측도에 의한 가설검정절차를 비교한다. 제안된 모형선택 절차는 보통 베이즈요인(Bayes factor)에 근거를 둔 가설검정절차(Berger와 Pericchi(1996), O'Hagan(1995))의 대안이 될 것이다. 제안된 절차는 베이즈요인을 이용한 가설검정과는 달리 가설 $H_0: \rho=0$에 사전확률(prior probability)을 가정하는 것을 피할 수 있다. 베이즈요인을 이용한 가설검정에서 이 사전확률은 검정결과에 상당히 영향을 미칠 수 있다. 3절에서는 2절에서 개발된 절차에 대하여 실제자료를 이용하여 비교분석하는 예를 보일 것이다.

2. 모형비교

2.1 사후확률분포

불균형 임의효과모형이 다음과 같이 주어져 있다.

$$y_{ij}=\mu+\alpha_i+\varepsilon_{ij},\ i=1,\cdots,k, j=1,\cdots,n_i. \tag{2.1}$$

여기서 μ는 미지의 상수 그리고 α_i와 ε_{ij}는 서로 독립이면서 각각은 평균이 0이고 분산은 σ_α^2 그리고 σ^2 인 정규분포를 따르는 확률변수이다. 모형 (2.1)에 대한 우도함수는 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} L(\mu,\sigma_\alpha^2,\sigma^2) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{N/2}\sigma^{-N}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{\sigma^2+n_i\sigma_\alpha^2}{\sigma^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[S^2+\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i\sigma^2}{\sigma^2+n_i\sigma_\alpha^2}(\bar{y}_i-\mu)^2\right]\right\}, \end{aligned}$$

여기서 $S^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2$, $\bar{y}_i=\sum_{j=1}^{n_i}y_{ij}/n_i$ 그리고 $N=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}n_i$이다. 이 모형에서 급내상관계수는 $\rho=\sigma_\alpha^2/(\sigma^2+\sigma_\alpha^2)$ 이고, τ를 $\sigma^2[\prod_{i=1}^{k}(\sigma^2+n_i\sigma_\alpha^2)/\sigma^2]^{1/N}$로 두면, 위의 우도함수는 아래와 같이 다시 표현된다.

$$\begin{aligned} L(\rho,\tau,\mu) &= \tau^{-N/2}\exp\{-\frac{1}{2}\tau^{-1} \\ &\times [\prod_{i=1}^{k}(1+n_i\frac{\rho}{1-\rho})]^{1/N}[S^2+\sum_{i=1}^{k}n_i(1+n_i\frac{\rho}{1-\rho})^{-1}(\bar{y}_i-\mu)^2]\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

모형 (2.2)에서 만약 $\rho=0$이 된다면 위의 모형은 독립모형이 된다. 그렇지 않으면 위의 임의효과모형은 급내상관모형이 된다. 모형 (2.2)에서 급내상관계수 ρ에 대한 확률일치사전분포(Mukerjee와 Ghosh(1997))는 Datta, Ghosh 그리고 Kim(2002)의 결과에 의하여 유도되어진다. Datta, Ghosh 그리고 Kim(2002)는 분산비, $\eta=\sigma_\alpha^2/\sigma^2$에 대한 확률일치사전분포를 개발하였다. ρ와 η는 서로 일대일 함수관계가 성립하고 그리고 확률일치사전분포의 불변성 (Datta와 Ghosh(1996), Mukerjee와 Ghosh(1997))을 이용하면 다음과 같이 ρ의 확률일치사전분포가 구할 수 있다.

$$\pi(\rho,\tau,\mu)\propto(1-\rho)^{-2}\tau^{-1}\{\sum_{i=1}^k n_i^2(1+\frac{n_i\rho}{1-\rho})^{-2}-\frac{1}{N}[\sum_{i=1}^k n_i(1+\frac{n_i\rho}{1-\rho})^{-1}]^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

또한 이 확률일치사전분포는 기준사전분포 (Berger와 Bernardo(1992))이기도 하다.

