Journal of Korean
Data & Information Science Society
2004, Vol. 15, No. 1 pp. 59～74

Developing Noninformative Priors for the Common Mean of Several Normal Populations[1)]

Yeong-Hwa Kim[2)] · Eun Seon Sohn[3)]

Abstract

The paper considers the Bayesian interval estimation for the common mean of several normal populations. A Bayesian procedure is proposed based on the idea of matching asymptotically the coverage probabilities of Bayesian credible intervals with their frequentist counterparts. Several frequentist procedures based on pivots and P-values are introduced and compared with Bayesian procedure through simulation study. Both simulation results demonstrate that the Bayesian procedure performs as well or better than any available frequentist procedure even from a frequentist perspective.

Keywords : Coverage probability, Fisher's method, inverse normal method, Jeffreys'prior, logit method, matching priors, reference priors

1. 서론

통계적 추론에서 가장 오래되고 관심 있는 문제 중 한 가지는 서로 같지 않은 미지의 분산을 갖고 있는 여러 정규모집단들의 공통평균(common mean)에 대한 추정이다. 이 문제는 서로 상관관계가 존재하지 않는 확률블럭효과와 모수처리효과에 대한 균형 불완비 블럭계획에서 발생한다. 이는 처리 대비들의 벡터 τ가 두개의 추정값 블럭내 추정값 $\hat{\tau}$ 과 블록간 추정값 $\tilde{\tau}$ 을 가지기 때문이다. 블럭효과와 오차항이 정규성과 독립성을 만족하는 대개의 경우 $\hat{\tau}$ 와 $\tilde{\tau}$ 이 서로 독립이며, 공통평균 τ와 미지의 서로 다른 분산을 갖는 정규분포를 따른다. 그러므로 이 문제는 $\hat{\tau}$ 와 $\tilde{\tau}$ 에 근거하는 τ 에 대한 적당한 추론을 이끌어내는 것이다.

---

1) This research was supported by the Chung-Ang University research grants in 2003.
2) First Author : Assistant Professor, Department of Statistics, Chung-Ang University, Seoul, Korea. E-mail : gogators@cau.ac.kr
3) Graduate Student, Department of Statistics, Chung-Ang University, Seoul, Korea.

k개의 서로 독립인 정규모집단에서 i 번째 모집단의 분포는 $N(\mu, \sigma_i^2)$ 이라고 가정하자. μ 는 실수이고 σ_i^2 은 양수이며, $i=1,\cdots,k$ 이다. 그리고 X_{ij}는 i 번째 모집단의 분포로부터 독립적으로 측정한 j 번째 관측값이며, $j=1,\cdots,n_i$, $i=1,\cdots,k$ 이다. 표본평균과 표본분산을 각각 다음과 같이 정의하자.

$$\overline{X}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \quad , \quad S_i^2 = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2 \quad , \quad i=1,\cdots,k$$

이러한 상황에서 공통평균, μ 에 대한 추정은 전통적인 통계적 관점뿐만 아니라 의사결정론적인 관점에서 많은 관심을 받아왔다.

각 모집단의 분산 $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_k^2)$을 정확하게 알고 있는 경우 μ 의 최대우도추정량(MLE)는 다음과 같이 얻어진다.

$$\hat{\mu}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_k^2) = \left[\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{\sigma_i^2}\overline{X}_i\right]\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{\sigma_i^2}\right]^{-1} \tag{1.1}$$

위의 추정량은 또한 μ 의 유일 최소분산 불편추정량(UMVUE)이기도하다. 그리고 각 모집단의 분산 $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_k^2)$ 을 정확하게 알지 못한다면 공통평균 μ의 추정은 통계적으로 매우 중요한 문제가 된다. 이 때 공통평균 μ 를 추정하는 방법 가운데 한 가지는 다음의 방정식의 해를 구해봄으로써 $\mu, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_k^2$ 의 최대우도추정량들을 찾아내도록 시도해보는 것이다.

$$\hat{\mu}\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{\hat{\sigma}_i^2} = \sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{\hat{\sigma}_i^2}\overline{X}_i \quad , \quad \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\hat{\mu})^2 \quad , \quad i=1,\cdots,k$$

그러나 이러한 경우에 μ 의 최대우도추정량은 명확한 수식으로 구해지지 않는다. 여러 정규모집단의 공통평균 μ 의 추정에 관한 연구가 활발하게 이루어졌음에도 불구하고 그것들은 점추정에만 주로 편중되어 이루어져왔으며 구간추정에 대해서는 상대적으로 많은 관심이 기울어지지 않았다. 공통평균의 구간추정에 대한 연구 가운데 근사신뢰구간에 대한 것으로는 Meier(1953), Brown & Cohen(1974), Eberhardt, Reeve & Sackrowits(1974)와 Sinha(1985)에서 찾아볼 수 있다. 또한 좀 더 정확한 구간은 Fairweather(1972), Cohen & Sackrowitz(1974) 와 Jordan & Krishnamoorthy(1996)에 의해 제안되었다. 최근 들어서는 Sinha (1998)와 Yu, Sun & Sinha(1999) 에서 신뢰계수가 동일할 때 그들이 제시한 구간과 이전에 제시되었던 구간들간의 구간길이를 비교연구 하였다. Yu, Sun & Sinha(1999)에서 다루어진 예를 통해 보면 Frequentist 방법론 중 어떤 것도 뚜렷하게 좋은 방법이라 할 수 있는 것은 없음을 알 수 있다.

