Journal of Korean
Data & Information Science Society
2004, Vol. 15, No. 2, pp. 387~394

Tests for the Change-Point in the Zero-Inflated Poisson Distribution[1)]

Kyung Moo Kim[2)]

Abstract

Zero-Inflated Poisson distribution is Poisson distribution with excess zeros. Recently defects of product hardley happen in the manufacturing process. In this case it is desirable to apply to the Zero-Inflated Poisson distribution rather than Poisson. Our target of this paper is to study the tests for changes of rate of defects after the unknown change-point. We are going to compare the powers of the two proposed tests with likelihood tests by the simulations.

Keywords: Change-Point, Likelihood test, Moment estimator, Zero-Inflated Poisson Distribution

1. 서론

여러 개의 부품들을 한 단위 시료군으로 할때, 시료군들 중에 들어있는 불량품수에 관해 생각하여 보자. 만약 공정과정이 안정적이라면 단위당 불량률은 일정한 상수로 나타날것이고 또 불량품수는 포아송분포를 따르게 된다. 이처럼 포아송분포는 생산공정단계에서 발생하는 불량품 수에 관한 확률분포로서 지금까지 중요한 분포로 이용되어 왔다. 그러나 현대문명의 발달과 제품을 만들어내는 기술의 고급화로 인하여 불량률은 현저하게 감소되어가고 있다. 만약 불량품수가 거의 없는 경우는 포아송분포를 이용하기보다는 영이 과잉관측되는 영과잉-포아송분포(Zero-Inflated Poisson Distribution; ZIP)에 적용하는 것이 더 좋을 것이다. 영과잉-포아송분포는 이산형 확률분포에 있어서 정상적인 포아송 확률분포보다 영의 값이 과잉관측되는 분포를 말한다. 불량품수가 거의 없는 경우 기존의 포아송 분포에 적용시켜 통계적인 추론을 한다면 이는 제3종의 오류를 범하는 결과를 초래할 것이다.

---

1) The present research was supported by the research fund of Daegu University in 2003.
2) Professor Department of Statistics, Daegu University, 712-714 Daegu, Korea,
E-mail : kmkim@taegu.ac.kr

생산공정과정에서 시료군 당 발생하는 불량품수가 이러한 영과잉-포아송분포를 따른다고 할 때, 불량품수가 어떤 시점 이후 변화가 있다고 하자. 이때 미지의 시점을 변화시점(change-point)이라 한다. 이러한 영과잉-포아송분포는 Singh(1963)와 Johnson-Kotz(1969)에 의해 소개되었으나 수학적인 모형으로만 인식되어 응용분야가 다양하지 못했다. 그 이후 Heilbron(1989)는 영변경(zero altered)-포아송 음이항 회귀모형을 이용하여 위험요소가 많은 사람들의 행동과학에 대하여 연구하였다. 그는 반응값이 영인 경우에 확률을 임의로 주는 모형을 생각했다. 영이 되는 확률이 표준 포아송분포보다 적게 되도록 양의 포아송분포를 생각하였다. 그 이후 영변경-포아송 음이항 회귀모형과 유사한 모형을 Lambert(1992)는 제시하였다. 그는 공변량에 의존되는 반응변수가 영과잉-포아송 분포를 따르는 영과잉-포아송분포(zero-inflated Poisson regression model)를 이용한 회귀모형을 소개하였다. 그는 반도체 부품들을 몇 가지 요인으로 나누어 각 경우마다 나타나는 불량개수를 관측한 실제자료에 적용하였다. 회귀계수들은 최우추정법을 이용하여 추정하였고 공변량(covariates)들의 효과를 분석하였다. 그 이후 공변량이 없는 영과잉-포아송분포를 Li 등(1999)은 다변량 영과잉-포아송분포로 확장시켰다. 다변량 영과잉-포아송분포는 많은 모수를 포함하고 있는데 이들의 적률추정량, 최우추정량들과 분포의 성질들을 연구하였다.

본 논문은 영과잉-포아송분포에서 시료단위 당 발생하는 불량품수가 미지의 변화시점 이후 변화가 있는 지를 Quesenberry(1991, 1995)의 Q통계량과 누적합(CUSUM) 통계량을 이용하여 검정하려 한다. 또한 제안된 두가지 검정과 우도비검정을 검정력을 이용하여 비교할 것이다. 모의실험에서는 가상표본을 대상으로 추정과 검정으로 변화시점과 불량률의 변화를 알아볼 것이다.

