*Journal of Korean*
*Data & Information Science Society*
*2004, Vol. 15, No. 1 pp. 31~39*

# Test for Independence in Bivariate Pareto Model with Bivariate Random Censored Data

Jang Sik Cho[1) ] · Yong Man Kwon[2)] · Seung Bae Choi[3)]

Abstract

In this paper, we consider two components system which the lifetimes follow bivariate pareto model with bivariate random censored data. We assume that the censoring times are independent of the lifetimes of the two components. We develop large sample test for testing independence between two components. Also we present a simulation study which is the test based on asymptotic normal distribution in testing independence.

**KeyWords** : Bivariate pareto model; Censored data; Maximum likelihood estimator; Relative frequency estimator.

## 1. 서론

두 개의 부품으로 구성된 시스템의 신뢰도에 대한 많은 선행 연구에서는 두 부품들 사이의 수명시간을 상호 독립으로 가정하는 경우가 많다. 그러나 이러한 독립성의 가정은 수명시간들이 서로 상관관계가 있는 공학분야에서 현실성이 떨어지는 경우가 많이 발생한다.

이와 같이 수명시간들이 서로 상관관계가 있는 시스템에서 수명시간에 대한 모형으로서 이변량 지수모형들이 Freund(1961), Marshall과 Olkin(1967), Block과 Basu(1974) 등에 의해서 제안되었다.

그리고 Hanagal과 Kale(1991, 1992)은 완전자료 및 임의중단자료를 갖는 이변량 지

1) First Author : Associate Professor, Department of Statistical Information Science, Kyungsung University, Pusan, 608-736, Korea
E-mail : jscho@ks.ac.kr

2) Associate Professor, Department of Computer Science and Statistics, Chosun University, Gwangju, 501-759, Korea
E-mail : ymkwon@chosun.ac.kr

3) Full-time Lecturer, Department of Information Statistics, Dongeui University, Busan, 501-759, Korea
E-mail : csb4851@dongeui.ac.kr

수모형에서 모수들에 대한 최우추정량의 근사적 정규성을 이용하여 독립성 검정법을 제안 하였다.

한편, Lindley와 Singpurwalla(1986)는 실험환경이 변하는 상황까지 고려한 모형으로서 이변량 파레토(BVP : bivariate pareto) 모형을 제안하였다. Bandyapadhyay와 Basu(1990), 그리고 Veenus와 Nair(1994)는 몇 가지 형태의 BVP 모형을 제안하였고, Jeevanand (1997)는 스트레스-스트렝스의 신뢰도에 대한 베이즈 추정량을 제안하였다. 그리고 Hanagal(1996)은 다변량 파레토 모형을 소개하였으며, Cho, Cho, Cha(2003)와 Cho, Cho, Lee(2003)은 완전자료 및 중단자료를 갖는 경우 신뢰도에 대한 최우추정량을 구하였다.

한편, 현실적으로 부품들의 수명이 실험자의 의도에 의해서 또는 실험환경의 제약에 의해서 두 부품의 수명시간들 각각에 대한 임의중단시간들이 서로 다른 임의중단분포를 갖는 이변량 임의 중단된 자료(bivariate random censored data)로 관찰되는 경우가 많이 발생한다. 예를 들어 두 부품의 고장률이 서로 차이가 많이 나는 경우 두 부품의 중단시간을 일변량 중단모형보다 이변량 중단모형으로 하는 것이 타당하다. 여기서 두 부품의 중단시간이 미리 정해진 경우는 제 1종 이변량 중단모형이 되며, 두 부품의 임의중단 시간이 서로 같은 경우에는 일변량 임의중단 모형이 된다. 따라서 이변량 임의중단모형은 일변량 임의중단모형 및 제 1종 이변량 중단모형의 확장된 개념으로 가장 일반적인 중단 모형이다.

본 논문에서는 수명시간들이 이변량 파레토 모형을 따르는 두 개의 부품으로 구성된 시스템에서, 수명시간들이 이변량 임의 중단된 자료로 관찰되는 경우를 가정한다. 우도함수 및 상대도수에 기초한 모수의 추정량들을 각각 제안하고, 그 추정량의 근사적 성질을 밝힌다. 또한 최우추정량과 상대도수 추정량에 기초한 두 부품의 수명시간들 사이의 독립성에 대한 대표본 검정법을 제안하고, 몬테칼로 모의실험을 통하여 제안된 두 검정법들을 각각 비교한다.

