Journal of Korean
Data & Information Science Society
2004, Vol. 15, No. 1 pp. 21~29

Availability of Repairable Network System[1)]

Jung Yeon Lee[2)] · Eui Yong Lee[3)]

Abstract

In this paper, we define an availability of repairable network system, when the states of links are modeled by alternating renewal processes. The actual availabilities of some well-known network systems are obtained. The expected numbers of failures and repairs of the network systems are also calculated.

Keywords : Alternating renewal process, Availability, Repairable network,

1. 서 론

수리 가능한 부품이나 시스템의 상태는 다음과 같이

$$X(t)=\begin{cases}1, & \text{시점 } t\text{에서 시스템이 가동중일 경우} \\ 0, & \text{그렇지 않을 경우}\end{cases}$$

교대재생과정(alternating renewal process)을 따라 모형화할 수 있다. [Cox(1962) 참조] 그리고, 교대재생과정을 따라 시스템의 상태를 모형화할 때, 시점 t에서 시스템이 가동할 확률을 가동성(availability)이라 하고,

---

1) This Research was supported by the Sookmyung Women's University Research Grants 2002.

2) First Author : Lecturer, Dept. of Statistics, Sookmyung women's University, Seoul, 140-742, Korea.

3) Professor, Dept. of Statistics, Sookmyung women's University, Seoul, 140-742, Korea.
E-mail : eylee@sookmyung.ac.kr

$$A(t)=\Pr\{X(t)=1\}$$

로 정의한다. [Baxter(1981) 참조]

각 부품들의 상태가 독립적으로 교대재생과정을 따르는 응집시스템(coherent system)의 가동성은 Baxter(1983)에 의해 소개되었고, 직렬시스템과 병렬시스템에서 시점 t까지의 평균 고장수와 수리수가 구해졌다. 본 연구에서는, Baxter(1983)의 결과를 일반화하여, 네트워크의 가동성에 대하여 정의하고, 네트워크를 구성하는 각 링크들의 상태가 독립적으로 교대재생과정을 따르는 경우, 네트워크 가동성을 구하는 방법을 제시하며, 몇 개의 잘 알려진 네트워크에서 가동성을 실제로 구한다. 또한, 네트워크에서 시점 t까지의 평균 고장수와 수리수를 구하는 방법도 함께 제시한다.

2. 응집시스템의 가동성

이 절에서는 네트워크의 가동성 연구에 필요한 Baxter(1983)의 결과를 간단히 요약한다. n개의 부품으로 이루어진 시스템에서 j번째 부품의 시점 t에서 상태 $X_j(t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$X_j(t)=\begin{cases}1, & j\text{번째 부품이 시점 } t\text{에서 가동중일 경우}\\ 0, & \text{그렇지 않을 경우}\end{cases}$$

그리고, j번째 부품의 고장시간과 수리시간의 분포함수가 각각 F_j와 G_j라고 가정하자. 그러면, j번째 부품의 시점 t에서 가동성은

$$\begin{aligned}A_j(t) &= \Pr\{X_j(t)=1\}\\ &= \overline{F_j}(t)+\overline{F_j}*\Xi_j(t)\end{aligned}$$

로 주어진다. 여기서, $\Xi_j(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_j^{(n)}*G_j^{(n)}(t)$이고, $*$은 중합(convolution)이며, (n)은 n차 중합을 나타낸다. 시스템의 구조함수를 $\phi(X(t))$로 나타내면 시스템의 가동성은 $\Pr\{\phi(X(t))=1\}=h(A(t))$가 된다. 여기서, h는 ϕ의 신뢰도(reliability) 함수이고, $A(t)=(A_1(t),A_2(t),\cdots,A_n(t))$, $X(t)=(X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t))$이다. [Barlow and Proschan(1973, 1981) 참조]

3. 네트워크 시스템의 가동성

네트워크는 N개의 노드(node)들과 이들을 잇는 링크(link)들로 이루어져 있다. 여기서, 노드들은 완전(perfect)하다고 가정한다. L을 링크들의 집합이라 하자. 노드 i와 노드 j를 잇는 링크가 있으면 이를 (i,j)로 나타내고, 시점 t에서 링크 (i,j)의 상태를 다음과 같이 정의한다.

