

## 중력 포텐셜에서의 웨이브렛 생성과 응용

김삼태<sup>1</sup> · 진홍성<sup>1</sup> · 임형래<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup>여수대학교 응용수학과, 550-749, 전남 여수시 둔덕동 산 96-1

<sup>2</sup>한국지질자원연구원 지질기반정보연구부, 305-350 대전시 유성구 가정동 30

## Wavelet Generation and It's Application in Gravity Potential

Sam-Tai Kim<sup>1</sup>, Hong-sung Jin<sup>1</sup>, and Hyoungrae Rim<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup>Department of Applied Mathematics, Yosu National University, Jeonnam, 550-749, Korea

<sup>2</sup>Geology and Geoinformation Division, KIGAM, Daejeon, 305-350, Korea

**Abstract:** A wavelet method is applied to the analysis of gravity potential. One scaling function is proposed to generate wavelet. The scaling function is shown to be replaced to the Green's function in gravity potential. The upward continuation can be expressed as a wavelet transform i.e. convolution with the scaling function. The scaling factor indicates the height variation. The multiscale edge detection is carried by connecting the local maxima of the wavelet transform at scales. The multiscale edge represents discontinuity of the geological structure. The multiscale edge method is applied to gravity data from Masan and Changwon.

**Keywords:** wavelet transform, gravity potential, multiscale edge, local maxima

**요 약:** 중력 포텐셜의 해석에 웨이브렛 변환 방법을 적용하였다. 웨이브렛을 만드는 단계 함수가 제안되었다. 단계 함수는 중력 포텐셜에서의 그린 함수로 대체될 수 있음이 보여졌다. 상향연속은 단계함수와의 컨볼루션 곧 웨이브렛 변환으로 표현될 수 있다. 단계인자는 높이 변화를 나타낸다. 다중경계는 각 단계에서의 웨이브렛 변환치의 국부 최대값을 연결하여 구해지며 이는 지층의 불연속면을 나타낸다. 다중경계 방법을 마산 창원지역의 중력자료에 적용하였다.

**주요어:** 웨이브렛 변환, 중력 포텐셜, 다중경계, 국부 최대값

## 서 론

웨이브렛 변환은 최근 20여년 사이에 활발히 연구되고 있는 방법으로 푸리에 변환과 함께 이미지 압축, 시계열 신호 처리, 편미분 방정식 풀이, 모델링 등 많은 부분에서 응용되고 있다. 지구물리학에 적용한 경우는 웨이브렛의 뛰어난 압축율을 이용하여 방대한 양의 탄성파자료 압축에 적용하였고(Luo and Schuster, 1992), 탄성과 전파 양상을 웨이브렛으로 표현하여 분석하는 하는데 이용하였다(Yomogida, 1994). 또한 웨이브렛 변환이 빠른 연산 속도를 가지는 성질을 이용하여 지하속도 분포 역산에도 응용하

였다(Li et al., 1996). 중력 자료 처리시에 광역이상과 국부이상을 구분하는 방법이 도입되었고(Fedi and Quarta, 1998; Fedi et al., 1997), Hornby 등(1999)은 중력 및 자력 자료 처리에 효과적인 웨이브렛 설계에 대하여 연구하였다. 또한 중력에 의한 기조력 측정 자료 처리에 웨이브렛 변환을 응용하여 잡음을 줄이는 연구가 있었다(임형래 등, 1999).

신호처리 시에 발산점이나 불연속면에서의 신호 변화는 매우 급격하게 일어난다. 지구물리학적으로 보면, 예를 들어 중력이상에서 이러한 급격한 변화는 단층과 같은 밀도차이를 보여주는 불연속면들에서 나타난다. 지구물리자료의 불연속성은 신호의 미분가능 정도(regularity)로 표시되며 이는 웨이브렛 변환의 극대값을 이용하여 구할 수 있다. 각 단계인자에 해당하는 웨이브렛의 국부 최대치를 연결하여 다중경계를 구하게 된다. 구해진 다중경계는 지구물리자료의 불

\*Corresponding Author: rhr@kigam.re.kr

Tel: 82-42-868-3133

Fax: 82-42-861-9721

연속면들을 보여주게 된다.