이 사전분포와 우도함수로부터 ρ에 대한 주변사후확률밀도함수는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}\pi(\rho\mid y)\ \propto\ &(1-\rho)^{-2}[\sum_{i=1}^k n_i(1+n_i\frac{\rho}{1-\rho})^{-1}]^{-\frac{1}{2}}[\prod_{i=1}^k(1+n_i\frac{\rho}{1-\rho})]^{-\frac{1}{2}}\\ \times\ &[S^2+\sum_{i=1}^k n_i(1+n_i\frac{\rho}{1-\rho})^{-1}(\bar{y}_i-\mu_\rho)^2]^{-\frac{N-1}{2}}\\ \times\ &\{\sum_{i=1}^k n_i^2(1+n_i\frac{\rho}{1-\rho})^{-2}-\frac{1}{N}[\sum_{i=1}^k n_i(1+n_i\frac{\rho}{1-\rho})^{-1}]^2\}^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

여기서 $\mu_\rho=[\sum_{i=1}^k n_i(1+n_i\frac{\rho}{1-\rho})^{-1}\bar{y}_i]/[\sum_{i=1}^k n_i(1+n_i\frac{\rho}{1-\rho})^{-1}]$이다. 3장에서는 이 사후확률밀도함수로부터 ρ의 등신뢰구간과 최고사후밀도구간을 구할 것이다.

2.2 멱 발산측도

이 절에서는 Cressie와 Read(1984)의 멱 발산기준을 이용하여 급내상관모형과 독립모형에 대한 비교절차를 개발할 것이다. 확률밀도함수 f_1과 f_2에 대해서 멱 발산측도는 아래와 같이 정의된다.

$$D_\lambda=\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}E_{f_1}\left\{\left[\frac{f_1}{f_2}\right]^\lambda-1\right\}.$$

위의 멱 발산측도로부터 $\lambda\to 0$, $D_\lambda\to E_{f_1}[\log(f_1/f_2)]=K(f_1:f_2)$, 그리고 $\lambda\to -1$, $D_\lambda\to E_{f_2}[\log(f_2/f_1)]=K(f_2:f_1)$. 여기서 $K(\cdot:\cdot)$는 쿨벡-라이블러 발산측도이다.

또한 $D_{-1/2}=2\int[\sqrt{f_1(x)}-\sqrt{f_2(x)}]^2dx=2H(f_1:f_2)$ 이고 $H(\cdot:\cdot)$는 헬링거 발산측도이다.

f_1을 급내상관모형이라 두고, f_2를 독립모형이라 두자. 그러면 급내상관모형과 독립모형에 대한 멱 발산측도는 다음의 정리와 같다.

정리 1. 급내상관모형과 독립모형에 대한 멱 발산측도는 다음과 같다.

$$D_\lambda=\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\left[\frac{\prod_{i=1}^{k}(1-\rho)^{-\lambda(n_i-1)/2}[1+(n_i-1)\rho]^{-\lambda/2}}{\prod_{i=1}^{k}(1+\lambda\rho)^{(n_i-1)/2}[1-(n_i-1)\lambda\rho]^{1/2}}-1\right],$$

여기서, 임의의 i 대해서 $-1\le\lambda\le(n_i-1)^{-1}$이다.

증명. 급내상관모형 f_1하에서, $\boldsymbol{y}$는 다변량정규분포 $N(\mu\, 1_{n_i},\sigma^2 V_i)$를 따른다. 여기서 $V_i=(1-\rho)\,I_{n_i}+\rho\, J_{n_i}$이다. 또한 I_{n_i}는 $n_i\times n_i$행렬이고, J_{n_i}는 모든 원소가 1인 $n_i\times n_i$행렬이고, 1_{n_i}는 $n_i\times 1$벡터이다. 그리고 독립모형 f_2에서서는 $\boldsymbol{y}_i$는 다변량정규분포 $N(\mu\, 1_{n_i},\sigma^2 W_i)$를 따른다. 여기서 $W_i=I_{n_i}$이다. 그러므로

$$D_\lambda=\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}E_{f_1}\{[\frac{f_1(y_1,\cdots,y_k)}{f_2(y_1,\cdots,y_k)}]^\lambda-1\},$$

여기서

$$E_{f_1}[\frac{f_1(y_1,\cdots,y_k)}{f_2(y_1,\cdots,y_k)}]^\lambda$$
$$=\frac{\prod_{i=1}^{k}|V_i|^{-\lambda/2}}{\prod_{i=1}^{k}|W_i|^{-\lambda/2}}E_{f_1}[\exp\{-\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda}{2\sigma^2}(y_i-\mu 1_i)^T(V_i^{-1}-W_i^{-1})(y_i-\mu 1_i)\}]$$