2. 변화시점이 있는 영과잉 포아송분포

확률변수 Y는 생산공정에서 일정 단위 당 불량품이 나타나는 수로서 영과잉-포아송분포(ZIP)를 따른다. 영과잉-포아송분포는 포아송분포와 베르누이분포와의 혼합모형(mixed model)으로 볼 수 있다. 포아송분포에서 0이 과잉 관측되는 경우로 생각할 수 있다.

$$Y \sim \begin{cases} 0, & p\text{의 확률로}, \\ Poisson(\lambda), & 1-p\text{의 확률}, \end{cases}$$

여기에서 $0 \le p \le 1$는 영의 값에서 주어지는 임의의 확률이며 $\lambda > 0$는 포아송분포의 시료군 당 불량률이다. 이때 확률질량함수(pmf)는 아래와 같이 된다.

$$P(Y=k) = \begin{cases} p+(1-p)e^{-\lambda}, & k=0, \\ (1-p)\lambda^k e^{-\lambda}/k!, & k=1,2,\cdots. \end{cases}$$

앞으로 위의 분포를 $ZIP(p,\lambda)$라고 표기하기로 한다. 이 분포의 누적분포함수 F는 다음과 같다.

$$F(y)=P(Y\le y) = \begin{cases} 0, & y<0, \\ p+(1-p)e^{-\lambda}, & 0\le y<1, \\ p+(1-p)e^{-\lambda}+(1-p)\sum_{k=1}^{[y]}\lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!}, & y\ge 1, \end{cases} \tag{1}$$

여기에서 $[y]$는 y를 초과하지 않는 최대의 정수를 의미한다. $ZIP(p,\lambda)$분포에서 p와 λ를 모를 경우에는 최우추정량과 적률추정량을 이용할 수 있겠다.

서로 독립인 확률변수 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$가 시간의 흐름에 따라 연속적으로 얻을 수 있는 관측자료라 하자. 이때 생산공정과정 중 여러 가지 원인들로 인하여 미지의 변화시점(changepoint) c 이후의 분포의 변화가 있는 다음 모형을 생각할 수 있다.

$$Y_1, Y_2, \cdots, Y_c \sim ZIP(p,\lambda)$$
$$Y_{c+1}, Y_{c+2}, \cdots, Y_n \sim ZIP(p^*, \lambda^*),$$

여기에서 양의 정수 c는 변화시점이고 p^*와 λ^*는 각각 변화시점 이후 불량품이 전혀 나타나지 않는 상태의 확률과 불량품 수에 대한 평균을 의미한다. 만약 $p > p^*$ 혹은 $\lambda < \lambda^*$이 된다면, 변화시점 이후 불량품 수가 증가될 것이다. 우리는 이 모형을 변화시점이 있는 $ZIP(p,\lambda, c, p^*, \lambda^*)$모형이라 하겠고 5개의 모수를 포함하고 있다.

위 5개의 모수의 모수 중 변화시점의 점추정은 변화시점 이전과 이후의 제곱합의 합이 최소가 되는 양의 정수를 점추정량으로 생각하였다. 즉 (3)식을 만족하는 양의 정수 j를 변화시점의 점추정량 $\hat{c}$로 생각하였다.

$$Min_{1 \le j < n}\Big[\sum_{i=1}^{j} \big(y_i - \sum_{i=1}^{j} y_i/j\big)^2 + \sum_{i=j+1}^{n} \big(y_i - \sum_{i=j+1}^{n} y_i/(n-j)\big)^2\Big] \tag{2}$$

나머지 모수 p, λ, p^* 그리고 λ^*의 적률추정량(moment estimator)은 다음 식과 같게 된다.

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{\hat{c}} y_i^2}{\sum_{i=1}^{\hat{c}} y_i} - 1, \quad \hat{p} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{\hat{c}} y_i/n}{\hat{\lambda}} \tag{3}$$

$$\widehat{\lambda^*} = \frac{\sum_{i=c+1}^{n} y_i^2}{\sum_{i=c+1}^{n} y_i} - 1, \quad \widehat{p^*} = 1 - \frac{\sum_{i=c+1}^{n} y_i/n}{\hat{\lambda}}$$

단, (3)식에서 $\hat{p}$와 $\widehat{p^*}$가 음수로 나타나는 경우는 그 값을 0으로 둔다.