$$X_{ij}(t)=\begin{cases}1, & \text{링크 } (i,j)\text{가 시점 } t\text{에서 가동중일 경우}\\ 0, & \text{그렇지 않을 경우}\end{cases}$$

그러면, 링크 (i,j)의 가동성은

$$A_{ij}(t)=\Pr\{X_{ij}(t)=1\}$$

이 된다. 여기서, 링크 (i,j)의 가동은 노드 i와 j가 연결 가능함을 의미하며, 가동성은 이의 확률을 의미한다.

우선, 네트워크 전체의 구조함수를 정의하기 위해 먼저 B_{ij}^l와 C_{ij}^l를 각각 아래와 같이 정의하자.

B_{ij}^l : i와 j사이의 최소 경로(minimal path) 집합, $(1\le i< j\le N)$, $l=1,\cdots,p_{ij}$
C_{ij}^l : i와 j사이의 최소 절단(minimal cut) 집합, $(1\le i< j\le N)$, $l=1,\cdots,k_{ij}$.

여기서, B_{ij}^l가 최소 경로 집합이란 L의 부분 모임으로 이 안의 링크들이 모두 가동하면 노드 i와 노드 j 사이가 가동(연결 가능)함을 보장해 주는 최소 모임이다. 그리고, C_{ij}^l가 최소 절단 집합이란 역시 L의 부분 모임으로 이 안의 모든 링크들이 가동하지 않으면 노드 i와 노드 j 사이가 가동(연결)될 수 없음을 보장해 주는 최소 모임이다.

노드 i와 노드 j의 연결상태를 나타내는 구조함수를 아래와 같이 정의하면

$$\phi_{ij}(X(t))=\begin{cases}1, & \text{시점 } t\text{에서 } i\text{와 } j\text{사이가 가동중일 경우}\\ 0, & \text{그렇지 않을 경우}\end{cases}$$

$\phi_{ij}(X(t))$는 시스템의 구조함수 이론을 통하여 다음과 같이 표현됨을 알 수 있다.

$$\phi_{ij}(X(t))=\coprod_{1\le l\le p_{ij}}\prod_{(m,n)\in B_{ij}^l}X_{mn}(t)=\prod_{1\le l\le k_{ij}}\coprod_{(m,n)\in C_{ij}^l}X_{mn}(t)$$

여기서, $\coprod_{i=1}^{n} X_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - X_i(t))$이다.

본 논문에서는, 네트워크의 모든 노드들이 서로 직접 또는 다른 노드들을 통하여 간접적으로 연결될 수 있어야 네트워크가 가동한다고 정의한다. 따라서, 네트워크 전체의 구조함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\phi(X(t)) \ = \min\{\phi_{ij}(X(t)) \mid 1 \le i < j \le N\}$$

여기서, 네트워크의 구조함수가 노드 i와 노드 j사이의 구조함수들의 최소값으로 주어진다는 것은 네트워크 안의 모든 노드 i와 노드 j가 서로 연결되어 있어야만 네트워크의 구조함수가 1이 되어 가동함을 의미한다.

링크 (i, j)의 시점 t에서의 가동성을 $A_{ij}(t)$라 하면 네트워크 시스템의 시점 t에서의 가동성은

$$\Pr\{\phi(X(t)) = 1\} = h(A(t))$$

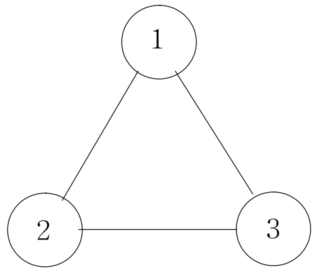
이 된다. 여기서, h는 ϕ의 신뢰도함수이고, $A(t) = (A_{ij}(t) \mid (i, j) \in L)$이다.

