

## A Note on the Simple Chi-Squared Test of Multivariate Normality

Cheolyong Park<sup>1)</sup>

### Abstract

We provide the exact form of a Rao-Robson version of the chi-squared test of multivariate normality suggested by Park(2001). This test is easy to apply in practice since it is easily computed and has a limiting chi-squared distribution under multivariate normality. A self-contained formal argument is provided that it has the limiting chi-squared distribution. A simulation study is provided to study the accuracy, in finite samples, of the limiting distribution. Finally, a simulation study in a nonnormal distribution is conducted in order to compare the power of our test with those of other popular normality tests.

**Keywords** : Rao-Robson chi-squared test, Wald method.

### 1. 서론

새로운 검정통계량이 제안되었을 때 가장 중요한 덕목은 물론 기존의 검정통계량에 비해 검정력이 뛰어나다는 것을 보이는 것일 것이다. 그런데 귀무가설에서 벗어나는 모든 분포에 대해 일률적으로 기존의 검정통계량보다 검정력이 좋은 검정통계량을 발견하는 것은 특수한 경우가 아니면 불가능하다. 이는 다변량 정규성 검정으로 그 범위를 좁혔을 때도 그대로 적용되며 모든 경우에 검정력이 좋은 총괄검정(omnibus test)은 존재하지 않는다는 것이 잘 알려진 사실이다. 따라서 여러 형태의 다변량 정규성 검정이 제안되었으며 Romeu & Ozturk(1993)는 대표적 다변량 정규성 검정을 비교하는 방대한 모의실험을 수행하기도 하였다.

검정통계량의 검정력과 더불어 생각되어야 할 또 다른 중요한 덕목은 과연 그 검정을 쉽게 사용할 수 있는가 하는 점이다. 만약 검정통계량을 계산하는데 엄청난 시간이 걸린다면 검정통계량의 귀무가설 하의 점근분포가 복잡하여 유의확률을 계산하는 것이 용이하지 않을 경우 실제 적용에 문제점이 따르기 때문이다. 특히 귀무가설

---

1) Associate Professor, Department of Statistics, Keimyung University, Taegu 704-701  
E-mail : cypark1@kmucc.kmu.ac.kr

하의 점근분포가 복잡한 경우는 유의확률을 계산하는 프로그램이 제공되지 않으면 현장에서 사용하는데 상당한 어려움이 따른다.

카이제곱 적합도 검정에서도 통상적인 피어슨-피셔(Pearson-Fisher) 통계량은 점근 유의확률을 계산하기 힘든 단점이 있다. 다시 말해 미지의 모수를 예측하는데 그룹화된 자료가 아닌 원자료를 사용할 경우, 피어슨-피셔 통계량의 귀무가설 하의 극한분포가 더 이상 정확한 카이제곱 분포를 따르지 않고 카이제곱 분포의 가중합 형태가 된다는 것이 Chernoff & Lehman(1954)의 연구 이래로 잘 알려져 있는 것이다. 정확한 카이제곱 극한분포를 가지도록 만드는 시도 중의 하나가 바로 카이제곱 통계량의 모양을 변형하는 것으로서 Rao & Robson(1974)과 Nikulin(1973)에 의해 독립적으로 연구되었다. 이 통계량의 구체적인 모양은 2절에서 제시되며 통상 라오-롭슨 카이제곱 통계량이라 불린다.

이 논문에서는 Park(2001)에서 제시된 카이제곱 다변량 정규성 검정의 정확한 라오-롭슨 형태를 제시하고자 한다. 더불어 이 통계량의 정규성 가정 하의 극한분포가 정확한 카이제곱 분포를 따른다는 것을 자체적으로 증명하고자 한다. 실제로 라오-롭슨 검정통계량은 관찰도수와 표준정규분포에서 계산할 수 있는 몇 개의 수치만 알면 쉽게 계산할 수 있는 간단한 형태이며 점근 유의확률을 쉽게 계산할 수 있기 때문에 실제 적용이 아주 용이하다. 이론적인 유도과정과 더불어 이 통계량의 유용성을 보여주는 두 개의 모의실험을 수행하고자 한다. 우선 정규성 가정 하의 극한분포가 소표본에서도 얼마나 잘 부합되는지 모의실험을 통해 살펴보게 된다. 또한 정규분포에서 많이 벗어나지 않는 하나의 비정규분포에서 기존의 대표적인 다변량 정규성 검정들과 검정력을 비교하는 모의실험을 수행한다. 실제로 이 비정규분포에서는 제안한 라오-롭슨 카이제곱 검정이 다른 정규성 검정에 비해 훨씬 뛰어난 검정력을 보여주었다.

