

전부가 아니면 전무1)

- 영재 학생들의 문제해결 -

Marja van den Heuvel-Panhuizen (Freudenthal Institute, Utrecht University)

Conny Bodin-Baarends (Freudenthal Institute, Utrecht University)

박 정 숙 · 김 소 연 · 오 혜 미 (서울대학교 수학교육과 대학원) 공역

이 논문은 네덜란드의 4학년 학생들에게 시행된 문제 해결 시험에서 얻은 첫 번째 결과이다. 참여한 학생들은 수학에서 높은 성취도를 얻은 학생들이었다. 학생들의 응답을 분석한 결과 성취도가 높은 학생들에게 관심을 가져야 하는 이유를 알게 되었다. 교사는 우수한 학생에 대해서는 걱정할 필요가 없다는 일반적인 믿음을 수정해야 한다는 것이 분명해졌다. 수학에서 높은 성취도를 보인 학생들이 비전형적인 문제에 직면할 때 그들의 능력은 기대했던 것보다 저조하게 나타났다. 이 연구에서 학생들은 특정 문제를 풀 때 여분의 노트에 거의 아무것도 적지 않음을 발견하였다. 또한 학생들이 답을 찾는 과정을 참고 견디지 않는다는 것도 알 수 있었다. 이 논문에서는 시험 문제 중 한 문제의 결과를 논의하면서 이러한 결과를 보여줄 것이다.

도 입

네덜란드의 초등학교에서, 수학교육의 초점은 일반적으로 우수한 학생들보다는 실력이 모자라는 학생들과 평균 수준들의 학생들에게 있다. 명석한 학생들은 스스로를 도울 수 있고 더 이상의 도움은 필요 없다는 것이 대부분의 생각이다. 똑똑한 학생들에 대한 이러한 접근은 수학교육 연구에도 반영되었다. 예를 들면, 지금까지 네덜란드에서 수행된 연구들 중 우수한 초등학교 학생들이 실제로 얼마나 잘하는가에 대한 연구는 전혀 없다. 그러므로 네덜란드의 높은 성취도의 4학년 학생들을 대상으로 World Class Tests에서 개발되어온 문제해결 과제를 얼마나 잘 해결한 것인지에 대한 연구를 수행하고자하는 Leeds 대학의 제안에 기꺼이 응했다. 이 논문에서는 시험을 시행한 실제와 자료 분석으로부터 얻은 결과를 제시한다.

방 법

World Class Tests의 개발에 참여한 Peter Pool 과 John Trelfall과의 공동 작업으로 15문제가 선택되고 네덜란드어로 번역되었다. 이 15문제는 네덜란드에서 2004년 3월 높은 성취도를 보인 4학년

1) 이 논문은 한국수학교육학회 시리즈 D <수학교육연구> 제8권 3호 (통권 19호)에 게재된 논문인 All Or Nothing : Problem Solving High Achievers in Mathematics를 번역한 것입니다.

학생들에게 시행되었다. 총 21개 학교가 이 연구에 참여하였다. 수학에서 상위 20% 학생들에게 시행되었다. 교사들 스스로 학생을 선택하였다. 이것은 학생들이 monitoring test에서 '잘함'과 '매우 잘함'을 받아야 했다는 것을 말한다. 예를 들면 학생들이 네덜란드의 CITO-시험 Rekenen en Wiskunde M6에서 A를 받았다는 것을 의미한다. 총 152명의 학생들이 선택되었다.

문제 내용(수 영역과 수학의 하위영역에서)에 그때까지 학생들이 다루어온 수학 교육과정을 다소 포함하도록 선택되었다. 그럼에도 불구하고 이 문제들은 네덜란드 학생들에게 특별한 것이었다. 주로 숫자 수수께끼처럼 네덜란드의 교과서나 시험에서 접하지 못했던 퍼즐 같은 문제였다.

15문제는 모든 문제가 페이지별로 분리된 검사 책자(test booklets)로 제시되었다. 학생들은 모든 페이지를 여분의 종이처럼 자유롭게 사용할 수 있었고 몇몇 문제는 특히 계산과정을 쓰도록 되어 있었다.

