

페루프 공진 주파수를 이용한 모델 개선법

Model Updating Using the Closed-loop Natural Frequency

정 훈 상* · 박 영 진†

Jung Hunsang and Park Youngjin

(2004년 3월 30일 접수 ; 2004년 7월 18일 심사완료)

Key Words : Model Updating(모델 개선법), Output Feedback(출력 제환 제어), Closed-loop Natural Frequency(페루프 공진 주파수)

ABSTRACT

Parameter modification of a linear finite element model(FEM) based on modal sensitivity matrix is usually performed through an effort to match FEM modal data to experimental ones. However, there are cases where this method can't be applied successfully: lack of reliable modal data and ill-conditioning of the modal sensitivity matrix constitute such cases. In this research, a novel concept of introducing feedback loops to the conventional modal test setup is proposed. This method uses closed-loop natural frequency data for parameter modification to overcome the problems associated with the conventional method based on modal sensitivity matrix. We proposed the whole procedure of parameter modification using the closed-loop natural frequency data including the modal sensitivity modification and controller design method. Proposed controller design method is efficient in changing modes. Numerical simulation of parameter estimation based on time-domain input/output data is provided to demonstrate the estimation performance of the proposed method.

1. 서 론

대상으로 하는 진동 시스템의 진동 특성을 수학적
으로 모델링하고 이런 초기 모델과 실험 결과의 차이
를 줄이도록 모델의 계수들을 보정해 주는 일련의 방
법론을 모델 개선법(model updating)이라고 하며 이
는 구조 시스템 규명의 중요한 분야이다. 많이 사용
되고 있는 민감도를 이용한 모델 개선을 수행하기 위
해서는 시스템의 공진 주파수와 모드 형상이 실험을
통해 측정되어야 하는데 이런 측정값은 측정 기기의
주파수 한계와 잡음의 영향으로 그 개수와 신뢰도에

한계가 있어서 과결정(under-determined) 문제와 약
조건(ill-condition)문제 등을 유발하는 것으로 알려져
있다.^(1, 2) 많은 실험 결과에 의하면 실험을 통해 구한
고유치에는 대략 1% 정도의 작은 오차가 존재하
지만 고유 벡터에는 측정 오차뿐만 아니라 모드 확대
(mode expansion), 정상화(normalization)과정을 통
해 오차가 누적되어 위치에 따라 대략 10% 정도의
비교적 큰 오차가 존재하는 것으로 알려져 있다.⁽³⁾
이 경우 모드 벡터에 포함된 편향 오차들은 개선된
질량 및 강성 계수에 큰 편향 오차를 유발하게 되어
개선된 모델에 대한 신뢰도를 떨어뜨리게 된다. 편향
오차가 포함된 고유 벡터를 이용하지 않고 비교적 오
차가 적은 고유치만을 이용할 경우 추정할 모델 계
수의 수보다 측정값의 수가 적어져서 유일한 해를 구
할 수 없게 되는 과결정 문제(under-determined)가
발생한다.

오차가 포함된 고유 벡터 정보를 쓰지 않고 모델

† 책임저자 : 정희원, 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : yjpark@mail.kaist.ac.kr
Tel : (042) 869-3036, Fax : (042) 869-8220

* 정희원, 한국과학기술원 기계공학과

개선에 필요한 고유치 정보량을 늘이는 방법론에 대한 연구는 그 동안 많이 진행되었다. W. D'ambrogio⁽⁴⁾ 등은 반대 공진점(anti-resonance point)을 모델 개선에 포함시키는 방법론을 제시하였고 S. li⁽⁵⁾ 등은 실제로 시스템의 경계 조건을 변형시켜서 공진 주파수 정보를 늘였다. 이와 유사하게 N. Nalitolela⁽⁶⁾ 등은 점 질량이나 점 강성을 시스템에 부착하여 변형된 시스템에 대한 고유치를 측정하는 방법을 제안하였고 최근에 P.D. Cha⁽⁷⁾ 등이 이것을 응용하여 모델 계수의 유일한 해를 구하는 방법을 제안하였다. 또한 J. H. Gordis⁽⁸⁾ 등과 N. Nalitolela⁽⁹⁾ 등은 각각 가상 경계 조건과 가상 강성 부착법을 통해 측정 FRF 결과로부터 다른 주파수 정보를 얻어내는 방법을 제안하였다. 반대 공진점 방법은 반대 공진점의 존재가 시스템의 전체적인 성질로 나타나지 않고 그 값이 고유치에 독립적이지 않기 때문에 새로운 정보를 확보하지는 못한다. 점 질량이나 점 강성을 시스템에 부착하는 방법은 정보의 수를 늘이는데 용이하지만 실제로 점 질량이나 점 강성을 부착하는 데는 어려움이 있으며 변형의 크기에도 한계가 있다. 가상 경계 조건이나 가상 강성 부착법은 실제적인 측정 정보를 확보하지 못하고 단순히 초기 측정 결과를 가지고 종속적인 정보량을 늘여서 유일해를 구하는 것에만 초점을 맞추고 있다는 문제점이 있다.

고유치와 고유 벡터의 민감도를 이용하는 모델 개선법의 두번째 문제점으로 민감도 행렬의 약조건(ill conditioning)을 들 수 있다. 민감도 행렬의 약조건은 유한 요소 모델의 특정 모델 변수들에 대한 민감도가 서로 유사하여 민감도 행렬의 특정 열들이 서로 매우 비슷하게 나올 때 발생하는 문제이다. 이 경우 측정값에 포함된 작은 편향 오차가 개선된 모델 변수에 상대적으로 매우 큰 편향 오차로 반영되게 되고 특히 민감도 행렬의 조건(condition)이 매우 안좋을 경우 모델 변수가 반복 계산 중에 발산할 수도 있다. 이 문제에 대한 기존의 연구⁽¹⁰⁾는 주로 모델 변수의 매 회 계산 중에 발산하는 것을 막아주는 것에 치중되어 있었다.