중력 포텐셜 이론에 웨이브렛 변환을 적용하기 위하여 중력 포텐셜에 적합한 단계함수가 제안되었고 이를 이용하여 웨이브렛 기저를 생성하는 방법과 웨이브렛 변환을 수행하는 방법이 설명되었다. 또한 현장 자료에 적용하기 위하여 간단한 단층 모델에서 중력 이상값의 다중경계(multiscale edge)를 구하여 단층의 경사 방향과 경사각을 유추하는 방법이 연구되었으며 현장자료에 적용되었다.

### 중력장에 적용한 웨이브렛 변환이론

#### 웨이브렛 설정

웨이브렛 변환은 웨이브렛을 기저로 수행되는 변환 방법이다. 웨이브렛 변환의 기저는 푸리에 변환과 달리 특정한 기저가 정해져있지 않으며 특정한 목적에 맞는 웨이브렛이 존재하므로 그 목적에 맞는 웨이브렛을 먼저 생성해야한다. 본 연구 목적인 중력 포텐셜에서 웨이브렛을 응용하기 위하여 중력 포텐셜에 적합한 웨이브렛을 유도하였다.

일반적으로 웨이브렛 변환 이론은 단계함수(scaling function 또는 the smoothing function)  $\theta(x)$ 의 정의로부터 시작한다(Daubechies, 1992). 이는 후에 웨이브렛 기저를 구축하는데 이용되므로 부웨이브렛(father wavelet)이라고 부르기도 한다. 1차원에서 미분가능하고, 주어진 구간에서 양의 값을 갖고 정규화되었을 때 적분값이 1인  $\theta(x)$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) dx = 1 \tag{1}$$

웨이브렛은 단계함수(smoothing function)의 일차 미분 형태로 구해지며

$$\Psi(x) = -\frac{d}{dt}\theta(x) \tag{2}$$

신호  $f(x)$ 의 웨이브렛 변환은 주어진 모웨이브렛과의 컨벌루션으로 정의된다(Mallat, 1998).

$$\Psi[f](s, x) = [f * \Psi_s](x) = s \frac{d}{dx} (f * \theta_s)(x), \tag{3}$$

여기서

$$\Psi_s(x) = \frac{1}{s} \Psi\left(\frac{x}{s}\right) \tag{4}$$

$$\theta_s(x) = (1/s)\theta(x/s), \quad s > 0 \tag{5}$$

어떤 함수  $f$ 의 웨이브렛 변환에서의 modulus maxima는  $f * \theta_s$ 의 급변점에서 나타나며 그 급변점은 함수  $f$ 의 불연속점에서 나타난다. 따라서 어떤 함수의 웨이브렛변환의 modulus maxima는 그 함수의 불연속점을 찾는데 쓰일 수 있다.

본 연구에서는  $\theta(x)$ 를 다음과 같이 정의하였다.

$$\theta(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) dx = 1 \tag{6}$$

식(2)에 따르면 웨이브렛  $\Psi(x)$ 는  $\theta(x)$ 의 일차 미분으로 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$\Psi(x) = -\frac{1}{2} \frac{3x}{(1+x^2)^{5/2}} \tag{7}$$

Fig. 1은 식(6)과 식(7)에서 정의한 단계함수(부웨이브렛)과 웨이브렛 함수를 도시하였다.

$\Psi(x)$ 가 웨이브렛이 되기 위해서는 다음 조건을 만족하여야 한다.