시험은 안내문에 따라 교사들에 의해 시행되었다. 우리는 시험이 시행되는 동안 세 학교에서 관찰하고 시험 후에 학생 중 몇 명과 인터뷰를 했다. 또한 학생들의 활동을 분석했다.

결과 선택(a selection from our findings)

검사 책자(test booklets)에 나타난 학생들의 활동을 지켜보았을 때, 상당히 학생들이 문제해결시, 여유 공간을 사용하지 않은 것을 관찰할 수 있었다. 학생들이 쓸 수 있는 다른 종이가 없었기 때문에, 이것은 학생들이 아무것도 적지 않고 문제를 해결했다는 것을 의미한다. 많은 자료를 포함한 문제나, 체계적으로 여러 방법을 선택하여 시도하여 문제를 해결해야하는 상황에서, 이런 현상은 놀라운 것이다. 즉시 답을 적고 노트를 하는 것도 때론 효과적이다. 문제의 예는 다음과 같다.

수를 찾아라.

그 수는 100보다 작다.

만일 7로 나눈다면, 나머지가 남지 않는다.

만일 3으로 나눈다면, 나머지가 2이다.

만일 5로 나눈다면, 나머지가 1이다.

<그림 1> 수 찾기 문제

<표 1>에서 알 수 있듯이 이 문제는 네덜란드에서 우수한 4학년 학생들에게 상당히 어려웠다. 전체 그룹의 1/4인 39명만이 옳은 답을 찾았다. 게다가 <표 1>에서 전체그룹의 거의 2/3인 93명은 여분의 종이를 사용하지 않은 것을 볼 수 있다.

<표 1> 우수한 4학년 학생들의 결과

수 찾기 문제의 결과			
	여분의 종이를 사용하지 않음	여분의 종이를 사용함	전체 학생 수
옳은 답	19	20	39
틀린 답	74	39	113
전체 학생 수	93	59	152

이 글에서는 문제를 풀 때 아무 것도 적지 않은 학생 그룹에 초점을 맞추고자 한다. 우리는 이것을 두 부분으로 진행하려고 한다. 여분의 종이를 쓰지 않고 옳은 답을 한 학생들부터 시작할 것이다. 그 후, 여분의 종이를 쓰지 않고 틀린 답을 한 학생들을 살펴볼 것이다.

이 문제가 많은 계산을 요구하는 문제임에도 불구하고, 그 어려움이 곱셈표의 지식이 필요하다는 데 있는 것은 아니다. 우수한 4학년 학생들은 곱셈표를 알고 있다. 이 문제를 해결하기 위해서는 서로 다른 수를 동시에 고려할 수 있어야 한다. 그것은 쉽지 않은 문제이다. 한편 우리가 대상으로 한 학생들은 우수한 학생들이므로 거의 절반 정도의 학생들이 암산으로 옳은 답을 발견했다는 것은 놀랄만한 일이 아니다.

Jasper의 경우가 이 경우이다. Jasper는 어떻게 계산하였는지 인터뷰에서 분명히 밝혔다. 그는 종종 자신의 생각을 말로 나타내는 것을 어려워했기 때문에, 그의 설명은 이해하기 힘든 면도 있지만 그의 추론은 분명 옳은 것이었다.

Jasper의 인터뷰에서:

5로 나누었을 때 나머지가 1인 수라는 사실로부터, Jasper는 수가 1 또는 6으로 끝난다는 것을 알고 있었다. 그는 6부터 시작한다: “그 수는 6과 관련 있어야만 해요. 그 다음 나는 7의 곱셈표를 생각해 보았고, 56을 얻었어요.” 하지만 그것이 Jasper 설명의 끝이 아니다. 왜냐하면 3으로 나눌 때, 나머지는 2가 되어야 하기 때문에, Jasper는 다음과 같이 계속 말하였다: “3의 곱셈표에서 60을 찾을 수 있고, 따라서 54가 되죠; 그러면 나머지가 2가 되는 수는 56이에요.”

다른 예는 Jacco이다. 그도 이 문제를 푸는데 도움이 되는 어떠한 것도 적지 않았다. 인터뷰를 하는 동안 Jacco가 체계적 방식으로 문제에 접근했음이 명백해졌다.