이에 본 연구에서는 위의 Frequentist방법에 대한 대안으로 베이지안(Baysian)의 관점에서 접근하여 최근 많이 사용되고 있는 무정보적 사전분포(noninformative priors)를 통한 공통평균 μ 의 구간추정을 제시하고자한다. 즉, 무정보적 사전분포들을 구하고 이에 근거한 사후분포(posterior)를 유도한 후, 모의실험을 통해 사후분포의 Frequentist 포함 확률(coverage probability)을 계산하여 사전분포의 수렴정도를 비교

하였으며, 또한 기존의 Frequentist 의 신뢰구간과 베이지안 신뢰구간을 비교하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2장에는 무정보적 사전분포를 유도하고 이에 근거하여 사후분포를 구하였다. 소 표본에 대한 모의실험은 3장에서 시행되며, 이 장에서 작은 표본크기에 대해서 second order probability matching prior가 reference prior보다 Frequentist 포함확률에 더 가까이 근사한다는 것을 보여준다. 4장에서는 Frequentist의 견해로부터 제안되어온 공통평균에 대한 여러 가지 신뢰구간에 대해 설명하고 모의실험을 통해 베이지안 신뢰구간과 Frequentist 신뢰구간과의 비교를 시행하였다.

2. 무정보적 사전분포와 사후분포

미지의 공통평균 μ 와 각각의 서로 다른 미지의 분산 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \cdots, \sigma_k^2$ 를 갖는 $k(\geq 2)$개의 서로 독립인 정규모집단이 존재한다고 가정하자. X_{ij} 는 $N(\mu, \sigma_i^2)$ 를 따르는 i 번째 모집단의 분포로부터 독립적으로 반복하여 측정된 j 번째 관측값이며, $j=1, \cdots, n_i$ $(n_i > 2)$ 이고, $i=1, \cdots, k$ 이다. 따라서 로그 우도함수와 Fisher 정보행렬은 다음과 같다.

$$logL \propto \sum_{i=1}^{k} n_i log\sigma_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sigma_i^{-2}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\mu)^2 \quad ,$$

$$I(\mu, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k) = Diagonal(\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i^{-2}, 2n_1\sigma_1^{-2}, \cdots, 2n_k\sigma_k^{-2})$$

2.1 Jeffreys′ Prior

Jeffreys′ Prior (π_J)는 Fisher 정보행렬 $\boldsymbol{I}$의 행렬식의 제곱근에 비례한다. Fisher 정보행렬 $\boldsymbol{I}$ 의 행렬식과 Jeffreys′ Prior (π_J)는 다음과 같다(Jeffreys, 1961).

$$det(\boldsymbol{I}) = 2^k \prod_{i=1}^{k} n_i \sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{\sigma_i^2} \; / \prod_{i=1}^{k}\sigma_i^2$$

$$\pi_J(\mu, \sigma_1, \cdots, \sigma_k) \propto \prod_{i=1}^{k}\sigma_i^{-1}\left[\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i^{-2}\right]^{1/2} = \left[\prod_{i=1}^{k}\sigma_i^{-2}\right]\left[\sum_{i=1}^{k}\left\{n_i\prod_{j\neq i}^{n_i}\sigma_j^2\right\}\right]^{1/2} \qquad (2.1)$$

2.2 Reference Priors

μ 가 관심모수이고 그 외의 모수가 모두 비관심모수(nuisance parameter)인 경우, 모수공간이 $\{\mu\}$, $\{\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k\}$ 로 나눠지며, two-group reference prior는 다음과 같이 얻어진다. 모수공간을 두 그룹 $\theta_{(1)} = \mu$, $\theta_{(2)} = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k)$ 으로 나누면, $\theta = (\theta_{(1)}, \theta_{(2)})$에 대한 Fisher 정보행렬은

$$I(\theta) = Block\ Diagonal(h_1(\theta), h_2(\theta)) \ ,$$

여기서 $h_1(\theta) = \sum_{i=1}^{k} n_i \sigma_i^{-2}$ 이고, $h_2(\theta) = Diagonal(2n_1\sigma_1^{-2}, \cdots, 2n_k\sigma_k^{-2})$이다. 즉, Fisher 정보행렬은 $I(\theta) \equiv I(\mu, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k) = Diagonal(\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i^{-2}, 2n_1\sigma_1^{-2}, \cdots, 2n_k\sigma_k^{-2})$ 이다. 따라서Datta & Ghosh(1995)의 Theorem 1을 이용하면 two-group reference prior (π_{2R})는 다음과 같이 구하여지며

$$\pi_{2R}(\mu, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k) \propto \prod_{i=1}^{2} h_{j1}^{1/2}(\theta_{(j)}) = \prod_{i=1}^{k} \sigma_i^{-1} \tag{2.2}$$

이는 $\{\mu\}, \{\sigma_1\}, \{\sigma_2\}, \cdots, \{\sigma_k\}$ 에 대한 one-at-a time reference prior (π_R) 와 동일하게 됨을 알 수 있다.

2.3 Probability Matching Priors

Tibshirani(1989)에 의하여 직교성을 만족하는 μ와 $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k)$ 의 first order probability matching prior의 군(class)은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\pi_F(\mu, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k) \propto (\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i^{-2})^{1/2} g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k) \tag{2.3}$$

여기서 g 는 미분가능한 임의의 양의 함수이다.

<u>Remark1</u> Jeffreys′ prior와 two-group reference prior, one-at-a-time reference prior는 모두 first order probability matching prior 이다.

또한 (2.3)을 만족하는 사전분포는 무수히 많이 존재하는 것을 알 수 있으며, 이들 가운데 Mukerjee & Ghosh(1997)에 따라 다음과 같은 second order probability matching prior를 구할 수 있다.

$$\pi_S(\mu, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k) \propto (\prod_{i=1}^{k} \sigma_i)(\sum_{i=1}^{k} n_i\sigma_i^{-2}) \tag{2.4}$$

<u>Remark2</u> Jeffreys′ prior와 two-group reference prior, one-at-a-time reference prior는 모두 second order probability matching prior 가 아니다.

2.4 사후분포의 적합성(propriety)

사전분포 π_R 과 π_S 에 근거하여 사후분포를 유도하고 사후분포의 적합성(propriety)을 증명하여 보면 다음과 같다.