## 2. 개요

확률변수 $(X, Y)$를 두 개의 부품으로 구성된 시스템에서 각 부품의 수명시간이라 하자. 그리고 수명시간에 대한 분포로서 모수 ( $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \zeta$)를 갖는 이변량 파레토 분포를 가정하면 결합확률밀도 함수는 식 (1)과 같이 주어진다.

$$f(x, y : \phi_1, \phi_2, \phi_3, \zeta)$$

$$= \begin{cases} \phi_1(\phi_2+\phi_3)\zeta^{\phi} x^{-\phi_1-1} y^{-(\phi_2+\phi_3)-1}, & \zeta < x < y < \infty, \\ \phi_2(\phi_1+\phi_3)\zeta^{\phi} x^{-(\phi_1+\phi_3)-1} y^{-(\phi_2+\phi_3)-1}, & \zeta < y < x < \infty, \\ \phi_3 \zeta^{\phi} x^{-\phi-1}, & \zeta < x = y < \infty. \end{cases} \quad (1)$$

여기서 $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \zeta > 0$이고 $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3$이다.

그리고 결합 생존함수는 식 (2)와 같이 주어진다.

$$\overline{F}(x, y) = P(X > x \ , \ Y > y)$$

$$= \left(\frac{x}{\zeta}\right)^{-\phi_1} \cdot \left(\frac{y}{\zeta}\right)^{-\phi_2} \cdot max\left(\frac{x}{\zeta}, \frac{y}{\zeta}\right)^{-\phi_3}, \quad \zeta \le min(x, y) < \infty. \quad (2)$$

위 식 (1)의 모형에서 $\zeta=1$을 가정한다면 $(X, Y)$에 대한 결합 생존함수는 식 (3)과 같이 주어진다.

$$\overline{F}(x,y)= x^{-\phi_1}\cdot y^{-\phi_2}\cdot(max(x,y))^{-\phi_3}. \tag{3}$$

여기서 식 (2)의 생존함수를 제 1종 이변량 파레토 모형이라 부르고, 식 (3)의 생존함수를 제 2종 이변량 파레토 모형이라 부른다. 본 논문에서는 제 2종 이변량 파레토 모형에 대해서 연구의 초점을 맞추고자 한다.

위의 식 (1)에서 $\phi_1=\phi_2$이면 두 부품의 수명시간에 대한 분포는 동일하며, $\phi_3=0$이면 두 부품의 수명시간이 상호 독립임을 알 수 있다. 따라서 두 부품의 수명시간의 독립성 검정은 가설 $H_o: \phi_3=0$에 대한 검정과 동일하다.

본 논문에서 사용되는 기호들을 소개하면 $j=1,2;\ k=1,2,3;\ i=1,2,\cdots,n$에 대하여 다음과 같다.

(a-1) ( $t_{x_i}, t_{y_i}$) : $i$번째 시스템의 이변량 임의 중단시간.

(a-2) $G_{1i}=I(X_i > t_{x_i})$, $G_{2i}=I(Y_i > t_{y_i})$, $G^*_{ji}=1-G_{ji}$.

(a-3) $R_{1i}=I(X_i < Y_i)$, $R_{2i}=I(X_i > Y_i)$, $R_{3i}=I(X_i=Y_i)$, $R^*_{ki}=1-R_{ki}$.

(a-4) $\Theta=(\phi_1,\phi_2,\phi_3,\theta_1,\theta_2)$.

그러면 이변량 임의중단된 자료가 관찰되는 경우, $i$번째 시스템에서 각각의 부품들에 대해서 다음과 같은 세 가지 경우가 발생할 수 있다.

(b-1) 두 개의 부품들이 모두 관찰되는 경우( $G^*_{1i}G^*_{2i}=1$).

(b-2) 하나의 부품만 관찰되고 다른 하나의 부품은 중단되는 경우 ( $G_{1i}G^*_{2i}+G^*_{1i}G_{2i}=1$).

(b-3) 두 개의 부품들이 모두 중단되는 경우( $G_{1i}G_{2i}=1$).