이 논문은 다음과 같은 순서로 전개된다. 2절에서는 제안된 검정의 절차를 간략히 소개하며, 정확한 라오-롭슨 카이제곱 통계량의 모양을 계산한 후 이 통계량의 정규성 가정 하의 극한분포를 자체적으로 유도한다. 3절에서는 정규분포와 비정규분포에서 수행하는 모의실험 결과를 제시한다.

## 2. 검정통계량과 극한분포

우선 이 논문에서의 표기법에 대해 간략하게 언급하도록 하겠다. 단위행렬(identity matrix), 영벡터(vector of zeros), 일벡터(vector of ones)를 각각  $I$ ,  $0$ ,  $e$ 라고 나타내며 차원을 나타낼 필요가 있으면 첨자로서 나타낸다. 그리고 따로 언급되지 않으면 모든 벡터는 열벡터이며 문장 중에는 편의상 행벡터로 나타내기로 한다.

평균이  $\mu$ 이고 공분산행렬이  $\Sigma$ 인  $p$ 차원 정규분포를  $N_p(\mu, \Sigma)$ , 자유도가  $f$ 인 카이제곱 분포를  $\chi^2(f)$ 라고 표기한다. 또한 표준정규분포의 확률밀도함수, 누적분포함수, 분위수함수를  $\phi$ ,  $\Phi$ 와  $\Phi^{-1}$ 이라고 나타낸다.

지금부터 Park(2001)의 절차를 간략히 소개하도록 하겠다.  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 을  $N_p(\mu, \Sigma)$ 에서의 확률표본이라고 하자. 여기서  $\Sigma$ 는 정칙(nonsingular)이며  $n > p$ 라고 가정한다. 그러면  $n > p$  조건에 의해 표본공분산 행렬  $S$ 는 정칙이 된다. 첫 번째 절

차는 표본평균 벡터가 0, 표본공분산 행렬이 I가 되도록 하는 구형화(spherizing) 과정이다. 다시 말해 구형화 자료는

$$Z_i = (z_{i1}, \dots, z_{ip}) = R(S)(Y_i - \bar{Y}) \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

가 되는데, 여기서  $\bar{Y}$ 는 표본평균 벡터이며  $R(S)$ 는  $S$ 를 통해서만 원자료에 의존하는 대각원소가 양수인 하삼각행렬(lower triangular matrix)로서  $R(S)SR^t(S) = I$ 를 만족한다. 다음으로 구형화 자료에서 표준정규분포의 분위수를 이용하여 범주형 자료를 얻는다. 여기서는 모든 변수에 동일한 범주화 과정을 사용하는데 각 변수가  $d$ 개의 범주를 가지도록 만든다. 구체적인 범주화 과정은 변수값이 표준정규분포의  $(i-1)/d$ -분위수보다 크고  $i/d$ -분위수보다 같거나 작으면 범주  $i$ 를 부여하는 것이다. 다시 말해  $\xi_i = \Phi^{-1}(i/d)$ 라고 표기할 때 관찰값이  $(\xi_{i-1}, \xi_i]$  범위에 속하면 범주  $i$ 를 부여하는 것이다. 이 범주형 자료로부터  $p$ -차원 분할표를 구성할 수 있다. 이 분할표는  $K \equiv d^p$ 개의 총 가능한 칸을 가지며  $n$ 개의 범주형 벡터가  $K$ 개의 칸에 분배되는 것이다. 특정 칸을  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p)$ 라고 나타낼 때 이 칸에 속하는 관찰도수는

$$u_\pi = \sum_{k=1}^n I\{\xi_{\pi_i-1} < z_{ki} \leq \xi_{\pi_i}, \forall 1 \leq i \leq p\}$$

가 된다. 여기서 물론 모든  $\pi_i$ 는 1과  $d$  사이의 자연수 값을 취하며  $I\{\cdot\}$ 는 표시함수(indicator function)이다. 이 관찰도수에 근거하여 피어슨-피셔(Pearson-Fisher) 카이제곱 통계량

$$X^2 = \sum_{\pi} \frac{(u_\pi - np_0)^2}{np_0}$$

을 계산하여 다변량 정규성 검정으로 사용하게 된다. 여기서  $p_0 \equiv 1/K = 1/d^p$ 이다.

