韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제 2호, 2004. 7. 371-382

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 2, July. 2004. 371-382

발생론적 인식론을 적용한 수학교실

- C. Kamii의 '두 자리 수 더하기 두 자리 수' 수업을 중심으로 -

김 진 호 (이화여자대학교 교육과학연구소)

Kamii는 피아제의 발생론적 인식론이란 이론을 모태로 수학을 지도해야 학습자가 수학을 이해를 바탕으로 학습할 수 있다는 믿음을 지니고 있다. 본고에서는 Kamii가 이런 신념을 갖고 실시한 수업을 녹화한 비디오 자료에 나타나는 특징을 분석하였다. 첫 번째 특징은, 교사가 가르쳐야 할 지식을 직접적으로 지도하지 않는 대신에 학습자가 스스로 지식을 구성할 수 있도록 매개자의 역할을 한다는 점이다. 두 번째, 기저지식으로서 학습자의 비형식적 지식을 학습자가 적극적으로 활용할 수 있도록 허용하는 분위기이다. 세 번째, 두 번째와 관련되어서 학습자의 사고과정은 성인이나 학문적 체계에서 운용되고 있는 사고 흐름과는 다르다는 것을 인정해 준다. 네 번째, 교사의 역할이 가르쳐야 할 지식을 가르치는데(전수하는데) 있는 것이 아니라 학습자들이 생성해 낸 여물지 않은 아이디어들을 익힐 수 있도록 환경을 조성하는데 있다. 다섯 번째, 학습자마다 기저지식이 다르기 때문에 동일한 학습주제라 할지라도 이해의 폭과 깊이가 다르다. 따라서, 전체학급을 대상으로 하는 수업 중이라 할지라도 개별적 학습을 염두에 두어야 한다.
학생들의 수학적 이해력이 저하된다는 염려의 목소리가 높아지고 있다. 이는 학생들이 이해를 바탕으로 한 수업을 받아 보지 못하기 때문이며, 이런 원인은 아마도 교사 자신이 이해를 바탕으로 한 수업 경험이 간접적으로든 직접적으로든 없기 때문일 것이다. Kamii가 실시한 수업이 학생 스스로 수학을 학습할 수 있다는 구성주의 원리를 적용한 성공적인 사례이며, 이와 같은 방향으로의 교수법의 변화가 있기를 기대한다.

1. 들어 가면서

'구성주의'라는 용어가 전문적으로 교육학 및 심리학 분야에서 널리 사용되기 시작한 것은 그리 오래된 일이 아니다. 이 용어가 널리 알려지면서 이 용어가 지니는 의미도 이 용어를 언급하는 학자의 수 만큼 다양하게 변화해 왔다. 결과적으로 연구자의 목적에 따라서 구성주의라는 용어는 서로 다른 모습으로 나타난다. 이 글에서는 구성주의에 대한 이해를 구성주의라는 아이디어를 태생시키는데 크게 기여한 Piaget의 생각을 근간으로 한다. 피아제는 새로운 유기체 즉 새 생명이 새로운 지식을 생성해(이해해)가는 과정은 인류가 학문을 발달시켜 온 과정과 매우 유사하며, 따라서 두 집단이 새로운 지식을 정교하게 해 가는 과정을 연구할 필요가 있다고 보았다. 다시 말해서, 꼬마 어린이와 학문이 발달하기 이전 시대의 인류는 모두 금방 한 경험들에 근거한 주관적인 아이디어들로부터 사고를 시작하거나 시작했었다는 점에서 이 두 부류의 인간은 새로운 지식을 학습해 가는 과정이 유사하다고 Piaget(1965/1976)는 지적한다. Piaget는 계속해서 꼬마 어린이와 학문이 발달하기 이전 시대의 인

류는 관점을 교환하거나 자기중심적 사고를 완화해서 점차적으로 그리고 결과적으로 객관적인 지식을 구성하게 됨으로써 진전을 보이거나 보였었다고 주장한다. Kamii(1994)는 이런 과정을 유추적으로 다음과 같이 설명하고 있다.