따라서 $i$번째 시스템의 수명시간 $(x_i, y_i)$은 다음과 같이 관찰된다.

$$(x_i, y_i) = \begin{cases} (x_i, y_i), & x_i < t_{x_i}\ ,\ y_i < t_{y_i} \\ (t_{x_i}, y_i), & x_i > t_{x_i}\ ,\ y_i < t_{y_i} \\ (x_i, t_{y_i}), & x_i < t_{x_i}\ ,\ y_i > t_{y_i} \\ (t_{x_i}, t_{y_i}), & x_i > t_{x_i}\ ,\ y_i > t_{y_i}. \end{cases} \tag{4}$$

여기서 이변량 임의중단시간 $(t_{x_i}, t_{y_i})$, $(i=1,2,\cdots,n)$는 모수가 각각 $(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\rho)$를 갖는 이변량 파레토 분포를 따른다고 가정한다. 또한 결합확률밀도 함수 및 생존분포는 각각 $g(t_{x_i}, t_{y_i}: \theta_1, \theta_2, \theta_3, \rho)$와 $\overline{G}(t_{x_i}, t_{y_i}: \theta_1, \theta_2, \theta_3, \rho)$이라고 두자. 본 논문에서는 $\theta_3=0$라 가정한다. 즉, $g(t_{x_i}, t_{y_i}: \theta_1, \theta_2, \theta_3, \rho)=g_1(t_{x_i}: \theta_1, \rho)\cdot g_2(t_{y_i}: \theta_2, \rho)$와 $\overline{G}(t_{x_i}, t_{y_i}: \theta_1, \theta_2, \theta_3, \rho)=\overline{G_1}(t_{x_i}: \theta_1, \rho)\cdot \overline{G_2}(t_{y_i}: \theta_2, \rho)$이다. 만약 $t_{x_i}=t_{y_i}$인 경우는 일변량

임의 중단모형이 되고, 중단시간 $t_{x_i}$와 $t_{y_i}$이 미리 정해진 상수값이면 이변량 제1종 중단모형이 된다.

그러면 우도함수는 아래 식 (5)와 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} L(\Theta) = \prod_{i=1}^{n} \{ & [f(x_i, y_i) \cdot \overline{G_1}(x_i; \rho, \theta_1) \cdot \overline{G_2}(y_i; \rho, \theta_2)]^{C^*_{1i} C^*_{2i}} \\ & \cdot [\overline{F}(x_i, y_i) \cdot g_1(x_i; \rho, \theta_1) \cdot g_2(y_i; \rho, \theta_{2i})]^{C_{1i} C_{2i}} \\ & \cdot [\overline{F}_{X \mid Y=y}(x_i) f_Y(y_i) \cdot g_1(x_i; \rho, \theta_1) \cdot \overline{G_2}(y_i; \rho, \theta_2)]^{C_{1i} C^*_{2i}} \\ & \cdot [\overline{F}_{Y \mid X=x}(y_i) f_X(x_i) \cdot \overline{G_1}(x_i; \rho, \theta_1) \cdot g_2(y_i; \rho, \theta_2)]^{C^*_{1i} C_{2i}} \}^{(R_{1i} + R_{2i} + R_{3i})} \\ = {} & \phi_1^{D_1} \phi_2^{D_2} \phi_3^{D_3} (\phi_1 + \phi_3)^{D_4} (\phi_2 + \phi_3)^{D_5} \cdot \theta_1^{D_6} \cdot \theta_2^{D_7} \\ & \cdot \exp[-(\phi_1 + \phi_1) x_s - (\phi_2 + \phi_2) y_s - \phi_3 (x_s + y_s - t_s)], \end{aligned} \tag{5}$$

여기서 $f_X(x) = (\phi_1 + \phi_3) \cdot \exp(-(\phi_1 + \phi_3)x)$, $f_Y(y) = (\phi_2 + \phi_3) \cdot \exp(-(\phi_2 + \phi_3)y)$,

$$D_1 = \sum_{i=1}^{n} (R_{1i} G^*_{1i} G^*_{2i} + R^*_{2i} G^*_{1i} G_{2i}), \quad D_2 = \sum_{i=1}^{n} (R_{2i} G^*_{1i} G^*_{2i} + R^*_{1i} G_{1i} G^*_{2i}),$$

$$D_3 = \sum_{i=1}^{n} R_{3i} G^*_{1i} G^*_{2i}, \quad D_4 = \sum_{i=1}^{n} R_{2i} G^*_{1i}, \quad D_5 = \sum_{i=1}^{n} R_{1i} G^*_{2i}, \quad D_6 = \sum_{i=1}^{n} C_{1i}, \quad D_7 = \sum_{i=1}^{n} C_{2i}$$

$$x_s = \sum_{i=1}^{n} \log(x_i), \quad y_s = \sum_{i=1}^{n} \log(y_i), \quad t_s = \sum_{i=1}^{n} \log(\min(x_i, y_i)).$$