본 논문에서는 모델 개선에서 대표적인 이 두 가지 문제점들을 해결하기 위해서 Fig. 1과 같이 기존의 모달 테스트를 위해 사용되는 센서로부터 가진기 사이에 페루프 제어기를 걸어주는 방법을 제안한다. 페루프

한 루프에 의해 변형된 시스템은 가진기 및 센서들의 위치 그리고 각 센서의 케환 이득값에 따라 무수히 많이 존재한다. 케환 가진기를 통해 시스템에 새로운 에너지 전달 경로를 만들어 줌으로써 페루프 고유치 정보를 측정하고 이를 모델 개선 과정에 사용하면 원래 시스템의 고유치 민감도만을 사용할 경우 발생하는 정보 부족 문제를 해결할 수 있다. 또한 가진기 및 센서들의 위치와 케환 이득값의 적절한 선택을 통해 고유치 민감도 행렬의 약조건을 유발했던 모델 계수의 민감도 행렬의 조건(condition)을 좋게 변화시킬 수 있어 약조건 문제도 해결할 수 있게 된다. 본 논문에서는 페루프 공진 주파수를 이용하여 모델 개선을 하는 전체 과정을 제안하였다. 우선 페루프 공진 주파수의 모델 계수에 대한 민감도를 구하는 방법을 제안하고 이를 통해 페루프 공진 주파수를 모델 개선에 포함하는 방법을 제안하였다. 페루프 공진 주파수가 새로운 정보로서 모델 개선에 사용되기 위해서는 원래 시스템의 공진 주파수로부터 크게 달라질수록 좋다. 때문에 본 논문에서는 모드 변화에 적합한 제어기 설계 방법을 제안하였다. 제안된 제어 방법을 설명하기 위해서 클램프 빔에 대한 페루프 제어기 시뮬레이션 결과를 소개하고 최종적으로 제안된 모델 개선 방법과 기존 방법의 모델 개선 성능에 대한 비교를 수행하였다.

2. 시스템 모델링 및 모델 개선 방법

시불변의 진동 구조물의 모델은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} = \mathbf{b}f_a \quad (1)$$

$$\mathbf{b}(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = a \\ 0 & \text{if } i \neq a, \end{cases} \quad (2)$$

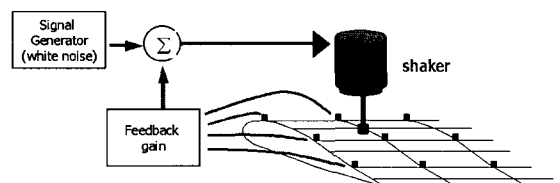


Fig. 1 Concept of control loop addition

여기서 a 는 가진기가 놓여진 노드의 위치를 나타낸다. 이 시스템 모델의 모달 데이터는 다음의 특성을 가진다.

$$KW = MW\Lambda, \quad (3)$$

$$W^T MW = I, W^T KW = \Lambda, \quad (4)$$

$$W = [W_1 \ W_2 \ \dots \ W_n], \Lambda = \text{diag}[\lambda_i], \quad (5)$$

여기서 Λ 와 W 는 각각 $n \times n$ 의 고유치 및 고유벡터 행렬이다. W 는 질량 및 강성 행렬에 대해 직교성을 가진다.

2.1 기본 모델 개선법

우리가 개선하고자 하는 M 과 K 는 유한 요소 모델과 같은 초기 모델로부터 얻어지는 M_0 및 K_0 와 구하고자 하는 모델계수에 대한 섭동의 합으로 표현된다.

$$M = M_0 + \sum_{j=1}^l \delta\theta_j \frac{\partial M}{\partial \theta_j}, \quad K = K_0 + \sum_{j=1}^l \delta\theta_j \frac{\partial K}{\partial \theta_j}, \quad (6a,b)$$

여기서 θ_j 와 l 은 각각 모델 계수와 그 수이다. $\partial M/\partial \theta_j$ 와 $\partial K/\partial \theta_j$ 는 질량 및 강성 행렬의 모델 계수에 대한 민감도로서 초기 모델로부터 얻어지는 값이다. 주어진 모델 계수에 대한 공진 주파수의 민감도는 다음과 같이 얻어진다.^(1, 2)

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta} = W_i^T \left[\frac{\partial K}{\partial \theta} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial \theta} \right] W_i, \quad S = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta_j} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \theta_j} \end{bmatrix}, \quad (7a,b)$$

여기에서 S 는 고유치 민감도 행렬이고 구체적인 모드를 표현하기 위해 아래첨자 i 를 사용하였다. 시스템과 초기 모델의 차이가 모델 계수에 대한 1차의 섭동으로 표현이 된다면 시스템과 모델 사이의 모달 데이터 차이 역시 모델 계수의 섭동에 대해 선형적으로 관련되어 있다.

$$\delta z = S \delta p, \quad (8)$$

여기서 $\delta p = p_r - p$ 와 $\delta z = z_r - z$ 이다. p 와 z 는

각각 모델 계수 벡터와 모델의 고유치 벡터이다. 아래 첨자 r 가 붙은 기호들은 실제 시스템의 특성을 나타낸다. 모델 계수들은 아래의 성능 지수를 이용하여 z 와 z_r 의 차이를 최소화하며 구해지게 된다.

$$J(\delta p) = \{\delta z - S \delta p\}^T \{\delta z - S \delta p\}, \quad (9)$$

이 문제의 해는 다음과 같이 일반 역함수를 통해 구해진다.

$$\delta p = S^+ \delta z, \quad (10)$$

일반적으로 모델 계수와 모달 데이터 사이의 비선형성을 보상하기 위해 반복 계산이 사용된다. 측정 오차의 분산과 같은 정보가 있는 경우에는 최소 분산 추정법(minimum variance estimation)과 같은 확률적인 방법을 사용할 수 있다.

