Journal of Korean
Data & Information Science Society
2004, Vol. 15, No. 1 pp. 119 ~127

Testing Uniformity Based on Vasicek's Estimator[1)]

Jongtae Kim[2)] · Young Joon Cha[3)]

Abstract

To test uniformity of a population, we modify the test statistic based on the sample entropy in the literature, and establish its limiting distribution under weaker conditions, which improves the existing results. It is also to study the proposed test statistic based on Vasicek's entropy estimator is consistent.

Keywords: Entropy, Central Limit Theorem, Goodness-of-Fit.

1. 서론

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 이 독립인 연속확률변수로서 확률밀도함수 $f(x)$과 분포함수 $F(x)$을 가진다고 하자. 확률변수 X의 백분율함수 $Q(u) = F^{-1}(u)$이고 백분율 밀도함수는 $q(u) = Q'(u) = 1/f(Q(u))$이다. 확률밀도함수 f를 갖는 분포함수 F에 대한 엔트로피는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
H(f) &= -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln f(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left\{ \frac{d}{du} F^{-1}(u) \right\} du \qquad (1) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \ln\{ q(u) \}\, du.
\end{aligned}
$$

$H(f)$는 Shannon의 엔트로피 혹은 엔트로피라고 부른다. 엔트로피 $H(f)$에 대한 추정을 위한 많은 연구들은 Dmitriev와 Tarasenko (1973), Vasicek (1976), Ahmad와

---

1) 이 논문은 2003년도 대구대학교 학술연구비 지원에 의한 연구임

2) First Author : Associate Professor, Division of Information Science, Daegu University, Kyungbook 712-714, Korea
E-mail: jtkim@daegu.ac.kr

3) Professor, Department of Information Statistics, Andong National University, Andong, 760-749, Korea
E-mail: yjcha@andong.ac.kr

Lin (1976), Mack (1988), van Es (1992), Correa (1995)등에 의해 제시되어 왔다.

확률표본 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n \geq 3)$이 절대연속 확률밀도함수 $f(x)$를 가지는 모집단으로부터 주어지고, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$은 표본크기 n을 가지는 확률표본에 기초한 순서통계량이다. 만약 $i < 1$이면 $X_{(i)} = X_{(1)}$으로 정의하고, $i > n$이면 $X_{(i)} = X_{(n)}$으로 둔다. 윈도우 크기 m은 $n/2$보다 작은 양의 정수이다.

상수 값 m에 대하여, Vasicek (1976)에 의해 개발된 엔트로피 추정량은 다음과 같다.

$$HV_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^{n-m} \ln\left\{ \frac{n}{2m} \left(X_{(i+m)} - X_{(i-m)} \right) \right\}. \tag{1.2}$$

Vasicek은 $n \to \infty$, $m \to \infty$일 때, $\frac{m}{n} \to 0$이면 $HV_{mn} \xrightarrow{p} H(f)$임을 증명하였다.

Van Es (1992)는 확률표본의 차이에 기초한 엔트로피 추정량을 다음과 같이 제시하였다.

$$\begin{aligned} HE_{mn} = & \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} \ln\left\{ \frac{n+1}{m} \left(X_{(i+m)} - X_{(i)} \right) \right\} \\ & + \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k} + \log(m) - \log(n+1). \end{aligned} \tag{1.3}$$

그는 위의 추정량에 대한 점근적 정규분포의 성질을 증명하였다.

Correa (1995)는 Vasiseck의 추정량을 변형하여 다음과 같은 엔트로피 추정량을 제시하였다.

$$HC_{mn} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(b_i). \tag{1.4}$$

여기서

$$b_i = \frac{\sum_{k=i-m}^{i+m} \left(X_{(k)} - \overline{X}_{(i)} \right)(k-i)}{n \sum_{k=i-m}^{i+m} \left(X_{(k)} - \overline{X}_{(i)} \right)^2}, \quad \overline{X}_{(i)} = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=i-m}^{i+m} X_{(k)}.$$

Correa는 HE_{mn}과 HV_{mn}을 비교한 결과 HC_{mn}이 작은 평균제곱오차를 가지고 있음을 주장하였다.