> 한 학자가 새로운 발견을 발표할 때, 다른 학자들은 증명을 요구한다. 이것은 다른 학자들이 검증하지 않은 새로운 진리는 학자들에게 수용되지 않기 때문이다. 굉장히 많은 대다수가 합의에 도달했을 때 이때만, 새로운 주장은 객관적인 사실로써 수용된다. 그러므로, 학문은 엄격한 논리의 규칙과 경험적 증명들로 된 사회적 진취적인 정신이다. 이 사회적 진취성은 엄격함, 복종, 권위에 의존해서는 진전을 볼 수 없다. 한 학계의 대부가 새로운 지식을 만들었을 때, 다른 학자들은 새로운 주장이 사실인지 아닌지를 결정하기 위해 전통이나 권위에 의존하지 않는다. 그것은 수학교육에서 우리가 어린이들이 새로운 지식을 만들 수 있게 하고, 교사의 권위에 의존하지 않고 다른 어린이들이 만든 지식을 평가할 수 있도록 어린이들을 가르쳐야만 한다는 것을 말한다.

즉, 위의 진술은 수학교실에서 어린이들은 상호간의 협력과 갈등해소라는 과정을 겪으면서 자기 수준에서 지식을 능동적으로 구성해 가야하고 갈 수 있도록 교사가 수업을 이끌어야 한다는 점을 암시하고 있다. 학생이 지식을 스스로 생성해 낼 수 있는 능력이 있음은 이미 연구에 의하여 지지되고 있다(김진호, 1994). 그렇다고 해서, 학생스스로 지식을 구성하도록 방치된다면, 극단적인 예이지만, 늑대소년의 경우처럼 그 생성된 지식의 수준은 매우 제한적일 수 밖에 없을 것이다. 따라서, 본고에서는 Kamii가 발생론적 인식론이라는 입장에서 구성주의를 적용한 수업을 진행할 때 나타나는 수업의 특징을 논의하고, 이로부터 우리의 수학수업활동에 주는 시사점을 찾아보고자 한다.

2. 발생론적 인식론을 적용한 수업 활동

2.1 수학교실의 인적 구성

Kamii는 발생론적 인식론의 입장에서 본 구성주의 원리를 적용한 수학 수업을 3년간에 걸쳐서 뉴욕 시에 소재한 Kent Hall 사립 초등학교에서 실시하였고, 이에 대한 과정 및 결과를 Kamii(1985, 1989a, 1994; 문헌 자료)와 Kamii(1989b, 1990a, 1990b; 비디오 자료)에 보고하고 있다. 본 고에서 소개하는 수업활동은 1학년부터 줄곧 구성주의 원리를 적용한 수업을 한 교사가 2학년 학생들을 대상으로 한 수업 중에서, “두 자리 수 더하기 두 자리 수” 수업활동이다. 이 교실에는 20명의 학생이 있는데, 이들 모두가 1학년부터 구성주의 원리를 적용한 수업을 받은 것은 아니고, 1학년 4개 학급 중에서 임의적으로 선정된 어린이들이다. 하지만, 비교적 많은 수인 13명이 구성주의 수학교실에 있던 학생들이다. 구성주의 원리를 적용한 수업의 효과를 검증하는 데는 구성주의 1학년 학급을 그대로 2학년에서도 구성주의 원리를 적용한 수업을 받도록 하는 것이 적당하지만, 이는 일반적으로 학년 진급시 반 편성을 할 때 교사들이 원하지 않는 방식이다.