참고. 어떤 부품이 시스템의 신뢰도에 더 많이 공헌하는지를 나타내는 척도가 부품의 신뢰중요도(reliability importance)이다. 이것은 부품의 신뢰도가 증가할 때, 시스템의 신뢰도의 증가하는 율을 나타낸다. 링크 (i, j)의 시점 t에서의 신뢰중요도는 시스템의 가동성을 링크 (i, j)의 가동성에 대하여 미분한 식으로 아래와 같이 정의된다.

$$I_{ij}(t) = \frac{\partial h(A(t))}{\partial A_{ij}(t)}$$

잘 알려진 원형 네트워크, 브릿지 네트워크, 완전 네트워크에서 가동성과 부품의 신뢰중요도를 실제로 구해보면 아래와 같다. 자세한 계산과정은 생략한다.

(i) 원형 네트워크의 가동성과 부품의 신뢰중요도



<그림 1> 3개의 노드로 이루어진 원형 네트워크

$n(n \geq 3)$개의 노드로 이루어진 원형 네트워크에서 가동성을 구해보면 다음과 같다.

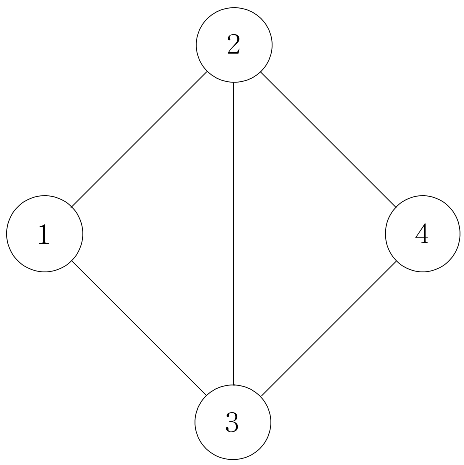
$$h(A(t)) = \sum_{j=1}^{n} \prod_{i \neq j} A_{i,\, i+1}(t) - (n-1) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\, i+1}(t)$$

여기서, $A_{n,\, n+1}(t) = A_{1,\, n}(t)$이다. 모든 링크 (i, j)에 대하여 $A_{ij}(t) = A(t)$라고 한다면 시점 t에서의 시스템 가동성과 링크 (i, j)의 신뢰중요도는 각각 다음과 같다.

$$h(A(t)) = n\{A(t)\}^{n-1} - (n-1)\{A(t)\}^{n}$$

$$I_{ij}(t) = (n-1)\{A(t)\}^{n-2} - (n-1)\{A(t)\}^{n-1}$$

(ii) 브릿지 네트워크의 가동성과 부품의 신뢰중요도



<그림 2> 4개의 노드로 이루어진 브릿지 네트워크

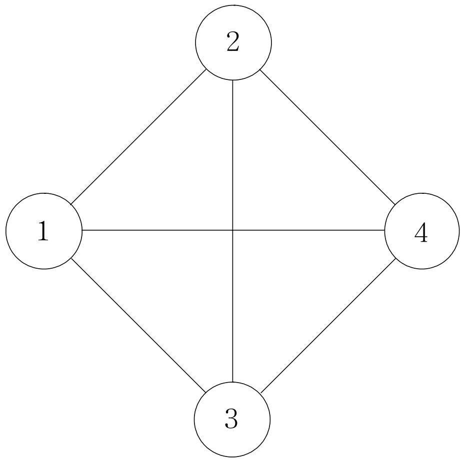
<그림 2>는 4개의 노드와 5개의 링크로 이루어진 브릿지 네트워크를 나타내고 있다. 모든 링크 (i, j)에 대하여 $A_{ij}(t) = A(t)$라면, 브릿지 네트워크의 가동성은

$$h(A(t)) = 8\{A(t)\}^{3} - 11\{A(t)\}^{4} + 4\{A(t)\}^{5}$$

이 되고, 각 링크의 신뢰중요도는 다음과 같이 구해진다.

$$I_{12}(t) = I_{13}(t) = I_{24}(t) = I_{34}(t)$$
$$= \{A(t)\}^2\{1-A(t)\}[4\{1-A(t)\}+1]$$
$$I_{23}(t) = 4\{A(t)\}^2\{1-A(t)\}^2$$