- (i)  $\Psi(0) = 0$
- (ii)  $\hat{\Psi}(w)$ 이 연속적으로 미분 가능

$$\Psi(x) = -\frac{1}{2} \frac{3x}{(1+x^2)^{5/2}} \text{ 일 경우}$$

첫 번째 조건은

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) dx = 1 \text{ 으로 만족한다.}$$

두 번째 조건은

$\hat{\Psi}(w)$ 의  $k$ 차 미분  $\Psi^{(k)}(w)$ 의 역 푸리에변환은  $-(ix)^k \Psi(w)$ 이고

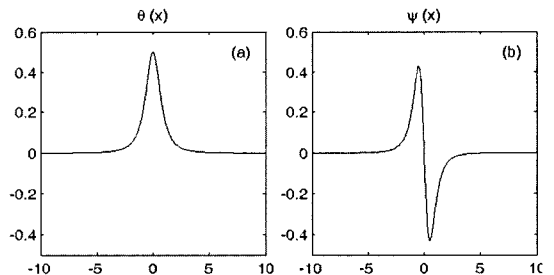


Fig. 1. (a) Scaling function (Mother wavelet) and (b) wavelet function (Father wavelet).

$$|\hat{\psi}^{(k)}(w)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)||x|^k dx \text{ 이므로}$$

$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|(1+|x|^p) dx < +\infty$  이면 어떠한  $k \leq p$  에 대해

$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)||x|^k dx < +\infty$  이며 따라서  $\hat{\psi}^{(k)}(w)$ 는 연속이고 유계이다.

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \frac{3x}{(1+x^2)^{5/2}} \text{ 일 때}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|(1+|x|) dx < +\infty \text{ 이므로}$$

$\hat{\psi}(w)$ 이 연속적으로 미분 가능하다.

따라서  $\psi(x) = \frac{1}{2} \frac{3x}{(1+x^2)^{5/2}}$  는 웨이브렛으로 선택 가능하다.

마찬가지로 2차원에서는 식(8)과 같은 단계함수를 생각할 수 있다.

$$\theta(x, y) = \frac{1}{2\pi(x^2+y^2+1)^{3/2}} \tag{8}$$

이때  $\theta(x, y)$ 는 다음 식(9) 조건을 만족하며

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x, y) dx dy = 1 \tag{9}$$

단계인자  $s$ 가 도입된  $\theta_s(x, y)$ 는 식 (10)으로 표시할 수 있다.

$$\theta_s(x, y) = \frac{1}{s^2} \theta_s\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right) = \frac{1}{2\pi(x^2+y^2+1)^{3/2}} \tag{10}$$

Fig. 2는 각 단계인자별로  $\theta_s(x, y)$ 의 형태를 나타내며  $s$ 가 0에 가깝게 가면  $\theta_s(x, y)$ 는 델타 함수에 점점 가까워짐을 알 수 있다.

밀도 분포가  $\rho$ 인 수평 판에 대한 점  $(x, y, z_0)$ 의 중력 포텐셜은 식(11)과 같이 주어진다(Hornby et al, 1999)

$$V(x, y, z_0) = -G \int dx' dy' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x', y', z') dz'}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z_0-z')^2)^{3/2}} \tag{11}$$

여기서  $G$ 는 중력상수이고  $z_0$ 는 관측지점의 높이이

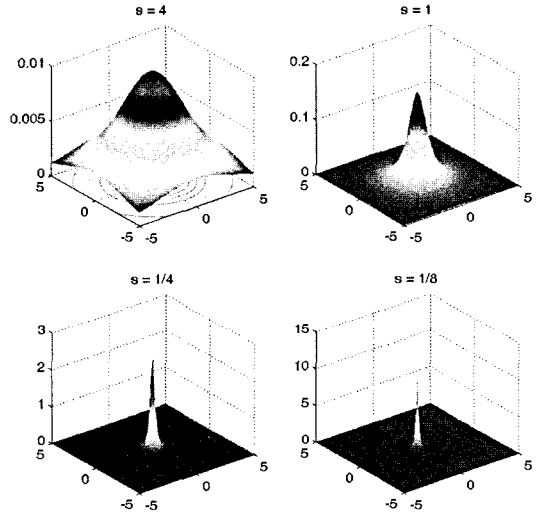


Fig. 2. Two dimensional scaling functions according to scales 4, 1, 1/4, 1/8, respectively.