먼저, π_R 에 근거하는 $\mu, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ 의 결합 사후분포는

$$\begin{aligned}&\pi_R(\mu, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k \mid X)\\&\propto \left(\prod_{j=1}^{k} \sigma_i^{-n_j+1}\right) exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\sigma_j^2\{n_j(\mu-\overline{X}_j)^2+(n_j-1)S_j^2\}\right]\end{aligned} \tag{2.5}$$

이며, (2.5)를 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ 에 대하여 적분하여 얻어지는 μ 의 사후분포는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\pi_R(\mu \mid X) &\propto \prod_{j=1}^{k}[n_j(\mu-\overline{X}_j)^2+(n_j-1)S_j^2]^{-\frac{1}{2}n_j}\\&\propto \prod_{j=1}^{k}\left[1+\frac{n_j(\mu-\overline{X}_j)^2}{(n_j-1)S_j^2}\right]^{-\frac{1}{2}n_j}\end{aligned} \tag{2.6}$$

따라서 (2.6)은 μ에는 의존하지 않고 $(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \cdots, \overline{X}_k, S_1^2, S_2^2, \cdots, S_k^2)$에 의존하는 임의의 양수 C를 고려하면 다음과 같이 표현할 수 있으며,

$$\pi_R(\mu \mid X) \;\le\; C\left[1+\frac{n_1(\mu-\overline{X}_1)^2}{(n_1-1)S_1^2}\right]^{-\frac{1}{2}n_1} \tag{2.7}$$

$\int_{-\infty}^{\infty}\pi_R(\mu|X)d\mu$ 의 유한성은 (2.7)의 우변이 t-분포의 pdf의 상수배이므로 증명된다.

다음으로 π_S 에 근거하는 사전분포로 하는 $\mu, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ 의 결합 사후분포는

$$\begin{aligned}&\pi_S(\mu, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k \mid X)\\&\propto exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{k}\sigma_m^{-2}\{n_m(\mu-\overline{X}_m)^2+(n_m-1)S_m^2\}\right]\prod_{j=1}^{k}\sigma_j^{-(n_j-1)}\left(\sum_{j=1}^{k}n_j\sigma_j^{-2}\right)\\&\propto exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{k}\sigma_m^{-2}\{n_m(\mu-\overline{X}_m)^2+(n_m-1)S_m^2\}\right]\left\{\sum_{j=1}^{k}n_j\sigma_j^{-(n_j+1)}\right\}\prod_{i\neq j}^{k}\sigma_i^{-(n_i-1)}\end{aligned} \tag{2.8}$$

이며, (2.8)을 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ 에 대하여 적분하여 얻어지는 μ 의 사후분포는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\pi_S\ (\mu \mid X) \\
&\quad \propto \sum_{j=1}^{k} n_j \{ n_j (\mu - \overline{X}_j)^2 + (n_j - 1) S_j^2 \}^{-\frac{1}{2} n_j} \prod_{i \neq j}^{k} \{ n_i (\mu - \overline{X}_i)^2 + (n_i - 1) S_i^2 \}^{-\frac{1}{2}(n_i - 2)} \\
&\quad = \sum_{j=1}^{k} n_j \{ (n_j - 1) S_j^2 \}^{-\frac{1}{2} n_j} \prod_{i \neq j}^{k} \{ (n_i - 1) S_i^2 \}^{-\frac{1}{2}(n_i - 2)} \\
&\qquad \times \left[1 + \frac{n_j (\mu - \overline{X}_j)^2}{(n_j - 1) S_j^2} \right]^{-\frac{1}{2} n_j} \prod_{i \neq j}^{k} \left[1 + \frac{n_i (\mu - \overline{X}_i)^2}{(n_i - 1) S_i^2} \right]^{-\frac{1}{2}(n_i - 2)}
\end{aligned}$$

(2.9)

따라서 (2.9)는 (2.7)에서와 유사한 임의의 양수 C_*를 고려하면 다음과 같이 표현할 수 있으며,

$$\begin{aligned}
\pi_S\ (\mu \mid X) \le\ & C_* \sum_{j=1}^{k} n_j \{ (n_j - 1) S_j^2 \}^{-\frac{1}{2} n_j} \\
& \times \prod_{i \neq j}^{k} \{ (n_i - 1) S_i^2 \}^{-\frac{1}{2}(n_i - 2)} [1 + \frac{n_j (\mu - \overline{X}_j)^2}{(n_j - 1) S_j^2}]^{-\frac{1}{2} n_j}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \pi_S\ (\mu \mid X) d\mu$ 의 유한성은 (2.10)에서 t-분포의 적분값의 유한성에 의해 성립함을 알 수 있다.

3. 모의실험

이 모의실험은 π_R과 π_S를 비교하기위하여 Frequentist의 포함확률(coverage probability) $P[\mu \le \mu^{1-\alpha}(\pi_R, X) \mid \mu, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4]$ 과 $P[\mu \le \mu^{1-\alpha}(\pi_S, X) \mid \mu, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4]$ 을 계산하는 것이다.

사전분포 π_R 과 π_S에 근거한 사후분포의 누적확률값을 각각 $F^{\pi_R}(z) = P^{\pi_R}(\mu \le z \mid X)$, $F^{\pi_S}(z) = P^{\pi_S}(\mu \le z \mid X)$ 이라 하면, μ 의 사후분포의 $100(1-\alpha)$번째 분위수 $\mu^{1-\alpha}(\pi, X)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$F^{\pi R}(\mu^{1-\alpha}(\pi_R, X)) = 1 - \alpha = F^{\pi S}(\mu^{1-\alpha}(\pi_S, X))$$

$P[\mu \le \mu^{1-\alpha}(\pi_R, X) \mid \mu, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4]$ 과

$P[\mu \le \mu^{1-\alpha}(\pi_S, X) \mid \mu, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4]$이 표본크기가 작을 때에도 $1-\alpha$ 에 가까운 값을 갖는다면 사전분포 π_R 과 π_S 을 사용하는 것이 타당하다고 할 수 있는 근거가 된다.