(iii) 완전 네트워크의 가동성과 부품의 신뢰중요도



<그림 3> 4개의 노드로 이루어진 완전 네트워크

<그림 3>는 4개의 노드로 이루어진 완전 네트워크로서 모든 노드들이 서로 링크를 통해 연결되어 있다. 여기서도 모든 링크 (i,j)에 대하여 $A_{ij}(t)=A(t)$라면, 가동성은

$$h(A(t)) = 16\{A(t)\}^3 - 33\{A(t)\}^4 + 24\{A(t)\}^5 - 6\{A(t)\}^6$$

이 되고, 각 링크의 신뢰중요도는 다음과 같이 구해진다.

$$I_{12}(t) = I_{13}(t) = I_{14}(t) = I_{23}(t) = I_{24}(t) = I_{34}(t)$$
$$= 8\{A(t)\}^2 - 22\{A(t)\}^3 + 20\{A(t)\}^4 - 6\{A(t)\}^5$$

예제. 각 링크의 고장시간의 분포와 수리시간의 분포가 각각 $F(t)=1-e^{-\alpha t}$와 $G(t)=1-e^{-\beta t}$인 지수분포로 주어지면, 각 링크의 가동성이

$$A(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} e^{-(\alpha+\beta)t}$$

로 주어지고, 특히, 장시간에 걸친 링크의 가동성은 $\lim_{t\to\infty} A(t) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ 로 주어져, 위에서 고려된 네트워크들의 가동성이 명확한 형태로 구해질 수 있다.

4. 평균 고장수와 수리수

Baxter(1983)는 n개의 부품으로 이루어진 시스템에서 j번째 부품의 고장시간과 수리시간의 분포함수가 각각 $F_j(t) = 1 - e^{-\alpha t}$, $G_j(t) = 1 - e^{-\beta t}$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$를 따른다고 할 때, 직렬시스템과 병렬시스템에서 시점 t까지의 평균 고장수와 평균 수리수를 다음과 같이 구해놓았다. 직렬시스템일 때 시점 t까지의 평균 고장수는

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \lambda_j(u) I_j(u)\, du \\ &= \frac{n\alpha^{n+1}}{(\alpha+\beta)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \left[\frac{1 - e^{-(\alpha+\beta)(n-k)t}}{n-k}\right] \end{aligned}$$

이고, 평균 수리수는

$$\begin{aligned} \Xi(t) &= \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \xi_j(u) I_j(u)\, du \\ &= \frac{n\alpha^n \beta}{(\alpha+\beta)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \\ &\quad \cdot \left[\frac{1 - e^{-(\alpha+\beta)(n-k-1)t}}{n-k-1} - \frac{1 - e^{-(\alpha+\beta)(n-k)t}}{n-k}\right] \end{aligned}$$

이다. 여기서 $\lambda_j(t) = \frac{d}{dt} \Lambda_j(t)$, $\Lambda_j(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_j^{(n+1)} * G_j^{(n)}(t)$이고, $\xi_j(t) = \frac{d}{dt} \Xi_j(t)$이며, $I_j(t)$는 시점 t에서 j번째 부품의 신뢰중요도이다.

본 절에서도 Baxter(1983)에서와 같이 모든 링크들의 고장시간의 분포와 수리시간의 분포를 각각 $F(t) = 1 - e^{-\alpha t}$, $G(t) = 1 - e^{-\beta t}$라고 놓고, 3절에서 다룬 네트워크들의 시점 t까지의 평균 고장수와 수리수를 구해보면 아래와 같다. 자세한 계산과정은 복잡하여 생략한다.