3. 페루프 공진 주파수를 사용한 모델 개선 과정

3.1 페루프 시스템 구성

페루프 시스템을 구성하기 위해서는 Fig. 2에 나타나 있듯이 입출력이 각각 (a) 및 (c)로 바뀌면서 제어 루프와 가진기의 동특성이 시스템 모델에 추가된다.

전자기 가진기의 동특성은 아마튜어 질량과 연결된 스프링을 고려함으로써 쉽게 표현된다.

$$m_a \ddot{x}_a + c_a \dot{x}_a + k_a x_a + f_a = f_e, \quad (11)$$

여기서 m_a, k_a, c_a 와 x_a 는 각각 아마튜어 질량, 스프링 강성, 댐핑, 아마튜어의 변위이다. 여기에서 전

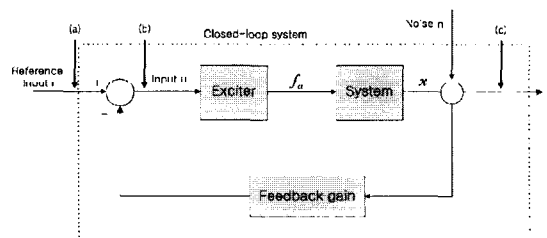


Fig. 2 Construction of closed-loop system

자기 힘 f_e 는 아마튜어 질량을 가진시키고 스팅어를 통해 시스템에 가진력 f_a 를 전달해준다. 식 (11)은 시스템 모델의 변위 벡터를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{m}_a \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{c}_a \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{k}_a \mathbf{x} + \mathbf{f}_a = \mathbf{f}_e, \quad (12)$$

여기서 \mathbf{m}_a 는 가진기가 놓여진 번째 요소값이 이고 나머지는 0인 행 벡터이고 \mathbf{c}_a 와 \mathbf{k}_a 도 같은 방식으로 표현되어 있다. 케환 이득값에 측정된 출력값이 곱해져서 가진기 입력값에 더해짐으로써 페루프가 완성되게 된다.

$$\mathbf{f}_e = \mu_F (\mathbf{r} - \mathbf{k}_r \mathbf{x} - \mathbf{c}_r \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{m}_r \ddot{\mathbf{x}}), \quad (13)$$

여기에서 \mathbf{r} 은 기준 가진 신호이며 \mathbf{k}_r , \mathbf{c}_r 와 \mathbf{m}_r 는 각각 변위, 속도, 가속도 측정값에 해당하는 케환 이득값이다. μ_F 는 가진기의 전기적 동특성을 나타내기 위해서 사용되었다. 사용 주파수 영역에서 가진기 앰프의 전기적 특성이 기계적 특성에 비해 매우 빠르기 때문에 이 값은 상수로 생각할 수 있다. 식 (1)에 식 (12)와 (13)을 넣어서 정리하면 다음과 같이 페루프 시스템에 대한 모델을 구할 수 있다

$$(\mathbf{M} + \mathbf{b}\mathbf{m}_a + \mu_F \mathbf{b}\mathbf{m}_r) \ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{C} + \mathbf{b}\mathbf{c}_a + \mu_F \mathbf{b}\mathbf{c}_r) \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \mathbf{b}\mathbf{k}_a + \mu_F \mathbf{b}\mathbf{k}_r) \mathbf{x} = \mu_F \mathbf{b}\mathbf{r}. \quad (14)$$

원래 질량, 댐핑, 강성 행렬에 가진기 동특성과 케환 이득값 행렬들이 더해진다. 중요한 점은 케환 루프에 의해 시스템 행렬의 대칭성이 깨진다는 점이다. 이런 비대칭성은 센서와 가진기가 같은 위치에 놓여지 있지 않음으로 인하여 발생하는 특성이다. 통상적인 고유치 민감도의 유도는 시스템 행렬들의 대칭성에 바탕하고 있기 때문에 페루프 데이터를 사용하기 위해서는 고유치 민감도를 수정해 주어야만 한다.

3.2 모델 개선 과정 수정

식 (14)에 의하면 페루프로 인하여 시스템 행렬들은 다음과 같이 바뀐다.

$$\mathbf{M}_f = \mathbf{M}_0 + \mathbf{b}\mathbf{m}_a + \mu_F \mathbf{b}\mathbf{m}_r, \quad \mathbf{K}_f = \mathbf{K}_0 + \mathbf{b}\mathbf{k}_a + \mu_F \mathbf{b}\mathbf{k}_r, \quad (15a,b)$$

위의 비대칭의 시스템 행렬들에 대해서는 좌/우 고유 벡터가 따로 존재하게 되고 다음의 부직교성(biorthogonality)이 성립하게 된다.

$$\mathbf{K}_f \mathbf{W}^R = \mathbf{M}_f \mathbf{W}^R \Lambda, \quad \mathbf{K}_f^T \mathbf{W}^L = \mathbf{M}_f^T \mathbf{W}^L \Lambda, \quad (16)$$

$$(\mathbf{W}^L)^T \mathbf{K}_f \mathbf{W}^R = \Lambda, \quad (\mathbf{W}^L)^T \mathbf{M}_f \mathbf{W}^R = \mathbf{I}, \quad (17a,b)$$

여기서 \mathbf{W}^R 은 \mathbf{W}^L 은 각각 좌/우 고유벡터이다. 이 부직교성을 이용해서 구해지는 페루프 고유치의 민감도는 다음과 같다.⁽¹¹⁾

$$\frac{\partial_c \lambda_i}{\partial \theta_j} = (\mathbf{W}_i^L)^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}_f}{\partial \theta_j} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}_f}{\partial \theta_j} \right] \mathbf{W}_i^R, \quad (18)$$