n_1	n_2	n_3	n_4	σ_1^2	σ_2^2	σ_3^2	σ_4^2	π	$1-\alpha$			
									0.025	0.05	0.95	0.975
30	25	20	15	1	2	4	8	π_R	0.027	0.055	0.946	0.973
								π_S	0.026	0.049	0.952	0.977
30	25	20	15	8	1	2	4	π_R	0.027	0.051	0.949	0.973
								π_S	0.025	0.050	0.950	0.974
20	15	12	10	1	2	4	8	π_R	0.026	0.049	0.952	0.977
								π_S	0.027	0.052	0.954	0.977
20	15	12	10	8	1	2	4	π_R	0.024	0.051	0.951	0.976
								π_S	0.025	0.050	0.950	0.974
10	8	7	5	1	2	4	8	π_R	0.029	0.058	0.955	0.981
								π_S	0.026	0.048	0.951	0.977
10	8	7	5	8	1	2	4	π_R	0.029	0.058	0.947	0.960
								π_S	0.023	0.049	0.952	0.974
5	4	3	2	1	2	4	8	π_R	0.031	0.060	0.958	0.981
								π_S	0.029	0.056	0.955	0.978
5	4	3	2	8	1	2	4	π_R	0.029	0.042	0.944	0.964
								π_S	0.023	0.047	0.952	0.972
30	25	20	15	1	4	8	16	π_R	0.029	0.058	0.946	0.981
								π_S	0.026	0.048	0.952	0.977
30	25	20	15	16	1	4	8	π_R	0.027	0.058	0.955	0.960
								π_S	0.025	0.049	0.951	0.974
20	15	12	10	1	4	8	16	π_R	0.026	0.055	0.949	0.973
								π_S	0.026	0.049	0.950	0.977
20	15	12	10	16	1	4	8	π_R	0.027	0.051	0.945	0.971
								π_S	0.023	0.050	0.952	0.973
10	8	7	5	1	4	8	16	π_R	0.029	0.045	0.954	0.970
								π_S	0.022	0.047	0.951	0.971
10	8	7	5	16	1	4	8	π_R	0.029	0.045	0.952	0.961
								π_S	0.023	0.050	0.952	0.974
5	4	3	2	1	4	8	16	π_R	0.029	0.044	0.940	0.966
								π_S	0.026	0.047	0.953	0.972
5	4	3	2	16	1	4	8	π_R	0.029	0.058	0.957	0.965
								π_S	0.023	0.049	0.952	0.974

[표 3.1] $\mu = 0$ 일 때, 사후분위수를 이용한 Frequentist 포함확률

모의실험에서는 MATLAB 6.5 를 사용하여 각각 크기가 n_1, n_2, n_3, n_4 인 표본을 $N(\mu,\sigma_1^2)$, $N(\mu,\sigma_2^2)$, $N(\mu,\sigma_3^2)$, $N(\mu,\sigma_4^2)$ 로부터 독립적으로 추출하였다. 표본크기 (n_1,n_2,n_3,n_4)은 (30, 25, 20, 15), (20, 15, 12, 10), (10, 8, 7, 5), (5, 4, 3, 2)를 사용하였으며, $\sigma_1^2,\sigma_2^2,\sigma_3^2,\sigma_4^2$ 는 다양한 값을 부여하였다. [표 3.1]의 아래 부분은 한 그룹이 나머지 세 그룹에 비해 매우 분산이 큰 경우이다.

[표 3.1]을 보면 표본크기가 충분히 클 때 사전분포로 π_R 와 π_S 를 사용하는 모든 경우 Frequentist의 포함확률에 잘 근사하며, 표본의 크기가 작을 때 π_R 보다 π_S 에 근거한 사후분포의 포함확률이 목표값에 잘 근사한다고 할 수 있다. 어느 한 집단의 분산이 다른 집단의 그것에 비해 지나치게 커 집단간 분산차이가 큰 경우에 대해서는 π_S 가 매우 잘 일치하는 것을 확인할 수 있다.

4. Frequentist 신뢰구간과의 비교

제 4장에서는 μ 에 대한 신뢰구간을 구하는 Frequentist의 여러 가지 방법을 소개하고 모의실험을 통해 Frequentist 방법과 second order matching prior에 근거한 베이지안의 신뢰구간을 비교한다.

표본평균 $\overline{X}_i = n_i^{-1}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$ 와 표본분산 $S_i^2 = (n_i-1)^{-1}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\overline{X}_i)^2$, $i=1,2,\cdots,k$, 이라 하면 각각 t-분포와 F-분포를 따르는 다음과 같은 확률변수를 정의할 수 있다.

$$T_i = \frac{\sqrt{n_i}(\overline{X}_i-\mu)}{S_i} \sim t_{n_i-1} \quad , \qquad F_i = \frac{n_i(\overline{X}_i-\mu)^2}{S_i^2} \sim F_{1,\,n_i-1} \tag{4.1}$$

이러한 통계량들은 i 번째 표본에 근거하여 μ 에 대한 가설을 검정하기위해 사용되는 검정통계량이므로 $|T_i|$, F_i 와 다른 함수들의 적절한 선형결합은 μ 에 대한 정확한 신뢰구간을 구하는 피봇(pivot)으로 제시되어 오고 있으며, Cohen & Sachrowitz(1984)과 Jordan & Kishnamoorthy(1996)에 의해 다음과 같이 요약, 정리되어 있다.