2.2 수업의 특징

본 수업에서 나타나는 특징은 몇 가지 측면에서 생각해 볼 수 있다. 첫 번째, 지식 생성의 주체가 누군인가 하는 점이다. 이 수업에서 교사가 수학 지식을 교수하는 것이 아니라 어린이들 스스로 지식을 구성해 낸다는 점이다. 교사의 직접적인 지도 없이도 어린이들이 학습해야 할 대상을 이해할 수 있다는 이 증거는 전통적인 수업에서 수학적 지식을 수학적 지식이 담고 있는 의미를 모른 채 문제를 해결하기 위한 기교적인 방법만 학습하는 어린이들이 이해하고 있는 것과는 사뭇 다른 이해를 하고 있음을 주목해야 한다. 수학적 지식을 학습하는 것은 이해를 동반하지 않고는 안 된다(김수환, 박영희, 이경화, 한대희, 2004). 그 이해의 주체가 이해를 해야 하는 것이다. 두 번째, 이해를 위한 자원으로 어떤 지식을 인정할 것인가 하는 점이다. 이 수업에서 특징적으로 나타나는 것은 교사가 어린이들의 비형식적 수학 지식을 긍정적으로 수용한다는 점이다. 이는 매우 중요한 의미를 지닌다. 구성주의자들의 견해에 따르면, 학습자가 새로운 지식을 자신의 지식으로 이해하기 위해서 그는 기존 쉐마(기존 지식)로 새로운 지식을 해석해야 한다. 교사가 수학수업을 진행해 갈 때 '어떤 지식을 기존 지식으로 간주해야 하는가?'하는 문제가 대두된다. 학교 수학을 이해하기 위한 기존 지식은 교사가 전에 지도한 지식이 아니라(김진호 등, 2003)[1], 바로 학생들이 자생적으로 습득한 비형식적 지식이다(Kim, 2002). 발생론적 인식론의 입장에서 보면, 학생들이 비형식적 수학적 지식을 습득해 가는 과정이 인류가 수학적 지식을 형성해 가는 과정과 유사하다고 지적하고 있다. 예를 들어, 최종적인 수학적 체계로서의 덧셈을 행하는 방법은 알고리듬으로 체계화되어 있는데 이 방법은 작은 자리 값에서 큰 자리 값으로 계산을 진행해 간다. 그런데, 이 방법을 체계화하기 전에 인류가 행한 원초적 과정들은 어린이들의 비형식적 덧셈 전략과 마찬가지로 높은 자리 수부터 계산을 하는 방법을 취하고 있음을 우리는 수판셈을 통하여 알 수 있다.

두 번째 특징과 관련하여서 어린이들이 지식을 구성해 가는 과정은 성인들의 그것 또는 학문체계가 운영되는 그것과는 다르다는 점이다. 예를 들어, 수업 활동 중에 어린이들이 하는 발표(제이시: 80과 20은 100. 그리고 6과 4는 10, 7과 4는 11.)로부터 Kamii는 어린이들의 사고는 교과서에서 강조하는 사고, 또는 교사가 문제를 풀어 주는 사고와는 다르다는 점에 주목하고 있다. 어린이들의 자연스런 사고 과정에 역행하는 사고를 강요하는 수업 활동은 어린이들로 하여금 사고를 멈추게 하는 단초를 제공한다(Kim, 2002).[2]

네 번째 주목해야 할 점은 어린이들이 새로운 지식을 학습하는 과정에서 교사가 어떤 역할을 해야 하는가 하는 점이다. 전통적인 수학 교실에서 교사의 역할을 간명하게 표현한다면 '풀이자' 또는

---

1) 대부분의 수학 교사들은 이런 사실을 인정한다. 즉, 학습의 대상이 되고 있는 지식을 지도하는 중에, 필요에 의해서, 이와 관련된 전에 학습한 내용을 언급만 하면, 대부분의 학생들은 필요한 지식(이전 학습한 지식)을 제대로 이해하고 있지 못하기 때문에, 본 차시 수업 내용을 이해하지 못하게 된다. 따라서, 교사는 일반적으로 전에 학습한 지식을 다시 약식으로 설명하게 된다.

2) 비형식적 수학으로부터 형식적 수학으로의 전이(결합)를 자연스럽게 일어 날 수 있도록 유도하는 수업의 예가 김수환 등(2004, pp. 138-141)은 제시하고 있다.