Jacco의 인터뷰에서:

Jacco는 그 수가 7의 곱셈표에 있다는 것을 알고 있었다. 처음에 9×7 을 시도했고, 그 다음에 8×7 을 하였다. 수 56이 정답으로 나타났다.

아무것도 쓰지 않고 정답도 찾지 못한 경우

우리가 더 많은 관심을 가진 그룹은 아무것도 적지 않고 답도 하지 않은 74명의 학생들이다. 이런 학생들은 문제를 시작하지도 않았다. 이 그룹의 예로 Benny를 들 수 있다. Benny의 전체적 시험 성적은 평균보다 약간 높다. 인터뷰에서 우리는, 그가 자신의 생각을 나열하는데 어려워하며, 자신의 머릿속에서 하고 있는 문제를 계속 이어나가는데 어려움을 겪고 있다는 것을 발견하였다. 학생 monitoring system에서 높은 성적을 받았음에도 불구하고, 계산하기는 그에게 어려운 일이다.

Benny의 인터뷰에서

Benny는 먼저 사과부터 하기 시작했다. “가로로 된 문제는 잘 풀 수 없어요. 저는 35라고 생각했는데 5로 나누어보면 1을 나머지로 얻을 수 없게 되요. 잘 모르겠어요.”

약간의 도움을 얻어서 그는 7의 곱셈표에 있는 모든 숫자를 썼다. 이것은 빨리 이루어지지 않았다. 오히려 3으로 나누었을 때 나머지가 2가 되는 수가 무엇인지 찾는 것에 시간이 걸렸다. 그는 오랜 시간 동안 14를 3으로 나누는 것을 생각했다. 그는 써내려가는 것을 어렵게 느꼈다. 암산으로 계산하는 매 순간 사고의 흐름을 잃어버렸다.

이 문제를 볼 때 모든 문제를 암산으로 푼다는 것은 희망이 없으며 이것은 Benny의 방법에서 분명히 알 수 있다. 또 다른 예는 Frank이다. 그는 91이라고 답했고 아무것도 쓰지 않았다. 인터뷰에서 그는 암산으로 계산하는데 어려움이 없으며 그의 접근은 적절한 것으로 드러났다. 그는 매우 체계적인 방법으로 풀었다. 그에게 있어 과제는 오히려 체계적인 탐구를 추구하는 것이었다.

Frank의 인터뷰에서

Frank는 7의 곱셈표에서 6 또는 1로 끝나야 한다는 것을 지적하였다. 그는 21을 생각해보았으나 맞지 않았다. 그 다음 그는 $13 \times 7 = 91$ 이라고 말하고 그것이 정답이면 그것으로 된 것이었다. 더 이상 확인하지 않았다.

결과 요약

우리는 인터뷰를 통해 이 문제의 어려움은 문제를 이해하는 것과 관련이 없다는 것을 알았다. 학생들은 문제의 의도를 이해했다. 이 그룹의 학생들은 기대했던 만큼 계산을 잘 하지는 못했지만 계산 역시 문제의 핵심은 아니었다. 이 우수한 학생들의 약점은 다른 영역에 속하는 것이며 특별한 접근으로 시도할 수도 없고 유지해 갈 수도 없는 것이다. 더욱이 이러한 태도는 그들의 사고 과정에 도움이 되는 어떤 것도 써내려가지 않음으로써 강화되었다.

아무 것도 쓰지 않는 경향

우리는 인터뷰에서 학생들이 쓰기 전에 오랜 시간동안 생각하는 것을 발견하였다. 이러한 경향은 수를 대입해 보는 동안 발견하였다. 학생들은 자신이 답을 알 때까지 또는 거의 알 때까지 답을 하지 않는다. 어떤 학생들은 지우개를 사용하길 원하는 것도 발견할 수 있었다. 우리는 학생들에게 지우개로 지우지 않는다면 그들이 어떻게 생각하는지 우리가 훨씬 더 잘 알 수 있음을 이야기했다. 학생들은 자신의 답안이 깨끗하길 원했다. 어떤 여학생은 두 번째 생각이 틀린 것으로 판명되자 노트 아래에 구불구불한 선을 그렸다. 어떤 남학생들은 노트에 자를 대고 썼다. 학생들이 쓴 글에는 바르게 그리지 못했을 때 잘못 그린 것 같아 불편하다고 말하고 있다. 우리가 가기 전에 교사 중 한 사람이 여분의 종이를 나누어 주어 학생들이 검사 책자에 쓰지 않았다는 것도 주목해야 할 일이다.