이제 관찰도수 벡터의 점근분포를 나타내는데 필요한 표기법을 정의하자. 우선  $U_n = (u_\pi)$ 은  $K \times 1$  관찰도수 벡터이다. 결과를 좀 더 용이하게 나타내기 위해  $U_n$ 이  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p)$ 의 표준순서에 의해 나열되어 있다고 가정한다. 다시 말해  $\pi_1$ 이 가장 먼저 1에서  $d$ 까지 변하고,  $\pi_2$ 가 두 번째 빨리 변하고  $\pi_p$ 가 가장 나중에 변하는 순서이다.  $i=1, \dots, d$ 에 대해서  $\phi_i = \phi(\xi_{i-1}) - \phi(\xi_i)$ 와  $\pm\infty \phi(\pm\infty) = 0$ 라는 관계를 사용하여  $\omega_i = \xi_{k-1}\phi(\xi_{i-1}) - \xi_k\phi(\xi_i)$ 를 정의하자.  $D_1$ 는  $K \times p$  행렬로서 이 행렬의  $i$ 번째 열은  $e_d \otimes \dots \otimes \phi \otimes \dots \otimes e_d$ 가 반복되어 채워진다. 여기서  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ 이며 이 벡터는 크로네커 곱(Kronecker product)의  $i$ 번째 위치에 있다.  $D_2$ 는  $D_1$ 에서  $\phi_i$  값을  $\omega_i$  값으로 대체한 행렬이다.  $D_3$ 는  $D_1$  행렬에서 얻을 수 있는  $K \times p(p-1)/2$  행렬인데  $D_3$ 의 열벡터는  $D_1$ 에 있는 모든 가능한 두 열벡터를 곱해서 얻는다. 이 표기법에 근거했을 때  $U_n$ 의 점근분포는 다음과 같다.

**보조정리 1.** (Park, 2001)  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ 가 정칙인  $\Sigma$ 를 가지는  $N_p(\mu, \Sigma)$ 에서의

확률표본일 때  $n \rightarrow \infty$  이면 다음이 성립한다.

$$(U_n - np_0 e_K) / \sqrt{np_0} \xrightarrow{d} N_K(0, E)$$

여기서

$$E = I - p_0 e_K e_K^t - p_0 D_1 D_1^t - \frac{p_0}{2} D_2 D_2^t - p_0 D_3 D_3^t$$

이다.

그런데  $V_n \equiv (U_n - np_0 e_K) / \sqrt{np_0}$ 의 점근분산  $E$ 가 미지의 모수  $\mu, \Sigma$ 에 의존하지 않기 때문에 라오-롭슨 카이제곱 통계량은  $V_n^t E^- V_n$ 의 형태가 된다. 여기서  $E^-$ 는  $E$ 의 일반화 역행렬(generalized inverse)인데 우리는 일반화 역행렬의 일종이면서 계산이 용이한 무어-펜로즈 역행렬(Moore-Penrose inverse)  $E^+$ 을 이용한다. 이 역행렬을 이용해 계산한 라오-롭슨 카이제곱 검정통계량 다음과 같다.

**정리 1.** 보조정리 1의 조건하에서 라오-롭슨 카이제곱 검정통계량은

$$\begin{aligned} T_n &= V_n^t E^+ V_n \\ &= X^2 + \frac{d^{2-p}}{n(1-da)} \sum_{k=1}^p \left( \sum_{i=1}^p \phi_i V_i^{(k)} \right)^2 + \frac{d^{2-p}/2}{n(1-da/2)} \sum_{k=1}^p \left( \sum_{i=1}^p \omega_i V_i^{(k)} \right)^2 \\ &\quad + \frac{d^{4-p}}{n(1-d^2c)} \sum_{k < l} \left( \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \psi_i \psi_j V_{ij}^{(kl)} \right)^2 \end{aligned}$$

가 된다. 여기서  $a = \sum_{i=1}^d \psi_i^2$ ,  $b = \sum_{i=1}^d \omega_i^2$ ,  $c = a^2$ 이며  $V_i^{(k)}$ 는  $k$ 번째 범주형 변수의  $i$ 번째 범주에 속하는  $V_n$ 의 주변관찰도수,  $V_{ij}^{(kl)}$ 은  $(k, l)$ 번째 범주형 변수의  $(i, j)$ 번째 범주에 속하는  $V_n$ 의 주변관찰도수이다.