기존의 방법과 다른 점은 좌/우 고유벡터를 모두 사용해야만 한다는 점이다. 이 수정된 고유치 민감도를 사용하여 모델 계수와 페루프 공진 주파수 정보 사이의 선형적 관계를 구할 수 있다.

$$\mathbf{z}_i' - \mathbf{z}_i = \mathbf{S}^i \delta \mathbf{p}, \quad (19)$$

여기서 아래첨자 i 는 i 번째 페루프 제어기를 사용할 때 얻어지는 모달 데이터 및 민감도 행렬을 나타내기 위해서 사용하였다. 많은 페루프 정보를 모두 성능 지수에 포함하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} J(\delta \mathbf{p}) &= \{\delta \mathbf{z}^0 - \mathbf{S}^0 \delta \mathbf{p}\}^T \{\delta \mathbf{z}^0 - \mathbf{S}^0 \delta \mathbf{p}\} + \\ &\{\delta \mathbf{z}^1 - \mathbf{S}^1 \delta \mathbf{p}\}^T \{\delta \mathbf{z}^1 - \mathbf{S}^1 \delta \mathbf{p}\} + \dots \\ &+ \{\delta \mathbf{z}^k - \mathbf{S}^k \delta \mathbf{p}\}^T \{\delta \mathbf{z}^k - \mathbf{S}^k \delta \mathbf{p}\} \\ &= \{\delta \mathbf{z} - \mathbf{T} \delta \mathbf{p}\}^T \{\delta \mathbf{z} - \mathbf{T} \delta \mathbf{p}\}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{0'} & \mathbf{S}^{1'} & \dots & \mathbf{S}^{k'} \end{bmatrix}^T,$$

$$\delta \mathbf{z} = \begin{bmatrix} (\mathbf{z}_r^0 - \mathbf{z}^0)^T & (\mathbf{z}_r^1 - \mathbf{z}^1)^T & \dots & (\mathbf{z}_r^k - \mathbf{z}^k)^T \end{bmatrix}^T, \quad (21a,b)$$

여기서 \mathbf{T} 는 통합 민감도 행렬이다. 페루프 공진 주파수를 성능 지수에 포함함으로써 측정 데이터의 양이 늘어났고 민감도에도 변화가 생겼다. 페루프 제

여기를 적절히 설계해 준다면 통합 민감도 행렬의 조건을 좋게하면서 데이터의 양을 늘릴 수 있다.

4. 제어기 설계

제어기 설계는 센서 및 가진기의 위치 선정과 해당하는 케환 이득값 결정으로 구성된다. 이를 위해서 우선 페루프 모달 데이터의 센서 및 가진기 위치와 케환 이득값에 대한 특성을 살펴보아야 한다.

4.1 페루프 모달 데이터의 근사 특성

가속도계를 사용하여 페루프를 구성한 경우를 살펴보자. 이 경우 식 (13)의 케환 이득값 벡터는 다음과 같이 구성된다.

$$\mathbf{m}_r = [g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_n], \mathbf{c}_r = 0, \mathbf{k}_r = 0 \quad (22)$$

여기서 g_s 는 s 번째 노드에 위치한 가속도계에 해당하는 케환 이득값이다. 이 경우 페루프 시스템의 질량 및 강성 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_r = \bar{\mathbf{M}} + \mathbf{b}\mathbf{m}_r = \bar{\mathbf{M}} + \begin{bmatrix} & \ominus & & \\ g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ & & \ominus & \end{bmatrix}, \mathbf{K}_r = \bar{\mathbf{K}} \quad (23)$$

여기서 $\bar{\mathbf{M}}$ 와 $\bar{\mathbf{K}}$ 는 각각 질량 및 강성 행렬에 가진기의 아마튜어 질량과 스프링 강성을 포함한 행렬이다. 페루프 질량 행렬을 보면 모든 변화가 가진기가 놓여진 번째 노드에 해당하는 행에서만 일어나는 것을 확인할 수 있다. 이 식을 이용하면 g_s 에 대한 고유치 민감도 식을 구할 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda_t}{\partial g_s} = \mathbf{W}_t^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}_r}{\partial g_s} - \lambda_t \frac{\partial \mathbf{M}_r}{\partial g_s} \right] \mathbf{W}_t = -\lambda_t \mathbf{W}_{ts} \mathbf{W}_{ts}^T \quad (24)$$

여기서 t 는 제어하고자 하는 모드를 의미한다. 대상 모드의 변화는 대상 모드 형상의 가진기 위치에서의 값 W_{ts} 와 센서 위치에서의 값 W_{ts} 에 비례한다. 대상 모드 형상의 민감도 역시 같은 방식으로 모드 형상 민감도 식을 이용하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{W}_r}{\partial g_s} &= \sum_{j=1, j \neq t}^n \frac{W_j \mathbf{W}_j^T}{\lambda_j - \lambda_t} \left[\frac{\partial \mathbf{K}_r}{\partial g_s} - \lambda_t \frac{\partial \mathbf{M}_r}{\partial g_s} \right] \mathbf{W}_j - \frac{1}{2} \mathbf{W}_t \mathbf{W}_t^T \frac{\partial \mathbf{M}_r}{\partial g_s} \mathbf{W}_t \\ &= \sum_{j=1, j \neq t}^n \frac{\lambda_j \mathbf{W}_{js} \mathbf{W}_{ts}^T}{\lambda_j - \lambda_t} \mathbf{W}_j - \frac{1}{2} \mathbf{W}_t \mathbf{W}_{ts} \mathbf{W}_{ts}^T = \left(\sum_{j=1, j \neq t}^n \frac{\lambda_j \mathbf{W}_{js}^T}{\lambda_j - \lambda_t} \mathbf{W}_j - \frac{1}{2} \mathbf{W}_{ts} \mathbf{W}_t \right) \mathbf{W}_{ts} \end{aligned} \quad (25)$$