'해설자'라고 할 수 있을 것이다. 하지만, 구성주의 수학교실에서는 아이디어의 중재자로서의 역할을 강조하고 있다. 수학적 지식은 아이디어 중심의 지식이다(Skemp, 1987). 이 아이디어를 아이디어로 인식하는 것은 학습자에 의해서 가능한 것이지, 교사에 의해서 가능한 것이 아니다. 따라서, 수학수업에서는 수학적 아이디어가 충만해야 한다. 위의 수업에서는 두 자리수 더하기 두 자리수 더하기를 하기 위한 단 한 가지 방법 (즉, 덧셈 알고리듬)을 지도하는 수업이 아니라, 학생들 수준에서 발견해 낸 다양한 방법(아이디어)들이 가득 찬 교실이다. 이런 교실에서 교사는 학생들로 하여금 다양한 아이디어들을 상호간 교환할 수 있도록 수업을 진행한다. 이런 수업의 진행은 지식이 담고 있는 아이디어는 사라지고 오로지 지식만을 전달할 목적으로 설명을 하는 수업 진행과는 그 수업을 진행하는 교사의 역할이 사뭇 다르다. 이를 위해서 교사는 자신들이 이미 알고 있는 지식을 이용해서 자생적인 방법들로 해결할 수 있는 문제들을 매우 주의 깊게 선정해야 하고, 주어진 문제를 해결하는 방법을 보여주기 보다는 학습자들이 논리적으로 사고할 수 있는 질문들을 하고, 학생 각 자 자신만의 고유한 방법으로 문제를 해결하도록 해야 한다. 이런 활동을 조장하기 위해 교사는 학생들이 하는 반응에 대하여 "맞아요." 또는 "틀렸어요."와 같은 반응을 해서는 안 된다. 만약에 교사가 이런 류의 반응을 한다면, 학습자들은 더 이상 사고를 하려들지 않기 때문이다. 또한 이런 류의 반응은 논리-수학적 지식의 근원은 학습자의 내부에 있다는 구성주의 원리에 위반되기 때문이다.

다섯 번째로 이 수업에서 찾아 볼 수 있는 특징은 동일한 지식을 수업시간에 다루고 있다고 하더라도 이것을 이해하는 정도는 학습자마다 다르다는 사실을 인정해 주고 있다. 이는 학습의 대상이 되고 있는 지식을 해석하기 위한 자원이 학습자마다 다르기 때문이다. 그렇다면, 교육은 전체 수업이 아니라 개별화 수업을 운영해야 할 것이다. 한 학급에서 동일한 수업 목표를 가지고 수업을 진행하지만, 학습자에 따라서 이 수업 목표에 도달 할 수 없는 상태에 있는 학습자가 있는가하면, 벌써 이 목표를 달성한 학습자도 있을 수 있다. 따라서 개별 학습자의 현재의 학습능력에 맞춘 개별수업을 해야 한다. 학습 준비가 안 된 학습자에게 무리하게 앞서 나가지 말아야 한다. 본 수업에서는 학습자 개인이 개인의 수준에서 최대한 자신의 이해 폭을 확장해 갈 수 있는 수업을 진행하고 있다.

3. 시사점

수학 교육계에서 이해를 바탕으로 한 수업을 해야 한다는 주장은 브라우넬이 의미 중심의 학습을 강조한 이후로 현재까지, 각 주장이 표방하는 제하는 달라졌을 지라도, 계속되고 있다. 불행하게도, 현실은 여전히 이해를 수반한 수업은 행해지고 있지 않는 듯 하다(Greff, 1995). 한국교육과정평가원(2003)에서 실시한 '초등학교 3학년의 기초학력 진단 평가' 결과에 따르면, 초등학교 3학년의 약 5%가 기초학력에 못 미치는 것으로 나타나고 있다. 이 평가에서 검사로 사용된 문제의 수준은 1, 2 학년에서 수학 내용이 대부분으로 그 평균이 90점이 넘었다. 또한, 학생들의 문제해결력을 분석한 결과(김진호, 조주연, 2004)에 따르면, 연구 대상의 20%는 문제를 풀려는 시도를 하지 않았으며, 더 심한