2절에서는 Vasicek의 엔트로피의 추정에 기초한 검정통계량들의 점근적 성질들과 극한 분포들을 연구하였다. 3절에서는 균등분포의 검정을 위한 제시된 검정통계량에 대한 기각영역을 구하고, 모의실험을 이용하여 기존의 검정통계량들과 검정력을 비교하였다.

2. 검정통계량과 점근적 특성들

확률표본이 주어진 확률분포 $F_0(x;\theta)$를 따르는지를 검정하기 위한 적합도 검정의 가설은 다음과 같다.

$$H_0 : F(x) = F_0(x;\theta). \tag{2.1}$$

이러한 적합도 검정 문제는 모수의 벡터 θ에 대하여 참 분포함수 $F(x)$에 대하여 모수모형 $F(x;\theta)$에 대한 검정을 하는 것이다. Dudewicz와 van Der Meulen (1981)은 Vasicek의 엔트로피 추정량을 이용하여 적합도검정의 귀무가설에서, $n\to\infty$, $m\to\infty$이고 $m/n\to 0$이면 HV_{mn}이 0에 확률 수렴함을 보였다. 절대 연속함수 $f(x)$의 구간 $[0,1]$을 가지는 대립함수에서는, $n\to\infty$, $m\to\infty$이고 $m/n\to 0$이면 HV_{mn}이 음의 실수 (유한실수 혹은 $-\infty$)에 확률적 수렴함을 보였다. 또한 $[0,1]$ 구간에 속하는 모든 f에 대하여 $HV_{mn}\le 0$임을 보였다.

또한 Vasicek(1976)은 HV_{mn}의 점근적 성질을 아래와 같이 밝혔다.

정리 2.1 확률변수 X가 분포함수 F와 확률밀도함수 f를 가지고 $Var(X) < \infty$라 하자. $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 F로부터 추출된 확률표본일 때, $n\to\infty$, $m\to\infty$일 때, $m/n\to 0$이면,

$$HV_{mn} \xrightarrow{p} H(f) .$$

다음은 Vasicek의 엔트로피 추정량 HV_{mn}의 점근적 성질을 조사한다. 실제로 HV_{mn}는 중심극한의 정리를 따르는 극한분포를 가진다. $U_1, U_2, \cdots, U_n$이 균등분포(0,1)를 따르는 *i.i.d.* 확률변수라고 하고, U^*를 다음과 같이 두자.

$$\begin{aligned} U^*_{(i)} &= 0, && \text{if } i=0 \\ &= U_{(i)}, && \text{if } 1\le i\le n \\ &= 1, && \text{if } i=n+1. \end{aligned}$$

다음의 준비정리는 중심극한의 정리를 이용하기 위한 절차이다.

준비정리2.1 $n\to\infty$, $m\to\infty$일 때 $m/\ln n\to\infty$라고 가정할 때,

$$\max{}^*|((n+1)(U^*_{(j)}-U^*_{(i)})/(j-i))-1|\to 0 \quad a.s., \tag{2.2}$$

여기서, 상수 k에 대하여 $\max{}^*$는 $0\le i < j\le n+1$과 $j-i\ge km$이 되는 모든 (i,j)에 대하여 구해진다.

위의 준비정리2.1을 이용하여 HV_{mn}를 다음과 같이 두자.

$$HV_{mn}(U) = \frac{1}{n}\sum_{i=m+1}^{n-m}\ln\left\{\frac{n}{2m}\left(U_{(i+m)} - U_{(i-m)}\right)\right\} . \tag{2.3}$$

그러면 HV_{mn}에 대한 중심극한의 정리에 의한 점근적 성질이 다음과 같이 구해진다.

정리2.2 $n\to\infty$, $m\to\infty$에 대하여,, $\lim_{n\to\infty} m^3/n = 0$일 때,

$$(6mn)^{1/2}(-HV_{mn}(U)-k_{mn}) \xrightarrow{L} N(0,1). \tag{2.4}$$

여기서 $k_{mm}=(1-2m/n)(\ln(2m)+\gamma-R_{2m-1})$, $R_m=\sum_{i=1}^{m} 1/i$,
$\gamma=\lim_{n\to\infty}(R_n-\ln(n))$이다.