그리고 $D_1, D_2, \cdots, D_5$는 확률변수이며, 이들의 기대값은 다음과 같이 계산되어 진다.

$$\begin{aligned} E(D_1) = n \cdot & \left\{ \frac{\phi_1}{\phi} - \frac{\phi_1 \theta_1}{\phi(\phi + \theta_1)} + \frac{\theta_2}{\phi + \theta_2} - \frac{\theta_2}{\phi_2 + \phi_3 + \theta_2} \right\} \\ & + n_1 \cdot \frac{\theta_1 \theta_2}{\phi_2 + \phi_3 + \theta_2} \cdot \left\{ \frac{1}{\phi_2 + \phi_3 + \theta_1 + \theta_2} - \frac{1}{\phi + \theta_1 + \theta_2} \right\} \\ & + n_2 \cdot \frac{\phi_3}{\phi} \cdot \left\{ \frac{\theta_2}{\phi + \theta_1 + \theta_2} - \frac{\theta_1 \theta_2}{(\phi + \theta_1)(\phi + \theta_1 + \theta_2)} \right\}, \end{aligned}$$

여기서 $n_1 = \sum_{i=1}^{n} R_{1i}$, $n_2 = \sum_{i=1}^{n} R_{2i}$.

$$\begin{aligned} E(D_2) = n \cdot & \left\{ \frac{\phi_2}{\phi} - \frac{\phi_2}{\phi} \frac{\theta_2}{\phi + \theta_2} + \frac{\theta_1 \theta_2}{(\phi_1 + \phi_3 + \theta_1)(\phi_2 + \theta_2)} - \frac{\theta_1}{\phi_1 + \phi_3 + \theta_1} \right\} \\ & + n_2 \cdot \left\{ \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2 + \phi_1 + \phi_3} - \frac{\theta_1 \theta_2}{(\theta_1 + \theta_2 + \phi)(\theta_1 + \phi_1 + \phi_3)} \right\} \end{aligned}$$

$$+ n_1 \cdot \frac{\phi_3}{\phi} \cdot \left\{ \frac{\theta_1}{\theta_1 + \theta_2 + \phi} - \frac{\theta_1 \theta_2}{(\phi + \theta_2)(\phi + \theta_1 + \theta_2)} \right\},$$

$$E(D_3) = \frac{\phi_3}{\phi} \cdot \left\{ n - n_1 \cdot \frac{\theta_1}{\phi + \theta_1 + \theta_2} - n_2 \cdot \frac{\theta_2}{\phi + \theta_1 + \theta_2} \right\},$$

$$E(D_4) = n \cdot \left\{ \frac{\phi_2}{\phi} - \frac{\phi_2}{\phi} \cdot \frac{\theta_2}{\phi + \theta_2} + \frac{\theta_1 \theta_2}{(\phi_1 + \phi_3 + \theta_1)(\phi_2 + \theta_2)} \right\}$$

$$+ n \cdot \left\{ - \frac{\theta_1}{\phi_1 + \phi_3 + \theta_1} + \frac{\theta_2}{\phi_2 + \theta_2} - \frac{\theta_1 \theta_2}{(\phi_1 + \phi_3 + \theta_1)(\phi_2 + \theta_2)} \right\}$$

$$+ n_2 \frac{\phi_1 + \phi_3}{\phi} \cdot \left\{ \frac{\theta_1 \theta_2}{(\theta_1 + \phi)(\theta_1 + \theta_2 + \phi)} - \frac{\theta_2}{\theta_1 + \theta_2} \right\},$$

$$E(D_5) = n \cdot \left\{ \frac{\phi_1}{\phi} - \frac{\phi_1 \theta_1}{\phi(\phi + \theta_1)} + \frac{\theta_2}{\phi + \theta_2} - \frac{\theta_2}{(\phi_2 + \phi_3 + \theta_2)} \right\}$$

$$+ n \cdot \left\{ \frac{\phi_1 \theta_1}{\phi(\phi + \theta_1)} - \frac{\theta_1 \theta_2}{(\phi_1 + \theta_1)(\phi_2 + \phi_3 + \theta_2)} \right\},$$