**증명:**  $\Omega_1 = D_1 D_1^t / (ad^{p-1})$ ,  $\Omega_2 = D_2 D_2^t / (bd^{p-1})$ ,  $\Omega_3 = D_3 D_3^t / (cd^{p-2})$ 라고 정의하자. 그러면  $e_K e_K^t / d^p$ ,  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$ 는 서로 직교이면서 계수가 각각 1,  $p$ ,  $p$ ,  $p(p-1)/2$ 인 멱등행렬(idempotent matrices)이 된다. 따라서

$$E = \left( I - e_K e_K^t / d^p \right) \left( I - da \Omega_1 \right) \left( I - \frac{db}{2} \Omega_2 \right) \left( I - d^2 c \Omega_3 \right)$$

의 무어-펜로즈 역행렬은

$$\begin{aligned} & \left( I - d^2 c \Omega_3 \right)^{-1} \left( I - \frac{db}{2} \Omega_2 \right)^{-1} \left( I - da \Omega_1 \right)^{-1} \left( I - e_K e_K^t / d^p \right)^{-1} \\ &= \left( I + \frac{d^2 c}{1 - d^2 c} \Omega_3 \right) \left( I + \frac{db/2}{1 - db/2} \Omega_2 \right) \left( I + \frac{da}{1 - da} \Omega_1 \right) \left( I - e_K e_K^t / d^p \right) \\ &= I - e_K e_K^t / d^p + \frac{da}{1 - da} \Omega_1 + \frac{db/2}{1 - db/2} \Omega_2 + \frac{d^2 c}{1 - d^2 c} \Omega_3 \end{aligned}$$

가 된다. 따라서

$$\begin{aligned} T_n &= V_n^t (I - e_K e_K^t / d^p) V_n + \frac{da}{1-da} V_n^t \Omega_1 V_n + \frac{db}{1-db/2} V_n^t \Omega_2 V_n + \frac{d^2 c}{1-d^2 c} V_n^t \Omega_3 V_n \\ &= V_n^t V_n + \frac{d^{2-p}}{(1-da)} V_n^t D_1 D_1^t V_n + \frac{d^{2-p}/2}{1-db/2} V_n^t D_2 D_2^t V_n + V_n^t + \frac{d^{4-p}}{1-dc} V_n^t D_3 D_3^t V_n \end{aligned}$$

를 얻을 수 있는데 두 번째 등식은  $e_K^t V_n = 0$  이기 때문에 성립한다. 그런데

$$\begin{aligned} V_n^t D_1 &= (\sum_i \phi_i V_i^{(1)}, \dots, \sum_i \phi_i V_i^{(p)}) \\ V_n^t D_2 &= (\sum_i \omega_i V_i^{(1)}, \dots, \sum_i \omega_i V_i^{(p)}) \\ V_n^t D_3 &= (\sum_i \sum_j \phi_i \phi_j V_{ij}^{(12)}, \dots, \sum_i \sum_j \phi_i \phi_j V_{ij}^{(p-1, p)}) \end{aligned}$$

이기 때문에 이것을 대입하면 증명이 완성된다.  $\square$

정리 1에서 제시된 라오-롭슨 카이제곱 통계량의 극한분포는 일반화 왈드 방법 (Rao & Mitra(1971)의 173쪽 참조)에 의해 쉽게 유도될 수 있다. 다시 말해  $n \rightarrow \infty$  이면  $V_n^t E^+ V_n \xrightarrow{d} \chi^2(\text{rank}(E))$  이기 때문에  $E$ 의 계수가  $K-1$ 이라는 것을 보이면 되는 것이다. 그러나 이 논문에서는 이 방법에 의존하지 않고 자체적으로 라오-롭슨 카이제곱 통계량의 극한분포를 직접 유도하도록 하겠다.

정리 2. 보조정리 1의 조건하에서  $n \rightarrow \infty$  일 때  $T_n \xrightarrow{d} \chi^2(K-1)$  이다.