이다. 급내상관모형 f_1하에서, $(y_i-\mu\, 1_i)$는 다변량정규분포 $N(0_i,\sigma^2 V_i)$를 따르므로,

$$E_{f_1}[\exp\{-\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda}{2\sigma^2}(y_i-\mu 1_i)^T(V_i^{-1}-W_i^{-1})(y_i-\mu 1_i)\}]$$
$$=\prod_{i=1}^{k}|I_{n_i}+\lambda(I_{n_i}-V_i W_i^{-1})|^{-1/2}.$$

따라서

$$E_{f_1}[\frac{f_1(y_1,\dots,y_k)}{f_2(y_1,\dots,y_k)}]^{\lambda}=\frac{\prod_{i=1}^{k}|V_i|^{-\lambda/2}}{\prod_{i=1}^{k}|W_i|^{-\lambda/2}}\prod_{i=1}^{k}|I_{n_i}+\lambda(I_{n_i}+V_i W_i^{-1})|^{-1/2}.$$

또한 $V_i=[(1-\rho)I_{n_i}+\rho J_{n_i}]$ 그리고 $W_i=I_i$이므로, 멱 발산측도는 다음과 같이 된다.

$$D_{\lambda}=\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\left[\frac{\prod_{i=1}^{k}(1-\rho)^{-\lambda(n_i-1)/2}[1+(n_i-1)\rho]^{-\lambda/2}}{\prod_{i=1}^{k}(1+\lambda\rho)^{(n_i-1)/2}[1-(n_i-1)\lambda\rho]^{1/2}}-1\right].$$

위의 정리로부터 아래와 같은 보조정리를 얻을 수 있다.

보조정리 1. f_1과 f_2 그리고 f_2와 f_1의 쿨벡-라이블러 발산측도와 f_1과 f_2의 헬링거 발산측도는 다음과 같이 된다.

$$K(f_1:f_2)=-\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i-1}{2}\log(1-\rho)-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}\log(1+(n_i-1)\rho), \tag{2.3}$$

$$K(f_2:f_1)=\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i-1}{2}\log(1-\rho)+\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}\log(1+(n_i-1)\rho) \tag{2.4}$$
$$+\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i(n_i-1)\rho^2}{2(1-\rho)(1+(n_i-1)\rho)},$$

$$H(f_1:f_2)=2\left[1-\left[\frac{\prod_{i=1}^{k}(1-\rho)^{(n_i-1)/4}[1+(n_i-1)\rho]^{1/4}}{\prod_{i=1}^{k}(1+\lambda\rho)^{(n_i-1)/2}[1-(n_i-1)\lambda\rho]^{1/2}}\right]\right]. \tag{2.5}$$

다음으로 정리 2에서는 D_{λ}가 ρ만의 함수이며 $\rho=0$에서 유일한 최소값을 가지는 볼록함수(convex function)인 것을 증명할 것이다.

정리 2. 만일 모든 i에 대해서, $-1\le\lambda\le(n_i-1)^{-1}$이면, D_{λ}는 $\rho=0$에서 유일

한 최소값을 가지는 볼록함수이다.

증명. 먼저 $t(\rho)$를 아래와 같이 두자.

$$t(\rho)=\frac{\prod_{i=1}^{k}(1-\rho)^{-\lambda(n_i-1)/2}[1+(n_i-1)\rho]^{-\lambda/2}}{\prod_{i=1}^{k}(1+\lambda\rho)^{(n_i-1)/2}[1-(n_i-1)\lambda\rho]^{1/2}}.$$