그러면 우도방정식은 아래와 같이 주어진다.

$$\frac{\partial}{\partial \phi_1} \log L(\Theta) = \frac{D_1}{\phi_1} + \frac{D_4}{\phi_1 + \phi_3} - x_s = 0. \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_2} \log L(\Theta) = \frac{D_2}{\phi_2} + \frac{D_5}{\phi_2 + \phi_3} - y_s = 0. \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi_3} \log L(\Theta) = \frac{D_3}{\phi_3} + \frac{D_4}{\phi_1 + \phi_3} + \frac{D_5}{\phi_2 + \phi_3} - (x_s + y_s - t_s) = 0. \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1} \log L(\Theta) = \frac{D_6}{\theta_1} - x_s = 0. \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_2} \log L(\Theta) = \frac{D_7}{\theta_2} - y_s = 0, \quad (10)$$

모수 $\Theta$에 대한 최우추정량 $\widehat{\Theta}$은 위의 우도방정식 (6)-(10)을 뉴턴-랍슨과 같은 수치해석적 방법에 의해 얻을 수 있다. 그리고 $(\theta_1, \theta_2)$에 대한 최우추정량은 독립적으로 식 (9)와 식 (10)에 의해서 $\widehat{\theta_1} = D_6 / x_s$, $\widehat{\theta_2} = D_7 / y_s$로 얻을 수 있다.

따라서 $\sqrt{n}\ (\widehat{\phi}^T - \phi^T)$의 분포는 표본의 크기가 증가하면서 근사적으로 평균벡터가 영이고 분산-공분산행렬이 $I^{-1}(\phi)$인 다변량 정규분포를 따름을 알 수 있다. 여기서 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , $\widehat{\phi} = (\widehat{\phi_1}, \widehat{\phi_2}, \widehat{\phi_3})$.

그리고 피셔의 정보행렬은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$I(\phi) = ((I_{ij}))$, 여기서 $I_{ij} = E\left[ - \frac{\partial^2}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \log L(\phi) \right]$ ; $i, j = 1, 2, 3$이며,

$$I_{11}=E(D_1)/\phi_1^2+E(D_4)/(\phi_1+\phi_3)^2,\ \ I_{12}=0,\ \ I_{13}=E(D_4)/(\phi_1+\phi_3)^2,$$
$$I_{22}=E(D_2)/\phi_2^2+E(D_5)/(\phi_2+\phi_3)^2,\ I_{23}=E(D_5)/(\phi_2+\phi_3)^2,$$
$$I_{33}=E(D_3)/\phi_3^2+E(D_4)/(\phi_1+\phi_3)^2+E(D_5)/(\phi_2+\phi_3)^2.$$

## 3. 독립성에 대한 대표본 검정

이 장에서는 최우추정량 $\widehat{\phi}_3$과 상대도수에 기초한 추정량 $m_3=\sum_{i=1}^{n}R_{3i}$ 를 이용하여 두 부품의 수명시간들의 독립성에 대한 대표본 검정을 하고자 한다.

2장에서 알 수 있는 바와 같이 독립성 검정을 위한 귀무가설은 $H_o: \phi_3=0$으로 설정할 수 있다.

먼저 최우추정량 $\widehat{\phi}_3$에 기초한 독립성에 대한 대표본 검정을 생각해 보자. $\widehat{\phi}_3$에 대한 정확한 분포는 알 수 없지만, 2장의 결과를 이용하면 $\widehat{\phi}_3$의 분포는 근사적으로 평균이 $\phi_3$이고, 분산이 $I^{33}/n$인 정규분포를 따름을 알 수 있다. 그러나 $I^{33}$의 값이 미지의 모수 $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$의 값에 의존하기 때문에 아래와 같이 근사적 정규분포를 따르는 검정통계량을 구성할 수 있다.

$$\phi_{MLE}(X, Y)=\sqrt{n}\cdot\widehat{\phi}_3/\sqrt{\widehat{I}^{33}}. \tag{11}$$

여기서 검정통계량 $\phi_{MLE}(X, Y)$는 근사적으로 표준정규분포를 따르며, $\widehat{I}^{ij}$는 $I^{ij}$속에 내재되어 있는 미지의 모수 값 대신 최우추정량을 대입한 값이다.