다. 중력 포텐셜로부터 수직방향의 중력가속도  $f_{z_0}$  는  $z$  방향의 일차미분으로 구해진다.

$$f_{z_0}(x, y) = -G \int dx' dy' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x', y', z')(z_0-z') dz'}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z_0-z')^2)^{3/2}} \tag{12}$$

여기서 수직방향의 중력 가속도에 대한 그린 함수  $K(x, y, z)$ 는 식(13)과 같이 주어진다.

$$K(x, y, z) = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \tag{13}$$

이때 주어진 그린함수  $K(x, y, z)$ 는 위에서 유추한 단계함수와 다음과 같은 관계가 있다.

$$K(x, y, z) = 2\pi \theta_z(x, y) \tag{14}$$

관측 기준점  $z_0$ 을 하나의 단위로 생각하고 목표점  $z$ 를 단위의  $s$ 배 만큼 떨어져 있다고 하면  $z = sz_0$ 인 관계식이 유도되며 위의 식(14)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\theta_z(x, y) = \theta_{sz_0}(x, y) = \frac{1}{2\pi(x^2+y^2+(sz_0)^2)^{3/2}} = s^{-2} \theta_{z_0}(x/s, y/s) \tag{15}$$

**상향연속과 웨이브렛 계수의 관계**

2차 푸리에 변환은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$f(\vec{w}) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\vec{x}) \exp(-2\pi i \vec{w} \cdot \vec{x}) d\vec{x} \quad (16)$$

연직 가속도의 그린함수  $f_z$ 의 푸리에변환은(Blakely, 1995)  $\hat{\theta}_z(\vec{w}) = \exp(-2\pi i |\vec{x}| |z|)$   $z > 0$ 로 나타난다.  $z = z_0$ 에서 측정된 중력  $f$ 의 푸리에변환은

$$\begin{aligned} \hat{f}_{z_0}(\vec{w}) &= 2\pi G \int_{-\infty}^0 \hat{\rho}(\vec{w}, z') \hat{\theta}_{z_0-z'}(\vec{w}) dz' \\ \hat{f}_{z_0}(\vec{w}) &= 2\pi G \int_{-\infty}^0 \hat{\rho}(\vec{w}, z') \exp(-2\pi i |\vec{x}| [(z_0-z')]) dz' \end{aligned} \quad (17)$$

$z > z_0$ 의 경우는

$$\begin{aligned} \hat{f}_z(\vec{w}) &= 2\pi G \int_{-\infty}^0 \hat{\rho}(\vec{w}, z') \exp(-2\pi i |\vec{x}| [(z_0-z') + (z-z_0)]) dz' \\ &= \hat{f}_{z_0}(\vec{w}) \hat{\theta}_{z-z_0}(\vec{w}) \end{aligned} \quad (18)$$

이다

따라서  $\hat{f}_z(\vec{w}) = [\hat{f}_{z_0} * \hat{\theta}_{z-z_0}](\vec{w})$ ,  $z > z_0$ 이고

$W[f_0](s, \vec{x}) = s \nabla f_z(\vec{x})$ 로 나타낼 수 있다. 이런 관계식은 단계값  $s$ 에 관한  $f_0$ 의 웨이브렛변환이 곧  $s \nabla f_z(\vec{x})$ 와 같음을 보여준다. 결국  $\hat{f}_{z_0}$ 의 상향연속의 변화량은  $W[f_0](s, \vec{x})$ 로 나타나며  $s$ 값에 따라 그 값이 변하게 된다. 즉 높이에 따른 중력가속도 값의 변화를 측정함은 웨이브렛변환으로 구한 계수들에서  $s$ 의 변화와 같다고 볼 수 있다.