(증명) $DV(m,n)$을 다음과 같이 두자.

$$DV(m,n) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-m+1}\ln(U^*_{(i+m)}-U^*_{(i-m)}). \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}-DV(2m,n) &= -HV_{mm}(U)+(1-2m/n)(\ln(n)-\ln(2m))\\ &\quad -n^{-1}(\ln(U_{(2m)})+\ln(1-U_{(n-2m+1)}))\end{aligned} \tag{2.6}$$

에 대하여 $n\to\infty$, $m\to\infty$에 대하여, $\lim_{n\to\infty} m^3/n=0$일 때,

$$(6mn)^{1/2}(-DV(2m,n)-(1-2m/n)(\ln(n+1)+\gamma-R_{2m-1}))\xrightarrow{L} N(0,1) \tag{2.7}$$

이 성립한다. 그러므로

$$(3mn)^{1/2}(-DV(m,n)-((n+2-m)/n)(\ln(n+1)+\gamma-R_{m-1})) \xrightarrow{L} N(0,1).$$

준비정리2.1에 의해, $\frac{nU_{(2m)}}{2m}\to 1$ $a.s.$, $\frac{n(1-U_{(n-2m+1)})}{2m}\to 1$ $a.s.$ 이고,

$$(m/n)^{1/2}\,|\ln(U_{(2m)})+\ln(1-U_{(n-2m+1)})| \to 0 \quad a.s. \tag{2.8}$$

(2.6) -(2.8)로 부터 (2.4)가 구해진다.

Vasicek의 엔트로피 추정량을 단조변환 시킴으로서 가설에 대한 균등분포 검정의 추정량을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$KV_{mn}=\exp(-HV_{mn})=\frac{n}{2m}\left\{\prod_{i=1}^{n}(X_{(i+m)}-X_{(i-m)})\right\}^{\frac{1}{n}} \tag{2.9}$$

검정통계량 KV_{mn}은 가설검정의 일치성을 가지는 통계량으로 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

정리2.3 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 이 독립인 연속확률변수로서 $(0,+\infty)$ 구간의 확률밀도함수 $f(x)$를 가진다고 하자. 유의수준 α에 대하여, $n\to\infty$, $m\to\infty$이고 $m/n\to 0$이면, 적합도검정에 대한 검정통계량 KV_{mn}는 (2.1)의 가설검정에 대한 일치성(consistency)를 가진다.

(증명) 일양분포의 모수의 성질을 이용하여 Grzegorzewski와 Wieczorkowski(1999)의 정리와 Kim과 Lee(1998)의 정리의 증명결과를 따른다.

위의 정리2.3은 균등분포에 대한 검정을 위해, 검정통계량 KV_{mn}는 안정되고 일치

성을 가지는 통계량임을 의미한다. 이러한 결과는 <표 3.1>의 모의실험에서 나타난다.

van Es와 Correa의 엔트로피 추정량들은 Vasicek의 추정량 HV_{mn}의 특성을 개선한 것으로 Vasicek의 추정량의 성질을 그대로 지니고 있다. 그러나 van Es와 Correa의 엔트로피 추정량들을 단조변환 시킨 검정통계량들

$$KE_{mn} = \exp(-HE_{mn}), \tag{2.10}$$

$$KC_{mn} = \exp(-HC_{mn}). \tag{2.11}$$

은 점근적 일치성을 가지지 못하는 것으로 모의실험 결과 나타났다. 여기에 대한 연구는 앞으로 개선되어져야 한다.

3. 기각영역과 모의실험

다음의 <표 3.1>은 유의수준 $\alpha=0.1,\ 0.05,\ 0.025,\ 0.01$에 대하여 검정통계량 KV_{mn}에 대한 기각영역을 구한 것이다. 표본의 크기 n에 관련되는 윈도우 크기 $m < \frac{n}{2}$에서 정규분포 난수를 20,000번 반복횟수로 기각값들 중 가장 큰 기각값을 가지는 m을 구하였다. 이것이 <표 3.1>에 있는 m 값이고, 유의수준 α와 표본의 크기 n에 대하여 $KV^{*}_{mn}(\alpha)$값이 <표 3.1>에 나타나 있다.