3. 변화시점에 관한 검정

생산공정과정 중 미지의 변화시점 이후 불량품 수의 변화가 있는 지를 알아보기 위하여 세가지 검정법을 소개하려고 한다. 먼저 Kim(1998)이 제시한 우도비검정과 본 논문에서 제안하려고 하는 Quesenberry(1991, 1995)의 Q통계량을 이용한 검정 그리고 누적합(CUSUM) 통계량을 이용하여 검정하려 한다.

1)우도비검정

$Y_1, Y_2, \cdots, Y_c, Y_{c+1}, \cdots, Y_n$가 서로 독립적으로 $ZIP(p,\lambda)$의 분포를 따른다고 하자. 변화시점 이전과 이후가 변화가 없다는 귀무가설, $H_0: p=p^*, \lambda=\lambda^*$, 그리고 변화가 있다는 대립가설 $H_1: p\neq p^*$혹은$\lambda\neq\lambda^*$에 대하여 로그우도함수는 아래 식과 같이 된다.

$$l(y;p,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\ln[(p+(1-p)e^{-\lambda})I(y_i=0)+((1-p)\lambda^{y_i}e^{-\lambda}/y_i!)I(y_i>0)$$

여기에서 $I(.)$는 지시함수이다. 또한 대립가설에 대한 로그우도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &l(y;p,\lambda,c,p^*,\lambda^*)\\ &=\sum_{i=1}^{n}\ln[(p+(1-p)e^{-\lambda})I(i\leq c, y_i=0)+((1-p)\lambda^{y_i}e^{-\lambda}/y_i!)I(i\leq c, y_i>0)\\ &+(p^*+(1-p^*)e^{-\lambda^*})I(i>c, y_i=0)+((1-p^*)\lambda^{*y_i}e^{-\lambda^*}/y_i!)I(i>c, y_i>0)] \end{aligned}$$

이에 따른 검정통계량은

$$L_n=-2(l(y;p,\lambda)-l(y;p,\lambda,c,p^*,\lambda^*))$$

위 통계량은 대표본에서 자유도 3인 카이제곱분포에 접근하기 때문에 L_n값이 크면 귀무가설을 기각시킬 수 있다.

2) Q통계량을 이용한 검정

불량품수가 포아송분포를 따를 경우에, Quesenberry(1991, 1995)는 불량률에 대한 변화가 있는 지를 Q통계량을 이용하였다. 그는 Q차트에 통계량 Q를 플롯하여 이들의 변화를 감지하였다. 이를 $ZIP(p,\lambda)$분포에 적용하여 보자.

확률변수 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_c, Y_{c+1}\cdots, Y_n$가 $ZIP(p,\lambda,c,p^*,\lambda^*)$분포를 따른다고 하자. 확률변수 Y_i의 누적분포함수 $F(y_i;p,\lambda)$는 (1)식과 같다. 만약 변화시점이 있다면 (1)식의 누적분포함수는 $F(y_i;p,\lambda,c,p^*,\lambda^*)$로서 (4)식과 같게 될 것이다

$$\begin{aligned} &F(y;p,\lambda,c,p^*,\lambda^*)\\ &=P(Y\leq y)\\ &=\begin{cases} 0, & y<0,\\ p+(1-p)e^{-\lambda}, & 0\leq y<1,\\ p+(1-p)e^{-\lambda}+(1-p)\sum_{k=1}^{[c]}\lambda^{*k}\frac{e^{-\lambda^*}}{k!}, & 1\leq y<c+1,\\ p+(1-p)e^{-\lambda}+(1-p)\sum_{k=1}^{[c]}\lambda^{*k}\frac{e^{-\lambda^*}}{k!} & \\ \quad+(1-p^*)\sum_{k=c+1}^{[y]}\lambda^{*k}\frac{e^{-\lambda^*}}{k!}, & y\geq c+1, \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