것은 문제를 풀려고 시도한 학생들은 비체계적인 전략을 사용하여 문제를 해결하였다는 점이다. 즉, 학생들의 사고력이 떨어진다는 염려가 현실로 연구결과에 의해서 나타나고 있는 것이다. 대부분의 이해력을 요구하는 검사에서 성취도가 낮게 나타난다. 이는 '왜 이해를 중시하는 교수·학습은 실현되지 않고 있는 것일까?'하는 질문을 던지게 한다. 수학적 지식을 이해를 바탕으로 교수학습이 이루어지지 않은 이유가 아마도 교사들이 이해를 동반한 수업을 받아 본 경험이 없어서 이거나, 또는 그런 수업을 간접적으로라도 경험을 한 적이 없기 때문이 아닐까하는 진단을 조심스럽게 내려 본다. 결과적으로, 신임 수학교사의 수업 모델은 자신이 초·중·고등학교에서 받았던 교수법을 모형으로 삼는다(Greff, 1995). 본 고에서 살펴보았듯이, 교사가 설명 없이도 다시 말해서 수학적 지식을 전수에 의한 수업도 가능하며, 이런 수업이 또한 어린이가 이해를 바탕으로 스스로 수학적 지식을 구성해 갈 수 있다는 점은 우리에게 시사하는 바가 크다. '좋은 수학 수업'은 무엇인가란 질문을 던지면서, 그 수업 사례를 발굴하여 좋은 수업을 하고 있는 교사들의 수업 특성을 보고한 보고서가 나왔다(2002). 그런데, 교사들이 학생들이 수학을 학습할 수 있도록 다양한 시도들을 하고 있지만, 여전히, 교사 주도로 학습할 내용을 전수시키는 방식의 수업 틀을 벗어나고 있지 못한다. 즉, 교사가 가르칠 지식을 잘 전수할 수 있을까하는 점에서 바라 보았을 때 좋은 수업이라고 할 수 있을 것이다. 좋은 수학 수업이란 무엇인지 그 정의를 단정적으로 내리기는 어렵지만, 학생 스스로 수학적 지식이 담고 있는 의미를 탐구하고 그 의미를 생성하기를 바라는 교사라면 Kamii의 시도는 좋은 수업 사례가 될 수 있다고 본다.[3] 이런 수업을 시도하려면, 교사가 암묵적으로 지니고 학생관에 변화가 발생해야 한다. 구성주의자들이 빈번히 강조하는 말이지만, 학생 스스로 지식을 구성할 수 있다는 신념을 교사가 지녀야 한다. 교사는 학생들이 지식을 구성해 가는 과정에서 교실에 유동하는 아이디어들을 매개하는 매개자로서의 역할을 해야 한다. 이 아이디어들은 여물어가는 과정에 있기 때문에 완성도가 떨어진다. 따라서, 교사가 적절하게 필요한 환경을 조성해 줌으로써 학습자가 아이디어를 진화·발전시킬 수 있는 것이다.

비디오 자료에서는 안 나타나지만, Kamii(1994, 2000)는 대단히 중요한 논쟁을 불러일으키고 있다. 그 중의 하나가 전통적인 수학교육과정 및 교과서에 제시된 목적(goals)이나 목표(objectives)를 정당화하는 것 없이 설정되어 있다는 점이다. 이는 우리의 경우도 예외가 아니라고 생각한다. 교육과정이나 교과서는 예를 들어, 분수를 3학년부터 지도해야 된다고 명시하고 있지만, 왜 3학년부터 지도할 수 있는 것인지 근거를 제시하고 있지 않으며, 교과서 또한 분수를 학습하는 목적은 진술되어 있지 않은 채 분수지식 그 자체만 다루고 있다. 최근에, 이런 비판에 대하여, 배종수(2002)는 학교교육과정에 다루고 있는 지식을 학습해야 하는 목적을 밝히려는 시도를 하고 있다.[4] Kamii(2000)는 단순한

3) 구성주의입장이 아닌 다른 입장을 취하였지만, 학생 스스로 수학 지식을 터득해 가는 수업에 대한 사례는 김수환 등(2004)에서 확인할 수 있다.

4) 물론, 그가 진술한 목적들에 동의하느냐 하지 않느냐 하는 문제는 별도의 문제라고 생각한다. 이런 시도 자체가 수학교육계로 보아서는 꼭 필요한 시도였다고 본다.

"철학" 즉 의견이 아닌 과학적 연구와 이론을 바탕으로 한 목적 및 목표들을 진술해 줄 것을 교육자들에게 요청하고 있다.

본 수업 비디오 및 전사 자료가 수학을 이해하면서 학습할 수 있는 제일의 표본적인 수업은 아닐지라도 비교적 잘 이런 수업을 실시한 수업이라고 보여 진다. 이와 같은 수업을 할 용기를 갖기를 희망하면서 글을 마감한다.

참 고 문 헌

김수환 · 박영희 · 이경화 · 한대희 (2004). 어떻게 이해하지? 서울: 경문사.