식 (24)와 (25)를 이용하여 일반적인 케환 이득값 벡터에 대한 페루프 고유치 및 고유벡터의 근사해를 구할 수 있다. m 개의 센서를 사용할 때, 케환 이득값 벡터를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathbf{m}_r = [g_{s_1} \quad g_{s_2} \quad \dots \quad g_{s_m}] \mathbf{D}_s = \mathbf{G}^T \mathbf{D}_s \quad (26)$$

여기서 \mathbf{D}_s 는 $m \times n$ 의 센서 위치를 나타내는 불리안 행렬이다. j 번째 열의 모든 요소들은 j 번째 센서가 놓여진 노드 위치를 제외하고 모두 0이다. 이때 페루프 고유치와 모드 형상은 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$\lambda_t \approx \lambda_t + \frac{\partial \lambda_t}{\partial \mathbf{G}^T} \mathbf{G} = \lambda_t - \lambda_t \mathbf{W}_{ts} \sum_k^m \mathbf{W}_{ts_k} g_{s_k} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_t &= \mathbf{W}_t + \frac{\partial \mathbf{W}_t}{\partial \mathbf{G}^T} \mathbf{G} = \left(1 - \frac{1}{2} \mathbf{W}_{ts} \sum_{k=1}^m \mathbf{W}_{ts_k} g_{s_k} \right) \mathbf{W}_t \\ &+ \sum_{k=1}^m \sum_{j=1, j \neq t}^n \frac{\lambda_j \mathbf{W}_{js} \mathbf{W}_{ts_k}^T}{\lambda_j - \lambda_t} \mathbf{W}_j g_{s_k} \end{aligned} \quad (28)$$

앞래첨자 c 는 페루프 데이터를 나타낸다. 페루프 모달 데이터는 센서 및 가진기 위치에서의 모드 형상값과 밀접한 관련이 있다. 만약 센서 및 가진기 위치에서의 모드 형상값이 높다면 같은 케환 이득값을 사용할 때 더 큰 모드 변화를 얻을 수 있다. 식 (18)을 살펴보면 페루프 모달 데이터가 원래로부터 많이 바뀌수록 페루프 고유치 민감도도 원래의 민감도로부터 바뀌게 되어 두 민감도 행렬 간의 독립성이 증대되고 이는 통합 민감도 행렬의 조건수(condition number)가 작아지는 쪽으로 개선되는 것에 반영된다. 각각의 제어기에서 모든 모드들을 변화시키는 것은 안정성 면에서 힘들기 때문에 Fig. 3에 나타나 있듯이 각각의 제어기는 특정 모드 하나만을 주로 변화시키는데 주력하도록 되어 있다. 이 때 특정 모드의 변화량을 나타내는 성능 지수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$C_1 = \lambda_r - \lambda_i, \quad C_2 = W_i^T M (W_i - W_i') \quad (29)$$

C_1 과 C_2 는 각각 고유치 및 고유 벡터의 변화량을 나타낸다. 식 (27) 및 (28)의 근사 페루프 모달 데이터를 사용하여 근사해를 구하면 다음과 같다.

$$C_1 = \lambda_i W_{ia} \sum_{k=1}^m W_{ik} g_{s_k}, \quad C_2 = \frac{1}{2} W_{ia} \sum_{k=1}^m W_{ik} g_{s_k} \quad (30a,b)$$

C_1 과 C_2 의 변화를 크게 하기 위해서는 궤환 이득값 g_{s_k} 를 선정하는 방법이 필요하다.

4.2 궤환 이득값 선정

적은 제어력으로 원하는 만큼의 모드 변화를 유발하는 궤환 이득값 선정에 필요한 설계 기준을 다음과 같이 선정할 수 있다.

- (1) 궤환 이득값 벡터는 원하는 모드 변화를 만족해야 한다.
- (2) 필요한 제어 파워는 최소화되어야 한다.
- (3) 궤환 이득값 벡터의 크기는 페루프 시스템의 안정성을 고려하여 최소화되어야 한다.

위의 설계 기준을 만족하는 성능 지수를 정의하기 위해서는 일단 제어 파워를 유도해야만 한다. 식 (1)의 시스템 모델은 변위와 모달 변위사이의 관계를 이용하여 모달 영역으로 변환할 수 있다.

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}\boldsymbol{\eta} \quad (31)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{C}'\dot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{N}(t) \quad (32)$$

여기서 $\boldsymbol{\eta}$ 와 \mathbf{N} 은 각각 모달 좌표계와 모달힘을 나타낸다. \mathbf{N} 과 \mathbf{C}' 은 다음과 같이 모드형상 행렬 \mathbf{W} 를 이용하여 정의할 수 있다.

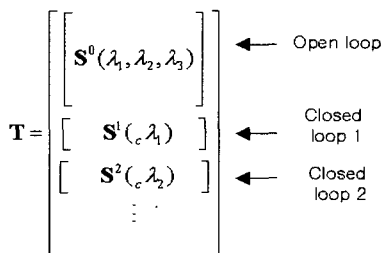


Fig. 3 Combined sensitivity matrix

$$\mathbf{N} = \mathbf{W}^T \mathbf{f}, \quad \mathbf{C}' = \mathbf{W}^T \mathbf{C} \mathbf{W} \quad (33)$$

비례점감쇄(proportional viscous damping) 가정을 통해 개별적인 모드로 분리하면 다음과 같다.