4.1 T_i 에 근거한 μ의 신뢰구간

Cohen & Sackrowitz(1984)은 μ 에 대한 가설검정의 검정통계량으로서 다음 통계량의 사용을 제안하였다.

$$M_t = max_{1\le i\le k}|T_i|$$

M_t 의 분포의 임계치를 알고 있다면 μ 의 신뢰구간을 구하는 과정에서 M_t 를 사용

할 수 있다. 귀무가설하에서 이 임계치는 $C_{\alpha/2}$ 로 표기되며, $C_{\alpha/2}$ 가 다음 조건을 만족한다면

$$1-\alpha = P[M_t \le C_{\alpha/2}] = \prod_{i=1}^{k} P[|T_i| \le C_{\alpha/2}] \quad ,$$

μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\left[max_{1\le i\le k}\{\overline{X}_i - \frac{C_{\alpha/2} S_i}{\sqrt{n_i}}\},\ min_{1\le i\le k}\{\overline{X}_i + \frac{C_{\alpha/2} S_i}{\sqrt{n_i}}\} \right]$$

그러나, 임계치 $C_{\alpha/2}$ 의 결정은 실제적으로 쉽지 않기 때문에 수치해석적인 방법으로 구해야 하며 이 방법의 계산상 어려움에 대한 대안으로 다음 신뢰구간이 제안되었다.

$$\left[max_{1\le i\le k}\{\overline{X}_i - \frac{C_{\alpha/2}^{(i)} S_i}{\sqrt{n_i}}\},\ min_{1\le i\le k}\{\overline{X}_i + \frac{C_{\alpha/2}^{(i)} S_i}{\sqrt{n_i}}\} \right] \tag{4.2}$$

여기서 $C_{\alpha/2}^{(i)}$ 은 $\prod_{i=1}^{k} P[|T_i| \le C_{\alpha/2}^{(i)}] = (1-\alpha)^{1/k}$ 을 만족하는 각각의 임계치이다.

Fairweather(1972)는 T_i의 다음의 가중 선형결합을 이용한 신뢰구간을 제안하였다.

$$W_t = \sum_{i=1}^{k} u_i T_i, \ , \quad u_i = \frac{[Var(T_i)]^{-1}}{\sum_{j=1}^{k} [Var(T_j)]^{-1}}$$

만약 $b_{\alpha/2}$ 가 다음 조건을 만족시키는 W_t 의 분포의 임계치라 하면,

$$1-\alpha = P[|W_t| \le b_{\alpha/2}]$$

μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음과 같이 얻어진다.

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{k}\sqrt{n_i}u_i\overline{X}_i/S_i}{\sum_{i=1}^{k}\sqrt{n_i}u_i/S_i} - \frac{b_{\alpha/2}}{\sum_{i=1}^{k}\sqrt{n_i}u_i/S_i},\ \frac{\sum_{i=1}^{k}\sqrt{n_i}u_i\overline{X}_i/S_i}{\sum_{i=1}^{k}\sqrt{n_i}u_i/S_i} + \frac{b_{\alpha/2}}{\sum_{i=1}^{k}\sqrt{n_i}u_i/S_i} \right]$$

4.2 F_i 에 근거한 μ의 신뢰구간

Jordan & Krishnamoorthy(1996)는 가중치 w_i 를 갖는 F_i 의 선형결합인 $W_f = \sum_{i=1}^{k} u_i F_i$ 를 사용할 것을 제안하였다. 만약 $1-\alpha = P[W_f \le a_\alpha]$ 을 만족하는 임계치 a_α 를 계산할 수 있다면 μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\left[\sum_{i=1}^{k} p_i \overline{X}_i - \sqrt{\triangle_i}\ , \sum_{i=1}^{k} p_i \overline{X}_i + \sqrt{\triangle_i}\right] \tag{4.3}$$

여기서

$$p_i = \frac{w_i n_i / S_i^2}{\sum_{j=1}^{k} w_j n_j / S_j^2} \quad , \qquad \triangle_i = \frac{a_\alpha}{\sum_{i=1}^{k} w_i n_i / S_i^2} - \sum_{i=1}^{k} p_i \overline{X}_i^2 + \{\sum_{i=1}^{k} p_i \overline{X}_i\}^2$$

이며, $m_i = n_i - 1$, $n_i > 5$ 일 때, w_i 는 다음과 같다.

$$w_i = \frac{[(m_i-2)^2(m_i-4)]/[m_i^2(m_i-2)]}{\sum_{j=1}^{k}[(m_j-2)^2(m_j-4)]/[m_j^2(m_j-1)]}$$

$k=2$ 인 경우 W_f 의 정확한 $100(1-\alpha)$번째 분위수를 구할 수 있지만, $k>2$ 인 경우에는 W_f 의 $100(1-\alpha)$번째 분위수를 정확하게 구해내는 것이 어렵기 때문에 W_f 의 분포가 $dF_{k,\nu}$ 의 분포로 근사된다는 사실을 이용하여 a_α 를 구해낼 수 있다. 여기서 $F_{k,\nu}$ 는 자유도가 k 와 ν 인 F 분포의 확률변수이며, d 와 ν는 다음과 같이 정의된다.

$$\nu = \frac{4kM_2 - 2(k+2)M_1^2}{kM_2 - (k+2)M_1^2}, \qquad d = (\nu-2)M_1/\nu$$

여기서

$$M_1 = E(W_f) = \sum_{i=1}^{k} w_i m_i/(m_i-2),$$

$$M_2 = E(W_f)^2 = \sum_{i=1}^{k} 3w_i^2 m_i^2/[(m_i-2)(m_i-4)] + 2\sum_{i>j} w_i w_j m_i m_j/[(m_i-2)(m_j-2)]$$

이다. 이 근사값은 구하기 쉬울 뿐만 아니라 $k=2$ 인 경우에 정확한 $100(1-\alpha)$번째 분위수와 근사값을 비교해본 결과 크게 차이가 나지 않는다(Jordan & Krishnamoorthy, 1996).