$F(y_i;p,\lambda,c,p^*,\lambda^*)$에서 모수 추정은 먼저 변화시점 c를 (3)식에 의하여 추정하고 나머지 모수들을 추정한다. $F(y_i;p,\lambda,c,p^*,\lambda^*)$에 모수추정량을 대체한 이후의 분포함수는 $F(y_i;\widehat{p},\widehat{\lambda},\widehat{c},\widehat{p^*},\widehat{\lambda^*})$이 될 것이다. 본 논문에서 제안하는 Q_n통계량은

$$Q_i = \Phi^{-1}(F(y_i; \widehat{p}, \widehat{\lambda}, \widehat{c}, \widehat{p^*}, \widehat{\lambda^*})),\ i = 1,\cdots,2,n,$$
$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

이고 $\Phi^{-1}(.)$는 표준정규분포의 누적함수의 역함수이다. 한편 Quesenberry(1991, 1995)는 Q_n통계량은 근사적으로 정규분포에 가까워 짐을 입증하였다. 따라서 변화시점 이전과 이후의 변화가 없다는 귀무가설: $H_0: p = p^*, \lambda = \lambda^*$, 변화가 있다는 대립가설: $H_1: p \neq p^*$혹은$\lambda \neq \lambda^*$는 $|Q_n| > z_{\alpha/2}$이면 유의수준 α에서 귀무가설은 기각된다.

3)누적합 CUSUM을 이용한 검정

위 Q_i통계량의 누적합을 이용한 검정통계량으로 S_n를 제안한다. 이는 Q_i들이 표준정규분포를 따르기 때문에 점근적으로 표준정규분포에 가까워진다.

$$S_n = \sqrt{\frac{2}{n(n-1)}} \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} Q_i$$

따라서 변화시점 이전과 이후의 변화가 없다는 귀무가설: $H_0: p = p^*, \lambda = \lambda^*$, 변화가 있다는 대립가설: $H_1: p \neq p^*$혹은$\lambda \neq \lambda^*$는 $|S_n| > z_{\alpha/2}$이면 α에서 귀무가설은 기각된다.

4. 모의실험

1)제안된 Q_i 그리고 S_i의 검정

$Y_1, Y_2, \cdots, Y_c, Y_{c+1} \cdots, Y_n$에서 변화시점까지의 분포가 $ZIP(p, \lambda)$그리고 변화시점 이후가 $ZIP(p^*, \lambda^*)$의 분포를 따른다고 하자. 이러한 경우 변화시점 이전과 이후가 변화가 없다는 귀무가설, $H_0: p = p^*, \lambda = \lambda^*$, 그리고 변화가 있다는 대립가설 $H_1: p \neq p^*$혹은$\lambda \neq \lambda^*$에 대하여 모의실험을 하려고 한다. 먼저 표본수는 $n=20$을 선택하였고 변화시점은 $c=10$로 정하였다. 따라서 10번째까지의 관측치들은 귀무가설 분포를 따르게 되고 나머지 관측치들은 대립가설 분포를 따르게 된다. 귀무가설에서의 모수는 $p=0.7, \lambda=2$로 정하였다. 대립가설에서 변화된 0의 확률은 $p^*=0.8$ 그리고 변화된 불량률은 $\lambda^*=3$로 정하였다. 따라서 20개의 표본은 10번째까지의 표본은 $ZIP(0.7, 2)$의 난수가 그리고 11번째 부터는 $ZIP(0.8, 3)$의 난수로 구성되어 있다. $ZIP(p, \lambda)$ 난수 y_i들은 $(0,1)$균일분포를 따르는 난수 U가 p보다 작게되면 0의 값을 그렇지 않으면 $Poisson(\lambda)$ 의 난수가 발생되도록 하였다. 변화시점 $c=10$ 이후 불량률 λ는 2에서 3으로 증가하였으나 p가 0.7에서 0.8로 증가하게 되어 y_i들은 오히려 감소되고 0이 많이 나타남을 <표 1>에서 알 수 있다.