증명:

$$E = I - e_K e_K^t / d^p - da \Omega_1 - \frac{db}{2} \Omega_2 - d^2 d \Omega_3$$

의 고유값을  $\lambda_1, \dots, \lambda_K$ , 이에 대응되는 직교 고유벡터를  $q_1, \dots, q_K$  라고 놓자. 그러면  $e_K e_K^t / K, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  가 서로 직교이면서 각각 계수가 1,  $p, p, p(p-1)/2$  인 멱등 행렬이기 때문에  $E$ 의 고유값은 0이 1번,  $1-da$ 와  $1-db/2$ 가 각각  $p$ 번,  $1-d^2 c$ 가  $p(p-1)/2$ 번 그리고 나머지는 모두 1이 된다. 따라서

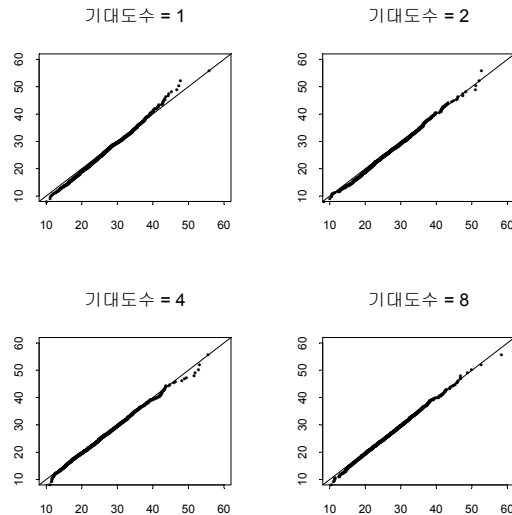
$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, \lambda_2 = \dots = \lambda_{p+1} = 1-da, \lambda_{p+2} = \dots = \lambda_{2p+1} = 1-db/2, \\ \lambda_{2p+2} &= \dots = \lambda_{p(p+3)/2+1} = 1-d^2 c, \lambda_{p(p+3)+2} = \dots = \lambda_K = 1 \end{aligned}$$

라고 놓을 수 있다. 여기서  $Q = (q_1, \dots, q_K)$ ,  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_K)$  라고 놓으면 스펙트럼 분해(spectral decomposition)에 의해  $E = Q \Lambda Q^t$ 가 성립하며 무어-펠로즈 역행렬은  $E^+ = Q \Lambda^+ Q^t$ 가 된다. 여기서  $\Lambda^+$ 는  $\Lambda$ 의 원소 중 0이 아닌 것은 역수를 취한 행렬이 된다. 그런데 보조정리 1에 의해  $V_n$ 이  $N_K(0, E)$  극한분포를 따르기 때문에 연속사상정리(continuous mapping theorem)에 의해  $W_n = (\Lambda^+)^{1/2} Q^t V_n$ 은 평균이 0, 공분산행렬이  $\text{diag}(0, I_{K-1})$ 인 다변량 정규극한분포를 가지게 된다. 따라서 증명이 완성된다.  $\square$

### 3. 모의실험

우선 라오-롭슨 카이제곱 통계량의 정규성 가정 하의 극한분포가 소표본에서 얼마나 잘 부합되는지 간단한 모의실험을 수행하였다. 여러 가지 셀 형태에 대해 모의실험을 많이 해보았는데 추가가능한 칸의 수  $K$ 가 아주 작지 않으면 대부분의 경우 극한분포가 소표본에서 잘 부합된다는 것을 알 수 있었다. 그래서 여기서는  $p=3$ ,  $d=3$ 인 한 가지 경우에 대한 모의실험 결과를 제시하고자 한다.

이 모의실험에서 고려한 표본크기  $n$ 은 27, 54, 98, 196로서 기대도수  $np_0$ 는 각각 1, 2, 4, 8이 된다. 주어진 표본크기에 대해  $N_3(0, I)$ 에서 1000개의 표본을 뽑아 라오-롭슨 카이제곱 통계량을 계산하였다. 이 통계량값들을 카이제곱 확률도를 그린 것이 <그림 1>이다.



<그림 1> 카이제곱 확률도

각 카이제곱 확률도에는 절편이 0, 기울기가 1인 직선을 그려 넣어 산포도가 얼마나 그 직선에서 벗어나는지 보기 쉽게 만들었다. 이 카이제곱 확률도에 의하면 기대도수가 2 정도만 되면 극한분포가 좋은 근사분포가 된다는 것을 보여주고 있다. 심지어 기대도수가 1일 때도 극한분포가 근사분포로서 그다지 나쁘지 않다는 것을 알 수 있다.