**중력 포텐셜에 대한 웨이브렛 변환 응용**

**모델 자료 사례**

간단한 단층 모델에 대하여 본문에서 유도한 웨이브렛 변환을 적용하기로 한다. 먼저 단층 모델에 의한 중력 값을 계산하면 Fig. 3(a)과 같다. Fig. 3(a)은 단층이 관심영역 중앙에 존재할 때, 단층의 경사 방향과 경사각의 크기에 따라 계산된 중력값이다. 단층이 존재하는 지역으로 갈수록 중력값이 커지는 양상을 보이지만 실제 단층의 경사 방향이나 경사각에 대한 정보는 알기 어렵다.

이런 경우 단층의 경사각과 경사 방향에 대한 정보를 얻기 위하여 다중경계(multiscale edge)를 구한다. 다중 경계는 각 단계에서 웨이브렛 변환 계수의 최대값을 구하여 얻어진다.

단층 모델에 대하여 다중경계를 구하기 위하여 식(12)의 중력 가속도를  $y$  방향으로 적분하여 식(19)로 정리된다.

$$f'_{z_0}(x, y) = -2G \int dx' \int_{-\infty}^0 \frac{\rho(x', z')(z_0-z') dz'}{(x-x')^2 + (z_0-z')^2} \quad (19)$$

이로부터 웨이브렛 변환을 수행하면 식(20)이고 이를 정리하면 식(21)과 같이 얻어진다.

$$\begin{aligned} W[f_0](s, x) &= -2Gs \int dx' \int_{-\infty}^0 \rho(x', z') D_x \left[ \frac{(s-z') dz'}{(x-x')^2 + (s-z')^2} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} W[f_0](s, x) &= -4Gs \int dx' \int_{-\infty}^0 \rho(x', z') \frac{(s-z')(x-x') dz'}{((x-x')^2 + (s-z')^2)^2} \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 다시 단층 모델에 적용하기 위해서는 경사  $\tan(\theta)$ 를 가지는 단층모델의 경우 식(22)과 같이 웨이브렛 계수가 구해진다.

$$\begin{aligned} W[f_0](s, x) &= 2Gs \int_{z_1}^0 \frac{(s-z')}{(x + 1/\tan(\theta)z')^2 + (s-z')^2} dz' \end{aligned} \quad (22)$$

다중계수(multiscale)는 식(22)의 최대값이므로 식(22)의 일차미분값이 영이 되는 곳에서 국부최대값(local maxima)를 가지고 각 단계에 대한 국부최대값을 연결하면 다중경계(multiscale edge)가 구해진다.

Fig. 3(b) 단층의 경계가 중심부에 있는 단층 모델에 대한 다중경계를 구한 경우이다. Fig. 3(b)에서 경사각에 따른 다중 경계를 구하였는데, 경사각이 클수록 단계가 증가함에 따라 빠른 속도로 수렴함을 알 수 있다. 이런 성질을 이용하여 각 경사각 별로 다중 경계를 구하고 다중경계가 나타나는 방향과 수렴속도를 비교함으로써 단층의 경사방향과 경사각에 대한 정보를 유추할 수 있다. 큰 규모로 관입암이 있는 지질구조의 경우 관입암의 한쪽만을 보면 단층과 유사한 형태의 반응을 보이므로 관입경사에 대한 정보를 유추하는데 적용이 가능하다.

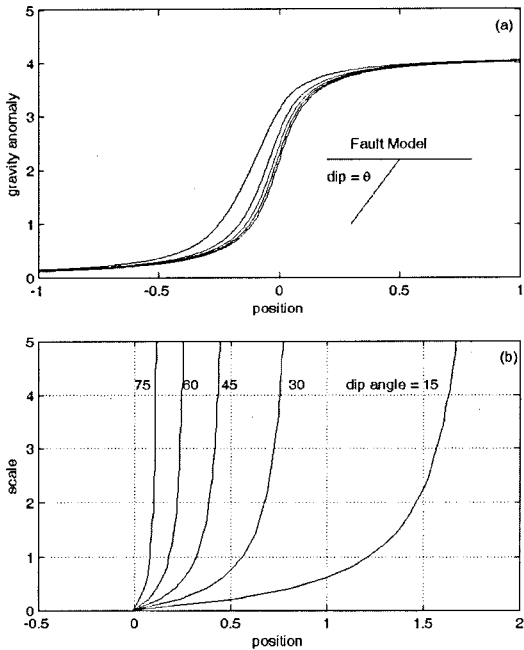


Fig. 3. Gravity anomalies (a) and multiscale edges (b) of synthetic fault model according to dip angles 15, 30, 45, 60, 75 degree, respectively.