4.3 P_i 에 근거한 μ의 신뢰구간

(4.1)에서 정의된 F_i 는 μ에 대한 가설검정 통계량으로 사용할 수 있으므로 i번째 P-값을 P_i 라 하면 P_i 는 다음과 같다.

$$P_i = \int_{F_i}^{\infty} f_i(x)\,dx$$

여기서 $f_i(x)$ 는 자유도가 1과 (n_i-1) 인 F 분포의 pdf이며, $P_1, \cdots, P_k$ 가 iid 이므로 이들을 하나의 통계량으로 결합할 수 있다 (Hedges & Olkin, 1985). μ 에 대한 구간추정에 P_i 들을 결합한 통계량을 이용하는 방법 가운데 Tippett's Method(Tippett, 1931), Fisher's Method(Fisher, 1932), Inversion normal Method(Stouffer, Suchman, DeVinney, Star & Williams, 1949), Logit Method(George, 1977)등이 주로 사용되며, P_i 에 근거한 근사 신뢰구간도 제안되었다.

Tippett's Method

Tippett's Method(Tippet, 1931)에 따르면, $P_{[1]}$가 $P_1, P_2, \cdots, P_k$ 중 최소값이라 할 때 $P_{[1]} < c_1 = 1-(1-\alpha)^{1/k}$ 이면 μ 에 대한 귀무가설은 기각된다. 따라서 기각역을 제외한 부분이 μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간이 된다.

$$\begin{aligned} C.I \ &= \{\mu : P_{[1]} \geq c_1\} \ = \ \{\mu : P_i \geq c_i,\ i=1,2,\cdots,k\} \\ &= \{\mu : \int_{n_i(\bar{X}_i-\mu)^2/S_i^2}^{\infty} f_i(x)\,dx \geq 1-(1-\alpha)^{1/k},\ i=1,2,\cdots,k\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

위의 신뢰구간 (4.4)는 정확하게 (4.2)와 일치한다.

Fisher's Method

Fisher's Method는 $-2\sum_{i=1}^{k} logP_i > \chi^2_{2k,\alpha}$이면, μ 에 대한 귀무가설을 기각하므로 μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 이를 이용하여 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} C.I \ &= \{\mu :\ -2\sum_{i=1}^{k} logP_i \leq \chi^2_{2k,\alpha}\} \ = \{\mu : \prod_{i=1}^{k} P_i \geq e^{-\chi^2_{2k,\alpha}/2}\} \\ &= \{\mu : \prod_{i=1}^{k} \int_{n_i(\bar{X}_i-\mu)^2/S_i^2}^{\infty} f_i(x)\,dx \geq e^{-\chi^2_{2k,\alpha}/2}\} \end{aligned}$$

Inversion normal Method

이 방법은 유의수준이 α 일 때 $\sum_{i=1}^{k} \Phi^{-1}(P_i) < \sqrt{k} z_\alpha$ 이면 μ 에 대한 귀무가설을 기각하므로 이를 이용하면 μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음과 같다.

$$C.I = \{\mu : \sum_{i=1}^{k} \Phi^{-1}(P_i) < \sqrt{k} z_\alpha\}$$

여기서 $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 누적분포함수이다.

Logit Method

Logit Method는 미리 정해진 상수 c 에 대하여 $\sum_{i=1}^{k}\log\frac{p_i}{1-p_i} < c$ 이면 귀무가설을 기각한다. 통계량 G^* 를 다음과 같이 정의할 때

$$G^* = \left[-\sum_{i=1}^{k}\log\frac{p_i}{1-p_i}\right]\left[\frac{3}{k\pi^2}\right]^{1/2}$$

G^*의 분포가 점근적으로 표준정규분포에 가까워진다는 것이 George & Mudholkar(1977)에 의해 증명되었다. 따라서 μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음과 같다.

$$C.I = \{\mu : G^* \leq z_\alpha\}$$

P_i 에 근거한 μ 의 근사신뢰구간

μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 근사신뢰구간을 구하기 위하여 $H_1(\mu), H_2(\mu), H_3(\mu), P_i(\mu)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$H_1(\mu) = \sum_{i=1}^{k} logP_i(\mu), \qquad (Fisher's\ Method)$$

$$H_2(\mu) = \sum_{i=1}^{k}\Phi^{-1}(P_i(\mu)), \qquad (Inverse\ normal\ Method)$$

$$H_3(\mu) = \sum_{i=1}^{k}\log\frac{P_i(\mu)}{1-P_i(\mu)}, \qquad (Logit\ Method)$$

$$P_i(\mu) = P(F_{1,n_i-1} > c_i^2(\mu))$$

여기서 $c_i^2(\mu) = \dfrac{(\bar{x}_i-\mu)^2}{s_i^2/n_i}$ 이다. 위에서 정의한 $H_1(\mu), H_2(\mu), H_3(\mu)$ 을 이용하여 구한 각각의 μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음과 같다.

$$CI_1 = \{\mu : H_1(\mu) \geq -\chi^2_{2k,\alpha}/2\}$$

$$CI_2 = \{\mu : H_2(\mu) \geq -z_\alpha\sqrt{k}\}$$

$$CI_3 = \{\mu : H_3(\mu) \geq -z_\alpha\pi\sqrt{k/3}\}$$

그러나, 신뢰구간 CI_1, CI_2, CI_3 는 n_i, k, α 그리고 $\overline{X}_i$ 와 S_i^2 에 대하여 독립이 아니므로 $H_1(\mu), H_2(\mu), H_3(\mu)$ 는 μ 에 대한 간단한 함수로 정리되어지지 않는다. 따라서 위 조건을 만족하는 μ 에 대한 신뢰구간을 정확하게 구해내는 것은 쉽지 않으므

로 Fisher‘s method, Inverse normal method, Logit method에서 유도되는 μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 근사신뢰구간을 고려하는 것이 제안되었다. 이 근사방법은 Jordan & Krishnamoorthy(1996)에서 사용된 방법과 유사하게 F_i 의 선형결합을 이용하는 방법이다.