지금부터 $t(\rho)$가 $\rho=0$에서 최소값을 가지는 것을 보일 것이다.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\rho}\log(t(\rho))\\
&=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{(n_i-1)\lambda}{2(1-\rho)}-\frac{(n_i-1)\lambda}{2[1+(n_i-1)\rho]}-\frac{(n_i-1)\lambda}{2(1+\lambda\rho)}+\frac{(n_i-1)\lambda}{2[1-(n_1-1)\lambda\rho]}\right]\\
&=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n_i(n_i-1)\lambda(\lambda+1)\rho[1-(n_i-1)\lambda\rho^2]}{2(1-\rho)[1+(n_i-1)\rho](1+\lambda\rho)[1-(n_1-1)\lambda\rho]}\right].
\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\rho}t(\rho)\ &=\ \frac{\prod_{i=1}^{k}(1-\rho)^{-\lambda(n_i-1)/2}[1+(n_i-1)\rho]^{-\lambda/2}}{\prod_{i=1}^{k}(1+\lambda\rho)^{-\lambda(n_i-1)/2}[1-(n_i-1)\lambda\rho]^{-\lambda/2}}\\
&\times\ \sum_{i=1}^{k}\left[\frac{n_i(n_i-1)\lambda(\lambda+1)\rho[1-(n_i-1)\lambda\rho^2]}{2(1-\rho)[1+(n_i-1)\rho](1+\lambda\rho)[1-(n_1-1)\lambda\rho]}\right].
\end{aligned}$$

그러므로 $\frac{d}{d\rho}t(\rho)\mid_{\rho=0}=0$이다. 그리고 $-1\leq\lambda\leq(n_i-1)^{-1}$에서, 만일 $\rho>0$이면 $t(\rho)$는 단조증가(strictly increasing)하고, $\rho<0$이면 $t(\rho)$는 단조감소(strictly decreasing)하는 함수이다. 따라서 D_λ는 $\rho=0$에서 유일한 최소값을 가지는 볼록함수이다.

식 (2.3), (2.4) 그리고 (2.5)로부터 $K(f_1:f_2)$, $K(f_2:f_1)$ 그리고 $H(f_1:f_2)$들은 $\rho=0$에서 최소값을 갖는 볼록함수이다. 그러므로 주어진 $\rho_1<\rho_2$에 대하여 $D_\lambda\leq d\equiv\rho_1<\rho<\rho_2$가 성립한다. 따라서 ρ의 사후분포로부터 ρ_1과 ρ_2가 계산된다면, 이 값들은 세 가지 발산측도의 경우에서 같은 값을 가지게 될 것이다. 그 이유는 ρ의 모든 값에서 $K(f_1:f_2), K(f_2:f_1)$ 그리고 $H(f_1:f_2)$의 순서가 동일하게 유지되기 때문이다.

3. 실제자료분석

이 절에서는 2절에서 구한 사후분포를 이용하여 등신뢰구간과 최고사후밀도신뢰구간 그리고 $K(f_1:f_2)$에 의한 신뢰구간에 근거한 검정절차를 비교하는 사례를 보일 것이다. 이 비교는 신뢰구간의 길이측면에서의 비교이며, 비교를 위하여 실제자료를 이용할 것이다.

예제. 다음의 자료는 Ott(1993)부터 가져온 자료이다. 전기공학과의 교수를 돕는 두 명의 대학원생은 3개의 관측기지에서 번개의 방전강도를 기록하였다. 여름철에 자주 발생하는 뇌우 때문에 대학원생들은 20마일 반경 내의 지도에서 임의로 한 지점을 선택하고, 추적 장비를 조립하였다. 매일 오전 8시부터 오후 5시에서, 그들은 최대강도가 다섯 개의 폭풍에서 기록될 때까지 계기를 관측하였다. 이런 과정이 임의로 선택된 다른 두 지역에서 조사되었다. 방전강도 자료들이 표 1에 주어져 있다.

표 1. 번개의 방전강도

관측기지	번개의 방전강도				
관측기지 1	20	1050	3200	5600	50
관측기지 2	4300	70	2560	3650	80
관측기지 3	100	7700	8500	2960	3340

기준사전분포하에서 ρ의 주변사후분포가 그림 1에 주어져 있다. 이 분포는 단봉이며 오른쪽으로 긴 꼬리를 가진 분포임을 알 수 있다. 기준사전분포하에서 ρ의 사후평균은 0.2251이고 사후표준편차는 0.3050이다. 그리고 사후최빈값은 -0.0591이다. 이 값들과 그림으로부터 사후분포가 명확하게 오른쪽으로 기울어짐을 알 수 있다.