따라서 가설 $H_1: \phi_3>0$에 대하여 유의수준 $\alpha$에서 $H_o$을 기각하기 위해서는 다음의 조건이 만족되어야 한다.

$$\phi_{MLE}(X, Y)=\sqrt{n}\cdot\widehat{\phi}_3/\sqrt{\widehat{I}^{33}}\ >\ z_\alpha. \tag{12}$$

여기서 $z_\alpha$는 표준정규분포의 오른쪽 꼬리 면적이 $\alpha$가 되는 값을 의미한다.

다음으로 상대도수 $m_3$에 기초해서 독립성에 대한 대표본 검정을 생각해 보자. $m_3$의 분포는 모수가 ( $n, \phi_3/\phi$)인 이항분포를 따르며, 대표본에 기초한 검정통계량은 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\phi_{RF}(X, Y)=\sqrt{n}m_3/\sqrt{m_3(n-m_3)}. \tag{13}$$

여기서 검정통계량 $\phi_{RF}(X, Y)$는 근사적으로 표준정규분포를 따름을 알 수 있다. 따라서 가설 $H_1: \phi_3>0$에 대해서 유의수준 $\alpha$에서 귀무가설을 기각하기 위해서는 다음의 조건이 만족되어야 한다.

$$\phi_{RF}(X, Y)=\sqrt{n}m_3/\sqrt{m_3(n-m_3)}\ >\ z_\alpha. \tag{14}$$

## 4. 모의실험

이 장에서는 난수생성기에 의해 생성된 가상자료를 이용하여 3장에서 구성한 두 가지의 대표본에 입각한 독립성 검정법을 비교하고자 한다. 먼저 본 논문에서는 수명분포에 대한 이변량 파레토 분포에서는 모수 값으로 $\zeta=1.0$ 및 ( $\phi_1=3.0$, $\phi_2=3.0$, $\phi_3=0.3$)을 설정하였으며, 이변량 파레토 분포로부터 표본크기 30인 두 부품의 수명시간에 해당하는 난수를 발생시켰다. 설정된 모수의 값으로부터 대립가설 $H_1{:}\,\phi_3>0$이 타당함을 알 수 있다. 이변량 임의 중단시간에 대한 분포로서 모수가 각각 $(\theta_{1,}\,\theta_2,\theta_3,\rho)$ = (0.5, 0.5, 0.0, 1.0)인 이변량 파레토 분포를 이용하였다. 관측된 자료는 아래 [표 1]과 같으며, 여기서 *는 임의중단된 자료를 나타낸다.

[표 1] 이변량 파레토 분포로부터 생성된 자료

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.2121 | 1.6006* | 11 | 1.1662 | 1.1907 | 21 | 1.3272 | 1.0666 |
| 2 | 2.1556 | 2.8883 | 12 | 1.0420 | 1.2318 | 22 | 2.0871 | 1.4720 |
| 3 | 1.0154 | 1.2431 | 13 | 2.0508 | 1.2168 | 23 | 1.2668 | 1.0060 |
| 4 | 1.1139 | 1.1139 | 14 | 1.3715 | 1.2510 | 24 | 1.2881* | 1.0261 |
| 5 | 1.4040 | 1.0076 | 15 | 1.0816 | 1.0384 | 25 | 1.3336 | 1.0324 |
| 6 | 1.0829 | 1.0694 | 16 | 1.0081 | 1.1807 | 26 | 1.2595 | 1.4460 |
| 7 | 1.3187 | 1.3879 | 17 | 1.2675 | 1.8975 | 27 | 2.2313* | 1.3391 |
| 8 | 1.6025 | 1.0944* | 18 | 1.3374 | 1.0316 | 28 | 1.3391 | 1.9030 |
| 9 | 1.0839 | 1.7293 | 19 | 1.3856 | 1.0502* | 29 | 1.1130 | 1.1210 |
| 10 | 1.2329 | 1.2046 | 20 | 1.0039* | 1.6389 | 30 | 1.2019 | 1.2062 |

[표 1]의 자료로부터 모수에 대한 최우추정량은 $\widehat{\phi_1}=2.7139$, $\widehat{\phi_2}=3.3680$, $\widehat{\phi_3}=0.2771$와 같이 계산되며, $m_3$에 대한 값은 1로 계산된다.