Graybill-Deal(1959)에 의해 제시된 μ 의 추정량 $\hat{\mu}_{GD}$ 를 이용하여 $CI_i(\hat{\mu}_{GD}), i=1,2,3$ 은 1차 테일러 시리즈 전개를 통해 $H_i(\mu)$ 를 근사시킴으로 얻어진다. 여기서 $\hat{\mu}_{GD}$ 는 아래와 같다.

$$\hat{\mu}_{GD} = [\sum_{i=1}^{k} n_i \bar{x}_i s_i^{-2}][\sum_{i=1}^{k} n_i s_i^{-2}]^{-1}$$

Fisher‘s method, Inverse normal method, Logit method에 의한 μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 근사신뢰구간은 w_i와 a_α 가 [표 4.1] 의 값에 따라 결정되는 것을 제외하고는 (4.3)과 같은 형태를 갖게 된다.

Method	a_α	w_i
Fisher	$H_1(\hat{\mu}_{GD}) + \sum_{i=1}^{k} w_i c_i^2(\hat{\mu}_{GD}) + \chi^2_{2k,}$	$f_i(c_{i1}^{*2})e^{\frac{\chi^2_{2k,\alpha}}{2k}}$
Inverse normal	$H_2(\hat{\mu}_{GD}) + \sum_{i=1}^{k} w_i c_i^2(\hat{\mu}_{GD}) + z_\alpha\sqrt{k}$	$f_i(c_{i2}^{*2})/\Phi(-\frac{z_\alpha}{\sqrt{k}})$
Logit	$H_3(\hat{\mu}_{GD}) + \sum_{i=1}^{k} w_i c_i^2(\hat{\mu}_{GD}) + z_\alpha\pi\sqrt{\frac{k}{3}}$	$f_i(c_{i3}^{\times 2})(1+e^{z_\alpha\frac{\pi}{\sqrt{3k}}})^2/e^{z_\alpha\frac{\pi}{\sqrt{3k}}}$

[표 4.1] Fisher, Inverse normal, Logit의 근사방법의 w_i와 a_α

여기서 $c_{i1}^*, c_{i2}^*, c_{i3}^*$은 모두 양수이며, 조건 $\int_{c_{i1}^{\times 2}}^{\infty} f_i(x)dx = e^{-\frac{\chi^2_{2k,\alpha}}{2k}}$, $\int_{c_{i2}^{\times 2}}^{\infty} f_i(x)dx = \Phi(-\frac{z_\alpha}{\sqrt{k}})$ $\int_{c_{i3}^{\times 2}}^{\infty} f_i(x)dx = 1/(1+e^{z_\alpha\pi\sqrt{\frac{k}{3}}})$ 을 만족한다.

4.4 모의실험을 통한 비교

2장에서 유도되었던 second order probability matching prior 에 근거한 신뢰구간과 Frequentist 의 여러 가지 신뢰구간을 비교해 보기위하여 $k=2$, $\alpha=0.05$ 일 때 $n_1, n_2, \sigma_1, \sigma_2$ 의 여러 조합에 대해 μ 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간을 구하는 모의실험을 수행하였다. Jordan & Krishnamoorthy에 의해 제시된 신뢰구간의 조건을 만족시켜주기 위해 각 그룹의 표본크기는 모든 경우 5보다 크게 설정하였으며, Fisher‘s method, Inverse normal method, Logit method는 정확한 신뢰구간을 구하는 데 어려

움이 있어 근사신뢰구간을 사용하였고, Tippet의 방법은 결과적으로 Cohen & Sackrowitz 방법을 이용하여 구한 신뢰구간과 동일하므로 따로 표기하지 않았다. 모든 경우에 대해 1000번 반복하여 신뢰구간들을 얻고, 그 신뢰구간의 평균길이를 구하였다. 그 결과는 [표 4.2] 에 제시되었다.

모의실험결과를 살펴보면 Frequentist 방법들 중 σ_1, σ_2 간의 차이가 적은 경우에는 Fairweather의 방법의 신뢰구간이 가장 짧으며, Fisher와 Jordan & Krishnamoorthy에 따른 신뢰구간이 그 다음으로 짧음을 알 수 있다. 또한, σ_1, σ_2 간의 차이가 큰 경우에는 Cohen & Sackrowitz 방법과 Fisher 방법이 가장 좋은 것으로 나타났다. 그에 비해 second order probability matching prior π_s 를 이용한 신뢰구간은 $n_1, n_2, \sigma_1, \sigma_2$ 에 관계없이 모든 경우에 대해 대부분의 Frequentist 방법들에 의해 구해지는 신뢰구간보다 짧음을 알 수 있다. 여기서 non-interval(%)는 각 방법을 사용하였을 때, 신뢰구간의 상한이 하한보다 작게 되거나 제곱근 안의 부호가 음이 되어 신뢰구간을 형성하지 못하는 경우의 평균적인 비율을 뜻한다.

5. 결 론

베이지안 추론에서 최근 들어 많이 사용되고 있는 무정보적 사전분포의 개발에 대한 기준으로 Frequentist 포함확률(coverage probability)에 대한 일치성이 사용된다. 본 연구에서는 이와 같은 무정보적 사전분포의 성질을 이용하여 모의실험을 통해 각 베이지안 사전분포의 신뢰구간(credible intervals)의 Frequentist 포함확률을 계산하여 얼마나 잘 근사하는지를 통해 사전분포들을 비교해 보았다. 그 결과 무정보적 사전분포 중 second order probability matching prior를 이용한 경우가 Frequentist 포함확률에 대한 일치정도가 가장 좋은 것을 알 수 있었으며, 이를 이용하여 여러 정규모집단의 공통 모평균 μ 의 베이지안 신뢰구간을 구하고, Frequentist 방법들과 비교해보았다.

Yu, Sun & Shinha(1999)는 기존의 여러 정규모집단의 공통 모평균 μ 를 추정하는 Frequentist방법들의 비교연구를 통해 집단들의 표본크기 n_i 와 분산 σ_i 에 따라 각각의 최상의 결과를 보이는 방법들을 제시하였으며, 그 가운데 Fisher의 방법을 사용하는 것이 가장 좋다는 결론과 함께 Fisher의 방법에 따른 근사신뢰구간도 제시하였다.