그림 1. 급내상관계수의 주변사후확률분포

표 2에는 제안된 방법에의한 ρ의 90%와 95% 신뢰구간들이 구해져 있다. 표 2로부터 최고사후밀도구간이 가장 짧은 신뢰구간을 가지게 됨을 알 수 있다. 사후분포로부터 구한 등신뢰구간과 쿨벡-라이블러에 근거한 신뢰구간은 구간의 길이측면에서 비슷한 결과를 준다는 것을 알 수 있다. 2장에서 언급되었듯이, $K(f_1:f_2)$, $K(f_2:f_1)$ 그리고 $H(f_1:f_2)$에 근거한 신뢰구간은 모두 동일하다.

예제를 통하여 볼 때, 신뢰구간의 길이측면에서, 최고사후밀도구간이 가장 좋은 결과를 준다는 것을 알 수 있으며, 쿨벡-라이블러에 근거한 신뢰구간은 사후분포하에서 구한 등신뢰구간과 거의 비슷한 결과를 주는 것으로 밝혀졌다.
또한 이 논문에서 유도된 결과는 균형 임의효과모형에 적용될 수 있다.

표 2. ρ의 신뢰구간

추정방법	90%신뢰구간	신뢰구간의 길이	95%신뢰구간	신뢰구간의 길이
등신뢰구간	(−0.1480, 0.8378)	0.9857	(−0.1707, 0.9145)	1.0851
최고사후밀도신뢰구간	(−0.1994, 0.7197)	0.9191	(−0.2034, 0.8501)	1.0536
$K(f_1:f_2)$	(−0.2470, 0.7058)	0.9529	(−0.2497, 0.8378)	1.0874

참고 문헌

1. Berger, J. O. and Bernardo, J. M. (1992). On the Development of Reference Priors (with discussion). *Bayesian Statistics IV* , J. M. Bernardo, et. al., Oxford University Press, Oxford, 35-60.
2. Berger, J. O. and Pericchi, L. R. (1996). The Intrinsic Bayes Factor for Model Selection and Prediction. *Journal of the American Statistical Association*, 91, 109-122.
3. Bernardo, J. M. (1999). Nested Hypothesis Testing: The Bayesian Reference Criterion. *Bayesian Statistics 6*, J. M. Bernardo, et. al., Oxford University Press, Oxford, 101-130.
4. Box, G. and Tiao, G. (1973). *Bayesian Inference in Statistical Analysis.* Addison-Wesly, Readings, Massachusetts.
5. Chaloner, K. (1987). A Bayesian Approach to the Estimation of Variance Components for the Unbalanced One-Way Random Model. *Technometrics*, 29, 323-337.
6. Cressie, N. and Read, T. (1984). Multinomial Goodness-of-fit Tests. *Journal of Royal Statistical Society*, B, 46, 440-464.
7. Datta, G. S. and Ghosh, M. (1996). On the Invariance of Noninformative Priors. *The Annal of Statistics*, 24, 141-159.
8. Datta, G. S., Ghosh, M. and Kim, Y. H. (2002). Probability Matching

Priors For One-Way Unbalanced Random Effect Models. *Statistics & Decisions*, 20, 29-51.

9. Donner, A. (1986). A Review of Inference Procedures for the Intraclass Correlation Coefficient in the One-Way Random Effects Model. *International Statistical Review*, 54, 67-82.
10. Hill, B. (1965). Inference about Variance Components in the One-Way Model. *Journal of the American Statistical Association*, 60, 806-825.
11. Mukerjee, R. and Ghosh, M. (1997). Second Order Probability Matching Priors. *Biometrik*, 84, 970-975.
12. O'Hagan, A. (1995). Fractional Bayes Factors for Model Comparison (with discussion). *Journal of Royal Statistical Society*, B, 57, 99-118.
13. Ott, R. L. (1993). *An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis*. Duxbury Press, Belmont, CA.
14. Palmer, J. L. and Broemeling, L. D. (1990). A Comparison of Bayes and Maximum Likelihood Estimation of the Intraclass Correlation Coefficient. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 19, 953-975.
15. Ye, K. (1994). Bayesian Reference Prior Analysis on the Ratio of Variances for the Balanced One-Way Random Effect Model. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 41, 267-280.

[2004년 7월 접수, 2004년 9월 채택]