엔트로피 추정량의 값들이 적을수록 귀무가설을 기각할 확률이 높아지고 이에 반해 2절에서 제시한 검정통계량들, KV_{mn}, KE_{mn}, KC_{mn},은 값이 클수록 귀무가설을 기각시킬 확률이 높아짐을 알 수 있다. $KV^{*}_{mn}(\alpha), KE^{*}_{mn}(\alpha)$, $KC^{*}_{mn}(\alpha)$를 주어진 m과 n에 대하여 유의수준 α에서 기각값들로 정의하자.

귀무가설

$$H_0 : F(x) = F_0(x;\theta) \tag{3.1}$$

에 대하여, 유의수준 α를 가지는 가설에 대한 기각영역은 다음과 같다.

기각값 $KT^{*}_{mn}(\alpha)$에 대하여,

$$\text{만약 } KT_{mn} < KT^{*}_{mn}(\alpha) \text{ 이면, } H_0\text{을 기각한다.} \tag{3.2}$$

엔트로피에 기초한통계량들, KV_{mn}과 KE_{mn}과 KC_{mn} ,에 대하여 기존의 경험적 분포함수에 기초한 검정통계량들, Kolmogorov-Smirnov (D), Kuiper (V), Cramer-von Mises (W^2), Watson (U^2), Anderson-Darling (A^2) Moran (M)의 검정력을 모의실험을 이용하여 비교분석 할 것이다.

검정력에 대한 비교를 위하여 대립가설의 분포로 베타분포를 이용하였다. $a=b=1.0$인 경우는 베타분포가 균등분포가 되어지고, 모수 a나 b의 값이 1에서 멀어짐에 따라 균등분포에서 벗어남을 알 수 있다.

<표 3.1> KV_{mn}검정통계량의 일양분포의 검정을 위한 유의순준별기각값

sample size	window size	critical values	window size	critical values	window size	critical values	window size	critical values
n	m	0.1	m	0.05	m	0.025	m	0.01
5	2	0.35541	2	0.29555	2	0.24776	2	0.19003
6	2	0.41141	2	0.35390	2	0.30575	2	0.24458
7	2	0.45569	2	0.40113	2	0.35356	2	0.29385
8	3	0.49259	3	0.44088	3	0.39452	3	0.33845
9	3	0.52654	3	0.47853	3	0.43598	3	0.37832
10	3	0.55625	3	0.50951	3	0.46703	3	0.41294
11	3	0.57913	3	0.53449	3	0.49451	3	0.44115
12	3	0.60027	3	0.55690	3	0.51738	3	0.46734
13	3	0.61789	3	0.57651	3	0.53942	3	0.48833
14	3	0.63498	3	0.59590	3	0.55932	3	0.51279
15	3	0.64866	4	0.61133	4	0.57695	4	0.52963
16	4	0.66251	4	0.62606	4	0.59288	4	0.54865
17	4	0.67612	4	0.64073	4	0.60862	4	0.56624
18	4	0.68601	4	0.65316	4	0.62269	4	0.58178
19	4	0.69733	4	0.66472	4	0.63460	4	0.59082
20	4	0.70726	4	0.67512	4	0.64723	4	0.60671
25	4	0.74528	4	0.71808	4	0.69270	4	0.65897
30	5	0.77352	5	0.74982	5	0.72737	5	0.69646
35	5	0.79521	5	0.77342	5	0.75299	5	0.72553
40	8	0.81388	8	0.79322	8	0.77387	8	0.74765
45	8	0.83039	8	0.81194	8	0.79502	8	0.77057
50	8	0.84388	8	0.82609	8	0.81069	8	0.78902
60	8	0.86433	8	0.84884	8	0.83523	8	0.81566
70	8	0.87007	8	0.85693	8	0.84501	8	0.82830
80	8	0.88130	8	0.86880	8	0.85762	8	0.84259
90	8	0.88990	8	0.87889	8	0.86913	8	0.85527
100	9	0.89781	9	0.88738	9	0.87836	9	0.86590
120	9	0.90936	9	0.90044	9	0.89236	9	0.88108
140	11	0.91886	11	0.91091	11	0.90359	11	0.89354
160	11	0.92527	11	0.91804	11	0.91157	11	0.90228
180	11	0.93068	11	0.92397	11	0.91793	11	0.90944
200	12	0.93555	12	0.92937	12	0.92359	12	0.91591
220	14	0.94019	14	0.93412	14	0.92866	14	0.92183