(i) 원형 네트워크의 평균 고장수와 수리수

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &= n\int_0^t \lambda(u)I(u)du \\ &= \frac{n(n-1)\alpha^{n+1}}{(\alpha+\beta)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \\ &\quad \cdot\left[\frac{1-e^{-(\alpha+\beta)(n-k-1)t}}{n-k-1}-\frac{1-e^{-(\alpha+\beta)(n-k)t}}{n-k}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Xi(t) &= n\int_0^t \xi(u)I(u)du \\ &= \frac{n(n-1)\alpha^n\beta}{(\alpha+\beta)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n-2} {}_{n-2}C_k\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \\ &\quad \cdot\left[\frac{1-e^{-(\alpha+\beta)(n-k-2)t}}{n-k-2}-2\frac{1-e^{-(\alpha+\beta)(n-k-1)t}}{n-k-1}\right. \\ &\quad \left.+\frac{1-e^{-(\alpha+\beta)(n-k)t}}{n-k}\right]\end{aligned}$$

(ii) 브릿지 네트워크의 평균 고장수와 수리수

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &= 4\int_0^t \lambda(u)I_{12}(u)\,du+\int_0^t \lambda(u)I_{23}(u)\,du \\ &= 4\int_0^t \lambda(u)[6\{A(u)\}^2-11\{A(u)\}^3+5\{A(u)\}^4]du \\ \Xi(t) &= 4\int_0^t \xi(u)I_{12}(u)\,du+\int_0^t \xi(u)I_{23}(u)\,du \\ &= 4\int_0^t \xi(u)\,[6\{A(u)\}^2-11\{A(u)\}^3+5\{A(u)\}^4]du\end{aligned}$$

여기서, $\int_0^t \lambda(u)\{A(u)\}^n du$와 $\int_0^t \xi(u)\{A(u)\}^n du$는 $n=1,2,\cdots$에 대해

$$\begin{aligned}&\int_0^t \lambda(u)\{A(u)\}^n du \\ &= \frac{\alpha^{n+2}}{(\alpha+\beta)^{n+1}}\int_0^t\left[\frac{\beta}{\alpha}+e^{-(\alpha+\beta)u}\right]^{n+1}du \\ &= \frac{\alpha^{n+2}}{(\alpha+\beta)^{n+2}}\sum_{k=0}^{n} {}_{n+1}C_k\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k\left[\frac{1-e^{-(\alpha+\beta)(n-k+1)t}}{n-k+1}\right]\end{aligned}$$

$$\int_0^t \xi(u)\{A(u)\}^n du$$
$$= \frac{\alpha^{n+1}\beta}{(\alpha+\beta)^{n+1}} \int_0^t \{1-e^{-(\alpha+\beta)u}\}\left[\frac{\beta}{\alpha}+e^{-(\alpha+\beta)u}\right]^n du$$
$$= \frac{\alpha^{n+1}\beta}{(\alpha+\beta)^{n+2}} \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k\left[\frac{1-e^{-(\alpha+\beta)(n-k)t}}{n-k} + \frac{1-e^{-(\alpha+\beta)(n-k+1)t}}{n-k+1}\right]$$

로 계산된다.

(iii) 완전 네트워크의 평균 고장수와 수리수

$$\Lambda(t) = 6\int_0^t \lambda(u) I_{12}(u)\,du$$
$$= 6\int_0^t \lambda(u)[8\{A(t)\}^2 - 22\{A(t)\}^3 + 20\{A(t)\}^4 - 6\{A(t)\}^5]du$$
$$\Xi(t) = 6\int_0^t \xi(u) I_{12}(u)\,du$$
$$= 6\int_0^t \xi(u)[8\{A(t)\}^2 - 22\{A(t)\}^3 + 20\{A(t)\}^4 - 6\{A(t)\}^5]du$$

여기서, $\int_0^t \lambda(u)\{A(u)\}^n du$와 $\int_0^t \xi(u)\{A(u)\}^n du$는 앞에서와 같이 계산된다.

참고문헌

1. Barlow, R. E. and Proschan, F. (1973). Availability theory for multicomponent systems, *In Multivariate Analysis III*, edited by P. R. Krishnaiah, Academic Press, New York, 319-335.
2. Barlow, R. E. and Proschan, F. (1981). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rienehart and Winston, New York.
3. Baxter, L. A. (1981). Availability measures for a two-state system, *Journal of Applied Probability*, 18, 227-235.
4. Baxter, L. A. (1983). Availability Measures for coherent systems of separately maintained components, *Journal of Applied Probability*, 20, 627-636.
5. Cox, D. R. (1962). *Renewal Theory*, Methuen, London.

[2003년 10월 접수, 2004년 1월 채택]