다음으로 비정규 분포에서 검정력을 비교하는 모의실험을 수행하였다. 여기서 고려되는 분포는 '나선형'(spiral) 분포이다. 모수가  $b$ 인 나선형 분포의 확률밀도함수는

$$f(x_1, x_2) \propto \{1 + \cos[2(\theta - b \cdot r)]\} \exp(-r^2/2)$$

인데 여기서  $r$ 과  $\theta$ 는  $(x_1, x_2)$ 의 극좌표 값으로 반지름과 각도를 나타낸다. 이 분포

의 산포도는 대칭인 두 개의 나선형을 이루는데  $b$ 가 커짐에 따라 꼬리가 길어진다. 이 모의실험에서는  $b=2$ 를 사용하는데 이 때 4차 적률까지 이변량 표준정규분포와 아주 유사하게 된다.

이 모의실험에서 라오-롭슨 카이제곱 통계량과 비교대상이 되는 다변량 정규성 검정은 Mardia(1970)의 왜도 및 첨도 통계량, Ozturk & Romeu(1992)의  $Q_n$  통계량, Henze & Wagner(1997)의  $T_{n,1}$  통계량이다. 처음 세 개의 통계량은 Romeu & Ozturk(1993)의 방대한 모의실험 결과 검정력이 가장 우수한 결과를 보였으며, 마지막 통계량은 왜도 및 첨도 통계량의 중간형태로서 역시 우수한 검정력을 보이는 것으로 알려져 있다.

나선형 분포에서  $n=100$ 인 표본 1000개를 뽑아 각 검정통계량의 접근 유의확률을 계산하였다. 유의수준  $\alpha$ 가 .001, .005, .01, .025, .05, .1인 경우 각 검정통계량의 정규성 기각율, 즉 검정력을 요약한 것이 <표 1>이다.

<표 1> 나선형 분포에서 검정력 비교 ( $n=100$ , 표본수=1000)

통계량 $\alpha$	라오-롭슨	왜도통계량	첨도통계량	$Q_n$	$T_{n,1}$
.001	.048	.003	.004	.003	.002
.005	.106	.005	.006	.013	.011
.010	.159	.010	.006	.028	.023
.025	.256	.029	.013	.063	.059
.050	.357	.047	.029	.108	.106
.100	.500	.100	.061	.173	.184

<표 1>에서 알 수 있는 것은 라오-롭슨 카이제곱 통계량의 검정력이 다른 통계량에 비해 월등하다는 것이다. 실제로 왜도 및 첨도 통계량은 나선형 분포에 대해 거의 검정력을 가지지 못하며,  $Q_n$ 과  $T_{n,1}$ 은 다소간의 검정력을 보이나 제안한 라오-롭슨 통계량의 검정력과는 현격한 격차를 보이고 있다.

### 참고문헌

1. Chernoff, H., and Lehmann, E.L. (1954). The Use of Maximum Likelihood Estimates in  $\chi^2$  Tests for Goodness of Fit, *Annals of Mathematical Statistics*, 25, 579-586.
2. Henze, N., and Wagner, T. (1997). A New Approach to the BHEP Tests for Multivariate Normality. *Journal of Multivariate Analysis*, 62, 1-23.
3. Mardia, K.V. (1970). Measures of Multivariate Skewness and Kurtosis with Applications, *Biometrika*, 57, 519-530.

4. Nikulin, M.S. (1973). Chi-Square Test for Continuous Distributions with Shift and Scale Parameters, *Theory of Probability and Its Applications*, 18, 559-568.
5. Ozturk, A. and Romeu, J.L. (1992). A New Method for Assessing Multivariate Normality with Graphical Applications, *Communications in Statistics - Simulations and Computation*, 21, 15-34.
6. Park, C. (2001). A Simple Chi-Squared Test of Multivariate Normality Based on the Spherical Data, *The Korean Communications in Statistics*, 8, 117-126.
7. Rao, C.R., and Mitra, S.K. (1971). *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications*, John Wiley & Sons, New York.
8. Rao, C.R., and Robson, D.S. (1974). A Chi-Square Statistic for Goodness-of-Fit Tests within the Exponential Family, *Communications in Statistics*, 3, 1139-1153.
9. Romeu, J.L. and Ozturk, A. (1993). A Comparative Study of Goodness-of-fit Tests for Multivariate Normality. *Journal of Multivariate Analysis*, 46, 309-34.

[ 2004년 3월 접수, 2004년 5월 채택 ]