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = N_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (34)$$

$$N_i(t) = W_i^T \mathbf{f}(t) = W_i^T \mathbf{b} f(t) = W_{ia} f(t) \quad (35)$$

여기서 η_i 는 모달 좌표계이고 W_i 는 i 번째 모드형상벡터이고 W_{ia} 는 가진기 위치에서의 모드형상값이다. l 개의 모드가 가진되고 m 개의 가속도계를 사용하는 경우에 궤환 제어력은 다음과 같다.

$$f_c = G^T D_s \ddot{\mathbf{x}}(t) = G^T D_s W \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) = G^T \widehat{W} \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) \quad (36a)$$

$$\widehat{W} = D_s W \quad (36a,b)$$

이 식을 통해 제어 파워를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$E[f_c^2] = E[\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \widehat{W}^T G G^T \widehat{W} \dot{\boldsymbol{\eta}}] = \text{tr}[\widehat{W}^T G G^T \widehat{W} \boldsymbol{\Omega}] = \text{tr}[G^T Q G] \quad (37)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = E[\dot{\boldsymbol{\eta}} \dot{\boldsymbol{\eta}}^T] = \text{diag}(E[\dot{\eta}_1^2], \dots, E[\dot{\eta}_l^2]), \quad Q = \widehat{W} \boldsymbol{\Omega} \widehat{W}^T \quad (38a,b)$$

식 (30)의 C_1 과 C_2 는 같은 구조를 가지고 있기 때문에 하나의 지수로 통합하여 나타낼 수 있다.

$$C_i = \sum_{k=1}^m W_{ik} g_{s_k} = \widehat{W}_i^T G \quad (39)$$

이제 위에서 말한 설계 기준을 만족하는 성능 지수는 다음과 같다.

$$J = E[f_c^2] + \alpha(G^T G) + L(C_i - \varepsilon_i) \quad (40)$$

$$= \text{tr}(G^T Q G) + \alpha(G^T G) + L(\widehat{W}_i^T G - \varepsilon_i),$$

여기서 α 는 궤환 이득값 벡터에 대한 가중치이고 L 은 Lagrange multiplier로 모드 변화량에 대한 제

약조건을 표현하기 위해 사용되었으며 ϵ_i 는 원하는 특정 모드의 모드 변화량을 나타내는 값으로 식 (30)과 식 (39)를 통해 사용자가 결정하는 값이다. 식 (40)의 성능 지수를 최소화할 경우 원하는 모드 변화량 ϵ_i 를 만족하면서 제어 파워 및 제어 이득값 벡터의 크기는 최소화하는 제어 이득값이 구해지게 되고 그 결과는 다음과 같다.

$$G = \frac{(Q + \alpha I)^* \hat{W}_i \epsilon_i}{\hat{W}_i^T (Q + \alpha I)^* \hat{W}_i} = \frac{(\hat{W} \Omega \hat{W}^T + \alpha I)^* \hat{W}_i \epsilon_i}{\hat{W}_i^T (\hat{W} \Omega \hat{W}^T + \alpha I)^* \hat{W}_i} \quad (41)$$

기본적으로 케환 이득값 벡터는 대상 모드의 모드 형상과 유사한 형태를 가지지만 진동 파워의 모드별 분포인 Ω 에 따라 변화가 생기게 된다. 여기서 Ω 는 모드별 파워에 대한 일종의 가중치로 생각할 수 있으며 제어기 설계자에 의해 조정되는 값이다.

5. 시뮬레이션 결과 : 빔 두께 추정

모델 계수의 추정 과정과 제안된 제어기 설계 방법을 설명하기 위해 예제로 Fig. 4와 같이 위치에 따라 두께 변화가 있는 빔을 생각해 보자. 클램프 쪽의 2번 위치에 수직 방향의 힘이 가해지고 10개의 가속도계를 이용하여 수직 방향의 진동이 측정되었다. 이 시스템의 초기 모델은 모든 위치의 두께가 일정한 값으로 가정되어 있다. 요소 2번부터 9번까지의 두께를 가장 낮은 5개의 모드 정보를 이용하여 추정하고자 한다.

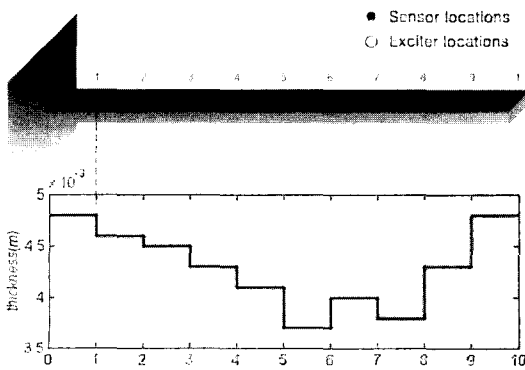


Fig. 4 Beam with thickness variation

5.1 개/페루프 데이터

입출력 데이터를 얻기 위해서 MATLAB을 통한 시간 영역 시뮬레이션을 수행하였다. SNR(signal to noise ratio) 20 dB인 노이즈가 입출력 모두에 더해졌고 3 kHz의 샘플링 주파수로 8192개의 시간 영역 샘플을 구했다. OKID(observer/kalman filter identification)⁽¹²⁾ 방법을 이용하여 충격 응답 함수를 구하였고 ERA(eigendata realization algorithm)⁽¹³⁾와 CBSI(C-ommon basis-normalized structural identification)⁽¹⁴⁾ 방법을 통해 노말 모드 정보를 구하였다. 이 경우 가장 낮은 5개의 모드에 관련된 모드 정보의 개수는 공진 주파수 5개와 10개의 센서 위치에서 측정된 의 모드 형상 행렬을 합쳐 총 55개에 이른다. 8 곳의 두께를 추정하기 위해서는 공진 주파수 정보만으로는 부족하기 때문에 모드형상 정보도 사용하여야 한다. 이제 페루프 데이터의 획득에 대해 살펴보자. 우선 제어기 설계에 포함되지 않는 고주파의 모드들이 발산하는 것을 방지하기 위해서 구동기 입력을 저주파통과필터(low-pass filter)를 통과시킨 후 구동기에 사용하였다. 이 예제에서는 600 Hz까지의 모드들을 바꾸고자 하기 때문에 1 kHz의 cutoff frequency를 가지는 2차의 저주파통과필터가 사용되었다. 페루프 시뮬레이션에서는 7개의 가속도계가 Fig. 4의 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10 위치에 부착되었다. 4번째 모드를 변화시킬 대상 모드로 할 때 식 (4)의 설계에 따른 케환 이득값의 변화와 그 특성을 살펴보자.