아무 것도 쓰지 않는 경향은 많은 문제를 야기하지만 이 연구 후에 이 행동을 어떻게 설명할 수 있는지에 대한 아이디어를 얻을 수 있었다. 예를 들어 학생들은 종이를 이용하지 않는 것을 좋아할 수 있다. 왜냐하면 암산으로 문제를 푸는 것이 더 높은 수준의 수학이라고 생각하기 때문이다. 이 경향은 우수한 학생들이 정규 수업 시간에 과제를 할 때 좀처럼 여분 종이를 활용하지 않는다는 사실에서 알 수 있을 것이다.

학생들은 시험에서는 지저분하게 쓰지 않아야 한다고 생각하기 때문에 아무것도 쓰지 않는다는 것은 또 다른 측면이 될 수 있을 것이다. 학생들은 교사로부터 깨끗하게 푸는 것이 중요하다는 것을 배운다.

좀처럼 시작하지 않는 경향

종이 위에 아무것도 쓰지 않고 이 문제를 풀지 못하는 대부분의 학생들 또한 의미있다. 113명의 학생들 중에서 74명의 학생들은 정확한 수를 쓰지 못했다. 좀처럼 시작하지 않는 경향은 수학 문제를 풀 때 어떤 것도 쓰기를 거절하는 것이고 또 다른 설명은 학생들이 노트를 사용하는 것을 배우지 않았으며 풀이 과정을 도와주기 위해 데이터를 조직하는 것을 배우지 않았다는 것이다. 이 문제의 경우에 어떤 규칙에 따라 수를 나열하고 적합하지 않은 수를 없애버리는 것을 생각할 수 있다. 없애 나가는 것은 지금 현재 만연된 모든 것 또는 아무것도 아닌 분위기 속에서는 저항이 있을 수 있다.

지속하지 않는 경향

또 다른 놀라운 경험은 문제를 시도할 때 충분히 참지 못한다는 것이다. 학생들은 종종 몇 번 시도해 보고 포기한다. 이 행동은 종종 잘하지 않는 학생들에게 나타난다. 두 번째 그룹이 계산 실수를 더 많이 하고 답을 얻지 못하지만 계산은 6 또는 1에는 끝나게 된다. 우수한 학생들 또한 참고 건다

는 것을 어려워하는데 수학적 탐구가 필요한 문제를 거의 만나지 못했기 때문이다. 학생들은 일반적으로 자신에게 주어지는 문제에 대하여 오랜 시간동안 생각하지 않는다. 이 논문 서두에 언급했듯이 문제해결은 현재 네덜란드 교육과정에서 주변적인 위치에 있다. 우리는 이러한 경향이 수정되어야 하고 초등학교에서 완전수 계산을 위한 TAL 학습 교수 궤도가 그 출발점이 될 수 있으리라 기대한다. 또한 이러한 변화는 교수 실제에 영향을 줄 것이다.

결론으로의 초대

이 논문의 결론으로 교사들에게 여기서 토론한 문제를 교실에서 실제로 시도해 보고 학생들이 어떻게 접근하는지에 대해 관찰하길 바란다. 여분 종이의 활용과 참을성에 관한 주제에 대해 관심을 기울이길 바란다. 이 문제의 유용성에 대해 의심을 가지는 사람들에 대하여 우리는 이 문제에 포함된 “생산적 실제(productive practice)”에 대한 가능성을 지적하고 싶다. 그리고 이 어려운 문제를 전체 그룹에게 하고 싶지 않은 교사들을 위해 차별화를 할 것을 권하고자 한다. 100 이하의 수, 세 가지 조건 대신 한 가지 조건에 맞는 수를 찾는 것으로 할 수 있다. 이 방법은 전체 그룹이 참여할 수 있는 반면 우수한 학생들은 같은 시간 동안 다른 것을 학습할 수 있다.