<표 3.2> 베타분포모형의 경우 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 검정력 비교

n		TV	TE	TC	D	V	W^2	U^2	A^2	M
5	0.5	.03160	.04070	.06520	.10850	.12350	.11600	.12480	.24550	.11810
	1.0	.04730	.05040	.08670	.05010	.04960	.04910	.04780	.04790	.04770
	1.5	.08500	.07750	.13110	.03260	.06480	.02640	.06640	.01740	.02390
	2.0	.14120	.12370	.19840	.02540	.10510	.01480	.10600	.00610	.01130
	2.5	.18780	.16350	.25130	.01660	.14380	.00910	.14760	.00210	.00520
	3.0	.24830	.21420	.30900	.01770	.19190	.00780	.20130	.00180	.00370
	3.5	.29550	.25060	.35880	.01200	.23040	.00490	.24100	.00060	.00260
	4.0	.35890	.29710	.42030	.01390	.28200	.00500	.29650	.00050	.00220
10	0.5	.02550	.02630	.02000	.14000	.21930	.13200	.22440	.30790	.12890
	1.0	.05190	.05210	.05290	.04920	.04980	.05110	.05170	.04940	.04990
	1.5	.14660	.13670	.15080	.03640	.09540	.03010	.09940	.01860	.02640
	2.0	.27720	.25610	.28820	.03380	.18320	.02350	.19730	.01160	.01860
	2.5	.44270	.38660	.45620	.03930	.28830	.02520	.31580	.01070	.02010
	3.0	.57060	.51240	.58150	.04340	.40190	.02510	.44300	.00910	.02130
	3.5	.68410	.61170	.69930	.05060	.50700	.02910	.55280	.00950	.02650
	4.0	.78690	.71410	.79740	.05770	.61790	.03310	.66100	.01080	.03340
20	0.5	.07540	.02420	.11360	.19150	.39330	.18710	.41750	.46700	.18120
	1.0	.05060	.05080	.05180	.05020	.05250	.04990	.05150	.05110	.04900
	1.5	.22940	.24520	.20630	.04840	.15020	.04180	.15990	.03110	.03940
	2.0	.51200	.53290	.47000	.06900	.35700	.05640	.39150	.04630	.05120
	2.5	.75490	.76740	.70760	.10850	.57690	.09050	.62960	.08590	.09340
	3.0	.89950	.90350	.86560	.15990	.77110	.15880	.82330	.16430	.17490
	3.5	.96640	.96450	.94350	.20870	.88570	.23780	.92040	.26020	.26760
	4.0	.98920	.98830	.98000	.28590	.94570	.34400	.96610	.38690	.39300
30	0.5	.24940	.05470	.32340	.25330	.54880	.25080	.58530	.60960	.24800
	1.0	.04640	.04630	.11840	.05080	.04850	.05130	.04760	.05040	.05160
	1.5	.28370	.32400	.47760	.05580	.19820	.04620	.21530	.04080	.04250
	2.0	.65500	.69630	.82650	.10610	.50920	.09060	.56610	.10710	.09490
	2.5	.89570	.92180	.96960	.19280	.79630	.20580	.85270	.27340	.23290
	3.0	.97610	.98150	.99390	.31560	.93130	.38390	.95730	.50330	.43140
	3.5	.99650	.99740	.99970	.45210	.98210	.57700	.99330	.71020	.63240
	4.0	.99940	.99980	1.00000	.59040	.99710	.74620	.99940	.85460	.79050
40	0.5	.37030	.06660	.39850	.33150	.68120	.33320	.70870	.72980	.33670
	1.0	.05100	.04820	.04940	.05490	.05090	.05540	.05060	.05460	.05540
	1.5	.36460	.43460	.33330	.07500	.25800	.05820	.28370	.06020	.05660
	2.0	.80910	.85440	.77030	.16220	.66550	.15660	.71870	.22190	.17430
	2.5	.96910	.98160	.95340	.32340	.90980	.38380	.94230	.52170	.43270
	3.0	.99750	.99880	.99580	.52540	.98710	.65610	.99350	.80780	.70740
	3.5	1.00000	.99980	.99960	.69980	.99810	.85080	.99900	.94290	.88200
	4.0	1.00000	.99990	.99990	.83960	.99950	.94710	.99970	.98590	.96080
50	0.5	.55160	.12620	.55860	.40530	.79020	.42230	.81680	.82950	.43510
	1.0	.04620	.04610	.04400	.04770	.05090	.04730	.05070	.04660	.04790
	1.5	.41880	.50120	.38170	.08580	.32220	.06690	.34880	.08240	.06610
	2.0	.87440	.91230	.84440	.22160	.78020	.23810	.82850	.36280	.26850
	2.5	.99090	.99480	.98300	.46500	.97030	.57860	.98450	.76340	.62720
	3.0	.99930	.99990	.99880	.71110	.99770	.84710	.99880	.95150	.87660
	3.5	1.00000	1.00000	1.00000	.87820	1.00000	.96470	1.00000	.99430	.97420
	4.0	1.00000	1.00000	1.00000	.96090	1.00000	.99400	1.00000	.99960	.99610