제안된 통계량 값을 구하기 위하여 먼저 변화시점을 (2)식을 이용해 추정해야 할 것 이다. 추정치는 $\widehat{c}=8$가 된다. 변화시점이 추정되었으므로 (3)식을 이용해

$p, \lambda, p*, \lambda^*$를 구한다. 각각 그 값은 $\hat{\lambda}=0.57, \hat{p}=-0.02, \widehat{\lambda^*}=3.00, \widehat{p^*}=0.88$ 로 추정된다. 그러나 $\hat{p}=-0.02$는 음수가 되므로 그 값을 $\hat{p}=0.00$으로 생각해야 할 것이다. Q_i통계량 값을 계산하기 위하여 누적분포함수 $F(y_i; \widehat{p}, \hat{\lambda}, \hat{c}, \widehat{p}^*, \widehat{\lambda}^*)$를 (4)식을 이용하여 구하여야 할 것이다. 계산된 Q_i의 값들이 <표 1>에 나타나 있다. 따라서 $Q_n=4.09$로서 유의확률 0.0001로 변화시점이 없다는 귀무가설을 기각한다. 또한 누적합을 이용한 통계량은 $S_n=2.39$로서 역시 유의확률 0.018로 귀무가설을 기각하게 된다.

<표 1> 영과잉-포아송 난수와 Q_i 값

i	U_i (균일)	P_i (포아송)	y_i	Q_i
1	0.750	1	1	0.125
2	0.178	4	0	-1.360
3	0.357	1	0	-0.584
4	0.786	1	1	0.896
5	0.124	1	0	-0.879
6	0.776	2	2	1.856
7	0.967	1	1	1.754
8	0.713	2	2	3.262
9	0.531	4	0	1.021
10	0.142	4	0	0.324
11	0.243	1	0	1.275
12	0.383	1	0	1.547
13	0.257	1	0	-0.566
14	0.036	1	0	1.350
15	0.445	1	0	1.753
16	0.039	3	0	1.114
17	0.088	5	0	2.254
18	0.967	4	4	3.155
19	0.402	2	0	1.257
20	0.327	3	0	-1.247

2)검정력 비교

제안된 Q_n과 S_n의 검정과 우도비검정 L_n과의 검정력을 비교하기 위하여 모의실험을 실시하였다. $Y_1, Y_2, \cdots, Y_c, Y_{c+1} \cdots, Y_n$에서 변화시점까지의 분포가 $ZIP(p, \lambda)$그리고 변화시점 이후가 $ZIP(p^*, \lambda^*)$의 분포를 따르는 경우, 변화시점 이전과 이후가 변화가 없다는 귀무가설, $H_0 : p = p^*, \lambda = \lambda^*$, 그리고 변화가 있다는 대립가설 $H_1 : p \neq p^*$혹은$\lambda \neq \lambda^*$에 대하여 검정력을 모의실험을 통하여 구하고자 한다. 검정력은 많은 모수들 $p, \lambda, c, p^*, \lambda^*, n, \alpha$에 의존하게 되는데 경우의 수들이 너무 많기

때문에 몇 가지만 생각해 보기로 한다. 먼저 표본크기는 $n=20,30,50$인 경우를 생각하였고, 변화시점은 표본수의 50%, 75%되는 곳을 택하였다. 그리고 귀무가설분포는 $ZIP(p=0.7,\lambda=2)$이고 대립가설분포는 $ZIP(p^*=0.8,\ 0.9,\ \lambda^*=3,\ 4)$으로 고정하였다. 우도비검정 L_n은 모수들의 MLE를 구하여야 하는데 최대값을 구하는 프로그램은 Press 등(1992)의 'Powell' 부프로그램을 이용하였다. 또한 최대값을 구하는 방법은 반복법을 사용하게 되는데 이들의 초기값들을 구하는 방법은 (2)식과 (3)식을 이용하였다. 계산시간이 많이 걸리는 이유로 모든 경우의 반복은 100번으로 하였다. 그리고 유의수준은 $\alpha=0.05$으로 하여 검정력을 구하였다. 제안된 두 통계량은 표준정규분포의 우측확률을 임계점으로 두고 우도비검정은 경험적으로 임계점을 찾았다.