**현장자료 적용**

관입경사를 유추하기 위한 현장자료를 적용한 지역은 마산-창원지역으로 중생대 백악기에 속하는 경상누층군 중 하양층군에 속하는 퇴적암류와 이를 관입한 불국사 화강암이 주를 이룰 지역이다. 중력탐사는 대상지역을 중심으로 약 17 km×17 km의 지역에 걸쳐 격자상으로 1 km 간격으로 수행되었으며 총 222 측정점에서 중력측정이 이루어졌다. 측정된 자료에 중력보정을 위한 모든 처리 및 보정과정이 적용되었으며 그림 4는 최종적으로 얻어진 Bouguer 중력 이상도이다. 지형도에서의 좌표는 KTM(zone 3) 좌표이며 측정점이 점으로 함께 표시되어있다. 그림 4에 북동쪽에 해당하는 지역은 관입화강암에 의한 낮은 Bouguer 이상 값이 나타나고 있다. 잘 알려져 있듯이 피 경상누층군의 퇴적암은 관입화강암에 비해 고밀도를 보이므로 높은 Bouguer 이상값을 보여준다. 그림 4의 A-A측선에 대하여 웨이브렛 변환을 이용한 다중 경계를 구해보면 그림 5에서 보듯이 경사각 20도와 30도 사이에 다중경계가 구해지므로 관심영역에서 보여지는 관입에 의한 발생한 불연속면의 경사는 약 20-30도 내외일 것으로 유추된다. 또한 Simulated

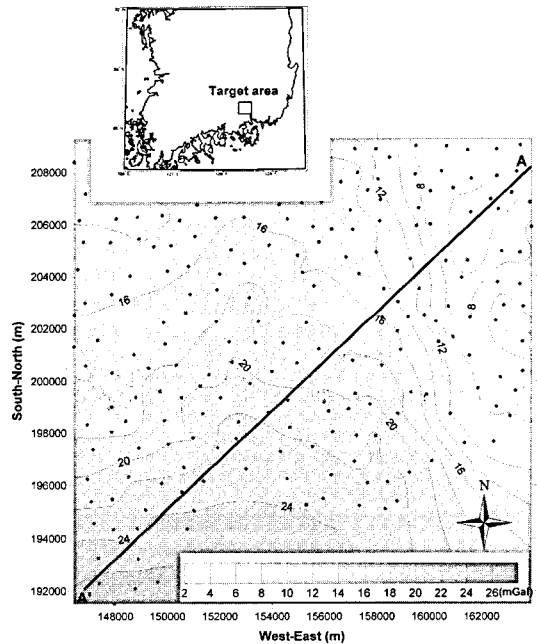


Fig. 4. Bouguer anomaly map of Masan-Changwon area. The total gravity stations (dot) are 222 points.

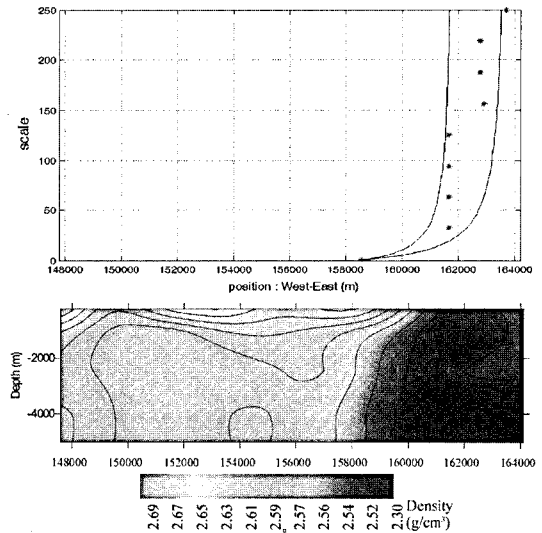


Fig. 5. Calculated multiscale edges are fallen under between 20 degree and 30 degree dip angle (top) and density distribution used for three dimensional gravity inversion of Simulated Annealing is shown (bottom).