김진호 (1994). 국민학교 2학년 아동의 곱셈구구에 의해 생성된 지식 수준 분석. 한국교원대학교 석사학위논문.

김진호 · 노선숙 · 이종희 · 조성민 · 임창연 (2003). 창의성 개발을 위한 중등수학과 단원 구성 방안: 8-가 단계 일차함수를 중심으로. 교육과학연구, **34** (**1**), pp.181-212.

김진호 · 조주연 (2004). 초등학교 학생들의 문제해결 전략 분석. 대한수학교육학회 2004 하계 발표대회.

배종수 (2002). 초등수학교육 내용지도법. 서울: 경문사.

한국교육과정 평가원 (2002). 수학과 교육 내실화 방안 연구: 좋은 수업 사례에 대한 질적 연구. 서울: 한국교육과정평가원.

한국교육과정평가원 (2003). 초등학교 3학년 기초학력 진단 평가. 서울: 한국교육과정평가원.

Greff, J. (1995). The tensions and contradictions of the school mathematics tradition. *Journal for Research in Mathematics Education*, **26(5)**, pp.442-466.

Kamii, C. (1985). *Young children reinvent arithmetic-1st grade: Implications of Piaget's theory*. New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (1989a). *Young children continue to reinvent arithmetic-2nd grade: Implications of Piaget's theory*. New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (1989b). *Young children reinvent arithmetic: Double-column addition*. New York, NY: Teachers College Press.

Kamii, (1990a). *Young children reinvent arithmetic: Multi-digit division*. New York, NY: Teachers College Press.

Kamii, C. (1990b). *Young children reinvent arithmetic: Multiplication of two-digit numbers*. New York, NY: Teachers College Press.

Kamii, C. (1994). *Young children continue to reinvent arithmetic-3rd grade: Implications of Piaget's theory*. New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (2000). *Young children reinvent arithmetic-1st grade: Implications of Piaget's theory* (2nd Ed.). New York: Teachers College Press.

Kim, J. (2002). *Development of instructional units connecting informal and formal mathematical knowledge of equivalency and addition.* Unpublished doctoral dissertation. Teachers College, Columbia University.

Piaget, J. (1965/1976). *The moral judgement of the child.* New York: Free Press.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics: An expanded american edition.* Hillsdale, NJ: Lawrance Erlbaum Associates.

부록. 발생론적 인식론을 적용한 수업-전사자료.

교사: 체런.

체런: 64.

학생들: 동의합니다.

교사: 어떻게 답 64를 얻었는지 설명해 줄 수 있겠니? 에리자벳.

엘리자벳: 저는 20+30=50, 그리고 9+5가 14라는 것을 알았어요. 그래서 합계 64가 나왔어요.

<해설> 두 자리 수의 덧셈은 대개 주어진 법칙을 따라서 하게끔 가르쳐진다. 이런 경우에서 교사는 아동들이 오른쪽 일의 자리를 먼저 더하고, 그 다음 왼쪽 십의 자리의 수를 더하게끔 가르친다. 쟝 피아제의 연구와 이론에 따르면 아동들이 논리적 수학적 지식을 얻는 방법은 주변에서 얻어진 그러한 법칙을 내면화하는 것이 아니라, 스스로 생각하는 능력을 통해서 자신의 내부에 구축한다는 것이다.

5+9와 같은 작은 수들이 들어 있는 1학년 산수에 학생들이 접근하는 방법에 대하여 *Young Children Reinvent Arithmetic*이라는 책이 출판되었다. 이 책의 제목은 아동이 전통적으로 행하던 어떤 지도 없이도 스스로 덧셈을 재창조할 수 있다는 것을 제안하고 있다. 만일 아동이 주사위 게임을 통하여 3+3, 4+2 등과 같은 덧셈을 매일매일 한다면, 어떤 레슨이나 학습지나 교사의 강화 없이도 자연스럽게 그 행동의 결과를 기억하게 될 것이다. 그러면, 두 자리 수의 덧셈은 어떨까? 뉴욕의 한 사립학교에서는 아동이 자신만의 고유한 방법으로 사고하도록 장려하였는데, 이때 아동들은 언제나 십의 자리를 먼저 더하고 일의 자리를 더한다는 것이 발견되었다. 이 점은 이 교실에서도 마찬가지였다. 다음은 2월초 학기 중반에 2학년 학생들에게 이를 실시한 것이다.