$$\Omega = \text{diag}(10^{-2}, 10^{-2}, 10^{-2}, 10^{-2}, 10^{-2}, 10^{-2}, 10, 10, 10), \alpha = 1, \quad (42)$$

첫번째부터 여섯번째까지의 모드들을 변화시키기 위해 각 모달 파워를 상대적으로 낮게 선정하였다. Fig. 5는 그 결과를 보이고 있다. 대상 모드인 네번째 모드뿐만 아니라 다른 모드들도 변하고 있음을 확인할 수 있다. 특히 다섯번째 모드의 경우에는 감쇄율이 낮아져서 진동의 크기가 커지고 있기 때문에 제어 이득값이 더욱 커지면 시스템의 안정성이 깨질 수도 있다. 다섯번째 모드의 변화를 막아서 감쇄율이 낮아지는 것을 방지하기 위해 다섯번째 모드의 모달 파워를 높게 선정하고 다시 제어기를 구성하였다.

$$\Omega = \text{diag}(10^{-2}, 10^{-2}, 10^{-2}, 10, 10^{-2}, 10^{-2}, 10, 10, 10), \alpha = 1, \quad (43)$$

Fig. 6의 결과를 보면 다섯번째 모드에 변화가 전혀 생기지 않는 것을 확인할 수 있다. 이는 제어기 변경을 통해 다섯번째 모드에 가해지는 제어 파워가 매우 낮아졌기 때문이다.

5.2 두께 추정 결과 및 비교

이제 가장 낮은 5개의 측정 모드 정보를 이용하여 빔의 두께를 추정해보자. 개루프의 경우, 5개의 모드를 사용할 경우 5개의 공진 주파수와 50개의 모드 형상 값을 합쳐서 총 55개의 데이터가 있다. 페루프의 경우, 한번의 페루프에서 5개의 페루프를 구성하여 각각 5개의 페루프 공진 주파수를 얻었기 때문에 개/페루프의 공진 주파수를 모두 합쳐서 30개의 데이터가 있다. 각각의 페루프는 식 (42)의 모달 파워분포와 대상 모드 변경을 통해 얻어진 것으로 테이블 1에 그 결과가 정리되어 있다. 제안된 방법과 기존의 방법을 비교하기 위해 페루프의 경우에는 총 25개의 개/

페루프 공진 주파수 정보를 사용하여 두께를 추정하였고 개루프의 경우에는 5개의 공진 주파수와 20개의 모드 형상값을 이용하였다. Fig. 7과 Fig. 8에 나타나 있듯이 페루프 공진주파수를 사용할 때, 같은 데이터 개수에 대해 더 좋은 추정 성능을 얻을 수 있음을 확인할 수 있다. 이는 모든 위치의 FRF 정보를 같이 사용하여 얻어지는 공진주파수에 비해 한 위치의 FRF로부터 한 요소의 값이 구해지는 모드 형상 쪽에 상대적으로 큰 오차가 포함되기 때문이다. 개/페루프 방법의 추정 성능을 좀 더 자세히 살펴보기 위해서 데이터 개수에 따른 추정 오차의 크기를 그려 보았다. Fig. 9에 의하면 같은 데이터 개수에 대해 페루프의 경우가 성능이 더 좋음을 확인할 수 있다. 즉 페루프 공진 주파수를 사용하는 경우 더 작은 데이터를 사용하여 더 좋은 추정 성능을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

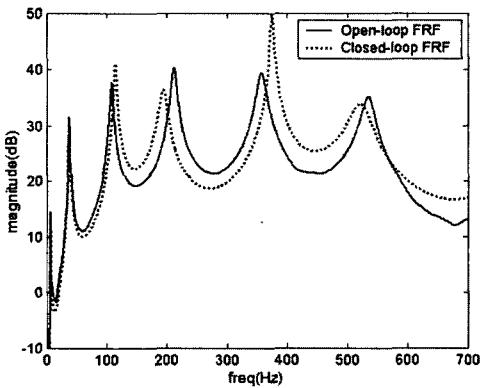


Fig. 5 Open/closed-loop FRF: case 1

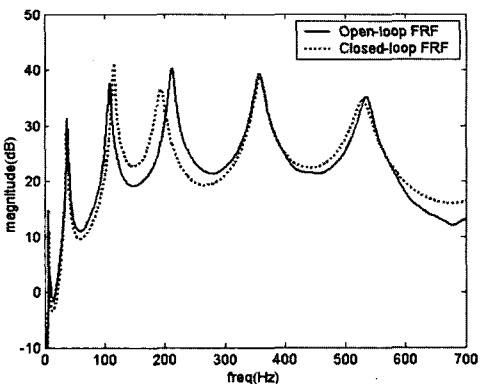


Fig. 6 Open/closed-loop FRF: case 2

Table 1 Mode variation result

Mode	1	2	3	4	5
Open-loop(Hz)	6.780	38.234	108.179	211.457	357.404
Closed-loop case 1 Target mode: 1 st mode	6.177 (-0.603)	41.515 (+3.281)	110.917 (+2.738)	185.375 (-26.082)	324.602 (-32.802)
Closed-loop case 2 Target mode: 2 nd mode	6.821 (+0.041)	34.923 (-3.311)	119.966 (+11.787)	183.341 (-28.116)	350.836 (+6.567)
Closed-loop case 3 Target mode: 3 rd mode	6.782 (+0.002)	39.237 (+1.003)	95.224 (-12.954)	222.046 (+10.589)	351.940 (-5.463)
Closed-loop case 4 Target mode: 4 th mode	6.769 (-0.011)	37.241 (-0.993)	113.650 (+5.471)	193.463 (-17.995)	374.551 (+17.147)
Closed-loop case 5 Target mode: 5 th mode	6.769 (-0.010)	38.076 (-0.157)	107.076 (-1.102)	222.233 (+10.775)	325.478 (-31.926)