Annealing 역산방법을 이용하여 측선에 따른 역산 결과에서도 밀도분포가 약 40도정도의 경사를 가지는 것으로 구해져서 경사방향과 경사각이 두 가지 방법

에서 어느 정도 일관성을 가지고 있는 것으로 추정된다.

## 결 론

중력 포텐셜에 웨이블릿 변환 이론을 응용하기 위해서 수직 중력 가속도에 대한 그린 함수의 적분이 유한함을 이용하여 그린함수로부터 적용 가능한 단계 함수(smoothing)를 구하였다. 단계함수의 일차미분을 통하여 모웨이브렛을 구성하였다. 이렇게 구성된 웨이블릿 기저의 컨벌루션으로 웨이블릿 변환이 수행된다. 간단한 단층 모델에 응용하기 위하여 경사각의 정보를 가지는 식(22)으로 변형하여 적용하였다. 경사방향과 경사각이 다른 단층 모델에 대하여 적용한 결과 중력 측정만으로는 경사 방향과 경사각의 정보를 얻어내기에 부족하지만 다중경계를 구함으로써 다중 경계가 나타나는 방향과 수렴 속도를 비교하여 단층 모델의 경사방향과 경사각에 대한 정보를 유추할 수 있었다. 또한 마산-창원지역의 관입암 지역에서의 적용결과 역산 해석과 일관된 결과를 보여준다. 앞으로의 연구를 통하여 실제 현장 자료를 해석할 때는 역산결과 등을 분석할 때 관입이나 대규모 단층의 경사각을 유추하는 보조자료로써 접목하여 적용하면 중력 해석에서 더 많은 정보를 찾을 수 있을 것이다.

## 사 사

본 연구과제는 여수대학교 학술연구비의 지원으로

연구되었습니다.

## 참고문헌

- 임형래, 진홍성, 권병두, 1999, 웨이블릿 변환을 응용한 합성자료 및 기조력 자료의 잡음 제거. 지구물리, 2, 143-152.
- Blakely, R.J., 1995. *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge University Press, UK, 441 p.
- Daubechies, L., 1992, *Ten lectures on wavelets*. SIAM, Philadelphia, USA, 354 p.
- Fedi, M., and Quarta, T., 1998, Wavelet analysis for the regional-residual and local separation of potential field anomalies. *Geophysical Prospecting*, 46, 507-525.
- Fedi, M., Quarta, T., and Sanits, A.D., 1997, Inherent power-law behavior of magnetic field power spectra from a Spector and Grant ensemble. *Geophysics*, 62, 1143-1150.
- Hornby, P., Boschetti, F., and Horowitz, F.G., 1999, Analysis of potential field data in the wavelet domain, *Geophysical Journal International*, 137, 175-196.
- Li, Xin-Gong, Sacchi, M.D., and Ulrych, T.J., 1996, Wavelet transform inversion with prior scale information. *Geophysics*, 61, 1370-1385.
- Luo, Y. and Schuster, G.T., 1992, Wave packet transform and compression. 62nd Annual International Meeting, SEG, Expanded Abstracts, 1187-1190.
- Mallat, S.G., 1998, *A wavelet tour of signal processing*. Academic press, San Diego, USA, 577 p.
- Yomogida, K., 1994, Detection of anomalous seismic phases by the wavelet transform. *Geophysical Journal International*, 116, 119-130.

2003년 12월 19일 원고 접수  
2004년 1월 12일 수정원고 접수  
2004년 1월 17일 원고 채택