(예시) 베타분포모형,

$$f(x) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \quad a > 0, \ b > 0, \ 0 < x < 1, \tag{3.3}$$

대하여 $a = b = 0.5, 1.0, \cdots, 4.0$인 경우. 각각의 대립분포들의 모형들에 대하여 표본의 크기 n은 5, 10, 20, 30, 40, 50을 정하였고 모의실험의 반복횟수는 10,000번을 하였다.

<표 3.2>에서는 (예시)의 베타분포에 대한 검정력을 비교하였다. $a = b = .5$인 경우는 베타분포의 모양이 U의 형태로 일반적인 밀도함수의 형태가 아니다. 이 경우에 있어서는 엔트로피의 추정에 의한 검정통계량들 보다 경험적분포에 기초한 검정통계량들의 검정력이 우수함을 알 수 있다.

$a = b = 1.0$인 경우는 베타분포가 균등분포로서 검정력의 값이 유의수준 $\alpha = 0.05$와 일치하는 것을 조사할 수 있다. 대체로 모든 경우에서 만족함을 알 수 있다.

$a = b$의 값이 1.0보다 큰 경우는 확률밀도함수의 값이 일반적인 경우로서 엔트로피에 의한 추정량에 기초한 검정통계량의 값이 경험적 분포에 기초한 검정통계량들의 값들 보다 매우 큰 검정력값을 가짐을 알 수 있다.

결론적으로 엔트로피 추정량에 기초한 검정 통계량들은 비록 단조 증가 함수나 U자 모양을 가지는 모형에 있어서의 검정력의 값들이 경험적 분포에 의한 검정통계량의 검정력 보다 다소 낮지만 일반적인 단일 모드(mode)를 가지는 분포에 있어서는 매우 좋은 검정력을 가짐을 알 수 있다.

참고문헌

1. 김종태, 이우동 (1998) 쿨백-레이블러 정보함수에 기초한 와이블분포와 극단값 분포에 대한 적합도 검정, 응용통계연구, 제11권 2호, 351-362
2. Ahmad, I.A. and Lin, P.E. (1976). "A Nonparametric estimation of the entropy for absolutely continuous distribution." *IEEE Trans. Inf. Theory,* 22 372-375.
3. Correa, J.C. (1995). "A new estimator of entropy." *Commun. Statist.-Theory Meth.*, 24, 2439-2449.
4. Dmitriev, Y.G. and Tarasenko, F.P. (1973). "On the estimation of functional of the probability density and its derivatives." *Theory Probab. Applic.,* 18, 628-633.
5. Dudewicz, E.J. and van Der Meulen, E.C. (1981). "Entropy-based tests of uniformity." *Journal of American Statistical Association,* 76, 967-974
6. Grezegorzewski, P. and Wieczorkowski, R. (1999). "Entropy-based goodness-of-fit test for exponentiality," *Commun Statist. -Theory Meth,*

28, 1183-1202.

7. Mack, S. (1988). "A comparative study of entropy estimator and entropy based goodness-of-fit tests." *PhD Dissertation. University of California.*`
8. Vasicek, O. (1976). "A test for normality based on sample entropy." *J. R. Statist. Soc. B,* 38, 54-59.
9. van Es, B. (1992). "Estimating functional related to a density by a class of statistics based on spacing." *Scandinavian Journal of Statisitcs,* 19, 61-72.

[2003년 12월 접수, 2004년 2월 채택]