따라서 식 (11)와 식 (13)에 대한 검정통계량 값과 유의확률을 계산하면 아래 [표 2]와 같다.

[표 2] 두 가지 검정법의 검정통계량과 유의확률

| 검정통계량 / 계산결과 | $\phi_{MLE}(X,\,Y)$ | $\phi_{RF}(X,\,Y)$ |
|---|---|---|
| 검정통계량 | 6.3185 | 1.0171 |
| 유의확률 | 0.0000 | 0.1545 |

[표 2]로부터 최우추정량 $\widehat{\psi}_3$에 기초한 검정통계량 $\phi_{MLE}(X, Y)$의 값은 6.3185로서, 유의수준 0.001에서도 귀무가설 $H_o: \psi_3 = 0$을 기각할 수 있다. 그러나 상대도수 $m_3$에 기초한 검정통계량 $\phi_{RF}(X, Y)$의 값은 1.0171로서, 유의수준 0.10에서 조차도 귀무가설 $H_o: \psi_3 = 0$을 기각할 수 없음을 알 수 있다. 따라서 위의 데이터에서는 독립성에 대한 대표본 검정법은 최우추정량 $\widehat{\psi}_3$에 기초한 검정법이 $m_3$에 기초한 검정법에 비해서 다소 우수함을 알 수 있다.

모수와 임의중단분포 및 표본크기에 대한 다양한 조합에 대해서도 본 논문에서 제안한 두 가지 검정법의 비교와 다른 이변량 수명분포로 확장한 다양한 검정법에 대한 연구는 향후 과제로 남겨두고자 한다.

## 참고문헌

1. Bandyapadhyay, D. and Basu, A.P. (1990). On generalization of a model by Lindley and Singpurwallam, *Advanced Applied Probability*, 22, 498-500.
2. Block, H. W. and Basu, A. P. (1974). A Continuous Bivariate Exponential Extension, *Journal of the American Statistical Association*, 69, 1031-1037.
3. Cho, J. S., Cho, K. H. and Cha, Y. J. (2003). System Reliability From Stress Strength Relationship in Bivariate Pareto Distribution, *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, Vol. 14(1), 113-118.
4. Cho, J. S., Cho, K. H. and Lee W. D. (2003). Reliability for Series and Parallel Systems in Bivariate Pareto model : random censorship case, *Journal of the Korean Data & Information Science Society*, Vol. 14(3), 461-469.
5. Freund, J. E. (1961). A bivariate extension of the exponential distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 971-977.
6. Hanagal, D.D. (1996). A multivariate pareto distribution, *Communications in Statistics -Theory and Methods*, 25(7), 1471-1488.
7. Hanagal, D.D. and Kale, B.K. (1991). Large Sample Tests for Testing Symmetry and Independence in Some Bivariate Exponential Models, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 20(9), 2625-2643.
8. Hanagal,D.D. and Kale, B.K. (1992). Large Sample Tests for Testing Symmetry and Independence in Some Bivariate Exponential Model, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, 21(9), 2625-2643.
9. Jeevanand, E.S. (1997). Bayes estimation of $P(X_2 < X_1)$ for a bivariate pareto distribution, *The Statistician*, 46(1), 93-99.
10. Lindley, D.V. and Singpurwalla, N.D. (1986). Multivariate distributions for the life lengths of components of a system sharing a common

environment, *Journal of Applied Probability*, 23, 418-431.
11. Marshall, A.W. and Olkin, I.(1967). A Multivariate Exponential Distribution, *Journal of the American Statistical Association*, 62, 30-44.
12. Veenus, P. and Nair, K.R.M. (1994). Characterization of a bivariate pareto distribution, *Journal of Indian Statistical Association*, 32, 15-20.

[ 2003년 11월 접수, 2004년 1월 채택 ]