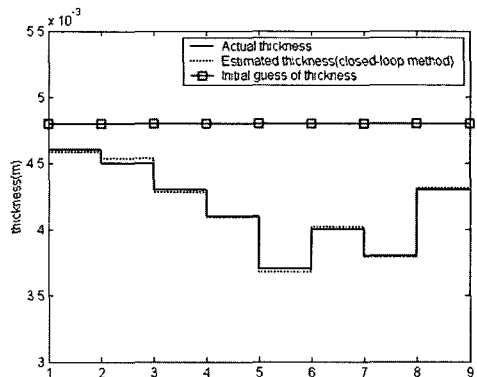


Fig. 7 Thickness estimation result(closed-loop, data number: 25)

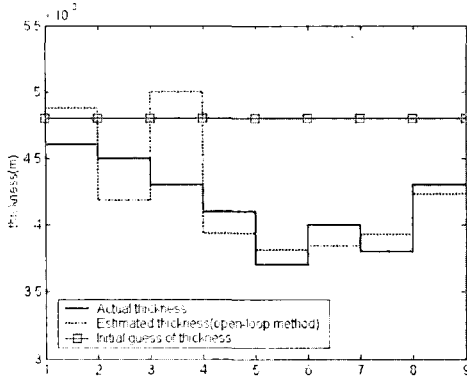


Fig. 8 Thickness estimation result (open-loop, data number: 25)

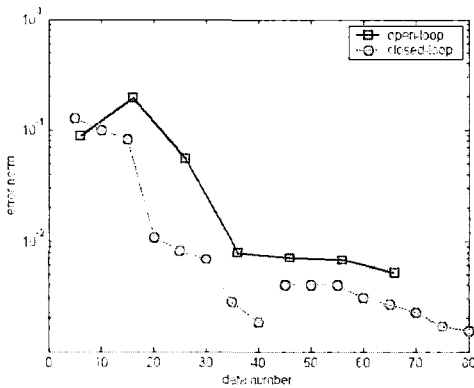


Fig. 9 Estimation error norm according to data number

6. 결론

이 연구에서는 시스템에 페루프를 적용하고 측정된 페루프 공진 주파수를 이용하여 모델 계수를 추정하는 방법론에 대해 다루었다. 우선 페루프 공진 주파수의 모델 계수에 대한 민감도를 구하는 방법을 제안하고 이를 통해 페루프 공진 주파수를 모델 개선에 포함하는 방법을 설명하였다. 페루프 공진 주파수가 새로운 정보로서 모델 개선에 사용되기 위해서는 원래 시스템의 공진 주파수로부터 크게 달라질 수록 좋기 때문에 본 논문에서는 모드 변화에 적합한 제어기 설계 방법을 제안하였다. 제안된 제어 방법을 설명하기 위해서 클램프 빔에 대한 페루프 제어기 시뮬레이션 결과를 소개하고 최종적으로 제안된 모델 개선 방법과 기존 방법의 모델 개선 성능에 대한 비교를 수행하였고 이를 통해 같은 개수의 데이터를 사용할 경

우 페루프 방법이 더 낮은 추정 성능을 얻을 수 있음을 확인하였다.

후기

이 연구는 국가지정연구사업 “진동저감을 위한 동특성 변경기술(2000-N-NL-01-C-148)”과 2004년 두뇌한국 사업(Brain Korea 21) 지원에 의한 것입니다.

참고 문헌

- (1) Mottershead J. E. and Friswell, M. I., 1993, “Model Updating in Structural Dynamics: a Survey,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 167, No. 2, pp. 347~375.
- (2) Friswell, M. I., 1996, *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*, Kluwer academic publishers, London, Chap. 5.
- (3) Dascotte, E., 1990, “Practical Application of Finite Element Tuning Using Experimental Modal Data,” *Proceedings of the 8th International Modal Analysis Conference*, Florida, pp. 1032~1037.
- (4) D’Ambrogio, W. and Fregolent, A., 2000, “The use of Antiresonances for Robust Model Updating” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 236, No. 2, pp. 227~243.
- (5) Li, S., Shelly S. and Brown, D., 1995, “Perturbed Boundary Condition Testing,” *Proceedings of the 13th International Modal Analysis Conference 1*, pp. 902~907.
- (6) Nalitolera, N. G., et al., 1992, “A Mass or Stiffness Addition Technique for Structural Parameter Updating,” *The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 7, Num. 3, pp. 157~168.
- (7) Cha P. D., et al., 2000, “Model Updating Using an Incomplete Set of Experimental Modes,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 233, No. 4, pp. 587~600.
- (8) Gordis, J. H., 1999, “Artificial Boundary Conditions for Model Updating and Damage Detec-

tion," Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 13, No. 3, pp. 437~448.

(9) Nalitlela N., et al., 1993, "Undating Model Parameters by Adding an Imagined Stiffness to the Structure," Mechanical systems and signal processing, Vol. 7, No. 2, pp. 161~172.

(10) Rothwell E., et al., 1989, "A Unified Approach to Solving Ill-conditioned Matrix Problems," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 28, pp. 609~620.

(11) Jung, H. S., et al., 2001, "Model Updating

Using the Feedback Exciter," Asia-Pacific Vibration Conference 2001, Hangzhou, China, pp. 1020~1024.

(12) Juang, J. N., Applied System Identification, Prentice hall, New Jersey, chap. 6.

(13) Juang, J. N., Applied System Identification, Prentice hall, New Jersey, chap. 5.

(14) Alvin, K. F. and Park, K. C. 1994, "Second-order Structural Identification Procedure Via State-space-based System Identification," AIAA Journal, Vol. 32, No. 2, pp. 397~406.