이에 비해 베이지안 방법은 집단들의 표본크기 n_i 와 분산 σ_i 에 상관없이 Frequentist의 방법들과 비교하여 일관되게 좋은 결과를 보이는 것을 알 수 있다. 즉, 분산이나 표본 크기가 변함에 따라 Frequentist 방법들 중에는 뚜렷하게 좋다고 할 수 있는 방법이 없다고 할 수 있으며, 이에 대한 대안으로 무정보적 사전분포를 이용한 베이지안 구간추정을 사용하는 것이 좋은 대안이 될 것이라 판단된다.

n_1	n_2	σ_1	σ_2	C&S	t	F	J&K	Apx. Fisher	Apx. Inv.N	Apx. Logit	π_S
7	10	1	0.5	0.795	0.782	0.650	0.736	0.800	1.058	0.721	**0.646**
7	10	1	1	1.387	1.352	**1.052**	1.183	1.264	1.148	1.217	**1.052**
7	10	1	5	1.985	2.060	1.982	2.138	2.008	2.267	2.214	**1.902**
7	10	1	10	**2.049**	2.063	2.232	2.458	2.285	3.429	2.230	2.087
7	10	1	20	**2.075**	2.088	2.408	2.317	2.339	3.818	2.364	2.101
10	10	1	0.5	0.768	0.768	0.681	0.744	0.750	0.819	0.743	**0.680**
10	10	1	1	1.133	1.133	0.941	0.989	0.981	1.218	0.972	**0.937**
10	10	1	5	1.547	1.547	**1.248**	1.544	1.709	1.810	1.637	1.251
10	10	1	10	1.629	1.629	1.670	1.629	1.778	1.811	1.733	**1.627**
10	10	1	20	1.685	1.685	1.752	**1.657**	2.042	2.215	2.047	1.660
15	10	1	0.5	0.802	0.799	**0.662**	0.707	0.784	0.814	0.808	0.669
15	10	1	1	1.005	1.003	0.877	0.948	1.049	1.109	1.117	**0.874**
15	10	1	5	1.254	1.205	1.218	1.173	1.237	1.566	1.272	**1.168**
15	10	1	10	1.321	1.288	1.321	1.253	1.336	1.675	1.374	**1.251**
15	10	1	20	1.346	1.299	1.451	1.255	1.349	2.214	1.483	**1.244**
21	21	1	0.5	0.502	0.502	0.457	0.466	0.475	0.541	0.519	**0.454**
21	21	1	1	0.816	0.816	0.749	0.781	0.779	0.836	0.795	**0.742**
21	21	1	5	1.017	1.017	1.020	0.998	1.028	1.484	1.205	**0.990**
21	21	1	10	1.090	1.090	1.153	**1.064**	1.137	1.227	1.746	1.066
21	21	1	20	1.213	1.213	1.357	1.119	1.166	1.343	1.268	**1.117**
non-interval (%)				1.01	0.98	0.00	1.30	1.49	15.74	10.51	0.00

[표 4.2] 신뢰구간의 비교

참고문헌

1. Berger, J.O. and Bernardo, J.M.(1992). Ordered group reference priors with application to the multinomial problem, Biometrika, 79 25-37.
2. Brown, L.D. and Cohen, A.(1974), Point and confidence estimation of a common mean and recovery of inter-block information, Ann. Statistics, 2, 963-976.-69.
3. Cohen, A. and Sackrowitz, H.B.(1974), On estimating of the common mean of two populations, Ann. Statistics, 2, 1274-1282.
4. Datta, G.S. and Ghosh, M.(1995), Some remarks on noninformative priors, JASA, 90, 1357-1363.
5 Datta, G.S. and Ghosh, M.(1996), On the invariance of noninformative priors, Annals of Statistics, 24, 141-159.
6. Eberhardt, K.R., Reeve, C.P., and Spiegelman, C.H.(1989), A minimax approach to combining means, with practical examples, Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 5, 129-148.

7. Fairweather, W.R.(1972), A method of obtaining an exact confidence Interval for the common mean of several normal populations, Applied Statistics, 21, 229-233.
8. Fisher, R.A.(1932), Statistical Methods for Research Workers(4th ed.), London : Oliver & Boyd.
9. George, E.O.(1977), Combining independent one-sided and two-side statistical tests - some theory and applications, Unpublished Ph.D. Dissertation, University of Rochester.
10. George, E.O. and Mudholker, G.S.(1977), On the convolution of logistic random variable, Unpublished paper, University of Rochester, Rochester, New York.
11. Graybill, F.A. and Deal, R.B.(1959), Combining unbiased estimators, Biometrics, 15, 543-550.
12. Hedges, L.V. and Oklin, I.(1985), Statistical Methods for Meta-Analysis, Academic Press: New York.
13. Jeffreys, H.(1961), Theory of probability, Oxford University Press: London.
14. Jordan, S.M. and Krishnamoorthy, K.(1996), Exact confidence Intervals for the common mean of several normal populations, Biometrics, 52, 77-86.
15. Meier, P.(1953), Variance of weighted mean, Biometrics, 9, 59-73.
16. Sinha, B.K.(1985), Unbiased estimation of the variance of the Graybill-Deal estimator of the common mean of several normal populations, Canadian J.of Statistics, 13, 243-247.
17. Sinha, B.K.(1998), Statistical Meta-Analysis with Applications.
18. Stuffer, S.A., Suchman, E.A., DeVinney, L.C., Star, S.A. and Williams, R.M.Jr,(1949), The American Soldier, 1, Princeton, NJ : Princeton University Press.
19. Tibshirani, R.(1989), Noninformative priors for one parameter of many, Biometrika, 76, 604-608.
20. Tippett, L.H.(1931), The Methods of Statistics, London: Williams & Norgate.
21. Yu, P.L., Sun, Y., and Sinha, B.K.(1999), On exact confidence Intervals for the common mean of several normal populations, JSPI, 81, No.2, 263-277.

[2003년 10월 접수, 2004년 2월 채택]