<표 2> 검정력 비교

			$c=0.5n$			$c=0.75n$		
			L_n	Q_n	S_n	L_n	Q_n	S_n
$n=20$	$p^*=0.8$	$\lambda^*=3$	0.42	0.48	0.50	0.35	0.30	0.42
		$\lambda^*=4$	0.61	0.51	0.55	0.56	0.45	0.54
	$p^*=0.9$	$\lambda^*=3$	0.35	0.35	0.41	0.24	0.30	0.32
		$\lambda^*=4$	0.63	0.57	0.54	0.49	0.53	0.55
$n=30$	$p^*=0.8$	$\lambda^*=3$	0.42	0.47	0.65	0.42	0.40	0.53
		$\lambda^*=4$	0.66	0.66	0.69	0.66	0.56	0.60
	$p^*=0.9$	$\lambda^*=3$	0.47	0.54	0.51	0.32	0.40	0.47
		$\lambda^*=4$	0.64	0.69	0.74	0.55	0.51	0.65
$n=50$	$p^*=0.8$	$\lambda^*=3$	0.70	0.84	0.78	0.65	0.67	0.74
		$\lambda^*=4$	0.75	0.88	0.90	0.78	0.74	0.85
	$p^*=0.9$	$\lambda^*=3$	0.71	0.74	0.85	0.60	0.84	0.76
		$\lambda^*=4$	0.79	0.87	0.89	0.87	0.89	0.81

대립가설에 대한 검정력이 경험적으로 <표 2>에 나타나 있다. 검정력이 많은 모수의 함수로 표현되기 때문에 각 경우마다 검정력이 다소 차이가 있고 또 어떤 일률적인 양상을 발견하기가 힘들다. 그러나 전반적으로 관찰해 본다면 누적합을 이용한 S_n이 Q_n보다는 검정력이 조금 우수함을 알 수 있다. 우도비검정 L_n과는 경우에 따라 조금씩 차이는 있으나 제안된 두 검정과 비슷하다고 볼 수 있다. 그러나 세 검정 모두 표본수가 증가할수록 그리고 λ^*가 증가 할수록 검정력이 높아짐을 알 수 있다.

5. 결 론

영과잉-포아송분포에서 변화시점이 있는 지에 대한 검정방법으로 우도비검정 외에 두 가지 검정을 제안하였다. 검정력이 많은 모수의 함수로 표현되기 때문에 각 경우

마다 검정력이 다소 차이가 있고 또 어떤 일률적인 양상을 발견하기가 힘들었다. 그러나 전반적으로 관찰해 보았을 때 누적합을 이용한 S_n이 Q_n보다는 검정력이 조금 우수하였다. 우도비검정 L_n과는 경우에 따라 조금씩 차이는 있었으나 제안된 두 검정과 비슷하다고 볼 수 있었다. 그러나 세 검정 모두 표본수가 증가할수록 그리고 λ^*가 증가하는 경우에 검정력이 높아짐을 알 수 있었다.

참고문헌

1. 김경무, (1998). 변화시점이 있는 영과잉-포아송모형, *Journal of Statistical Theory & Methods*, vol 9, no.1, pp1-9.
2. Diane Lambert, (1992). Zero-Inflated Poisson Regression, With an Application to Defects in Manufacturing, *Technometrics*, 34, pp1-14.
3. Heilborn, D.C., (1989). Generalized Linear Models for Altered Zero Probabilities and Overdispersion in Count Data, *unpublished technical report, University of California*, San Francisco, Dept. of Epidemiology and Biostatistics.
4. Johnson, N.L., Kotz, S., (1969). *Distribtions in Statistics: Discrete Distributions*, Boston: Houghton Mifflin.
5. Li, C.H, Lu, J.C., Park, J.H., Kim, K.M, Brinkly, P.A., Peterson, J.P., (1999). Multivariate Zero-Inflated Poisson Models and Their Applications, *Technometrics*, 41, 1, pp.29-38.
6. Powell, M.J.D., (1964). An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Dervatives, *Computer Journal*, 7, pp155-162.
7. Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., (1992). *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge.
8. Quesenberry, C.P., (1991), SPC Q Charts for a Poisson Parameter λ: Short or Long Runs, *Journal of Quality Technology*, vol 234, pp.296-303.
9. Quesenberry, C.P., (1991, 1995), On Properties of Poisson Q Charts for Attributes, *Journal of Quality Technology*, vol 27, no4, pp.293-303 .
10. Singh, S.N., (1963). A Note on Inflated Poisson Distribution, *Journal of the Indian Statistical Association*, 1, pp.140-144.

[2004년 3월 접수, 2004년 5월 채택]