교사: [칠판에 세로로 87+24라고 쓰고, 학생들이 문제를 다 풀도록 충분히 기다린다. 문제를 푼 학생들은 조용히 손을 든다.] 셀시.

셀시: 101입니다.

학생들: 동의하지 않아요.

교사: 브라이언, 어떤 답을 얻었지?

브라이언: 110이요.

학생들: 동의하지 않아요.

교사: 제이시.

제이시: 111이요.

학생들: 동의합니다.

교사: 누구 이 답을 설명할 사람? 제이시.

제이시: 80과 20은 100. 그리고 6과 4는 10, 7과 4는 11.

교사: 브라이언, 이제는 아까 네가 말한 답에 동의하지 않니? 지금은 어떻게 생각하니?

브라이언: 아까 답이 틀렸어요.

교사: 셀시, 너는 지금 어떻게 생각하니?

셀시: 저도 이 답이 맞다고 생각해요.

교사: 그러면 다른 것 하나를 더 해 보자.

<해설> 아동들이 다음과 같은 뺄셈 문제를 어떻게 해결하는지 살펴보자.

교사: [칠판에 세로로 26-17이라고 쓰고, 학생들이 문제를 풀도록 충분히 기다린다. 이번에는 문제를 푼 학생들이 조용히 한 명씩 나와서 교사의 귀에 소곤거리며 답을 말한다. 교사는 들은 답들을 칠판에 쓴다.] 자, 보자. 18, 11, 얼마 나왔니?

엘렌, 너는 답이 얼마 나왔니? 좋아, 9. 누구 다른 사람? 여기 많은 학생들이 답이 18, 11, 9라고 말했어요. 누구 여기 있는 답 말고 다른 의견이 있는 사람?

18이라고 생각하는 사람은 몇 명이지? [18 옆에 4라고 쓴다.]

크리스: 제가 증명할 수 있어요.

교사: 11이라고 생각하는 사람은 몇 명이지? [11 옆에 2라고 쓴다.]

9라고 생각하는 사람은 몇 명이지? [9 옆에 10이라고 쓴다.]

학생들: 제가 증명할 수 있어요. 저요. 저요.

교사: 좋아, 게리한테 먼저 기회를 주겠어요. 너는 답이 무엇이라고 생각하지?

게리: 9입니다. 6과 7을 내버려 두고, 20에서 10을 빼요. 그러면 10이 남는데 여기에서 7을 더 빼요. 그러면 3이 되는데, 여기에 6을 더하면 9가 돼요.

교사: 네 답이 무엇이었지?

학생1: 18입니다.

교사: 엘리자벳!

엘리자벳: 20에서 10을 빼면 10이 돼요. 6에서 7을 빼면 0이 돼요. 그리고 1을 뺄 것이 더 남아서 10에서 1을 빼서 9에요.

스티븐: 제가 할래요. 20에서 10을 빼면 10이 됩니다. 6에서 7을 빼면 1이 됩니다. 10에 1을 더하면 11이 나왔어요.

교사: 동의하세요? 스티븐은 20에서 10을 빼고, 거기에 6에서 7을 뺀 1을 더해서 11이 나왔다고 했어요.

학생들: 동의하지 않아요. 선생님!

<해설> 스티븐의 설명에 대해 다음의 그레이스가 한 반박은 알아듣기가 어려웠다. 그렇지만 아동들이 스스로 논쟁하게끔 하면, 그들은 상대방을 설득시키려 할 것이다. 이 생각 자체가 아동들이 산수를 배우게끔 하는 것이다.

그레이스: 그럴 수 없어. 네가 20-10을 하면 어떻게 11이 되겠니? 네가 21에서 10을 빼야 11이 되지 않겠니?

크리스: 내가 증명할게. 20에서 10을 빼면 10이 돼. 이 10을 6에 더하면 16이야. 이 16에서 7을 빼면 9가 돼.

교사: 스티븐, 어떻게 생각하니? 동의하니?

스티븐: 예, 제 생각이 틀렸어요.

교사: 네 생각이 틀렸다는 것이 확실하니?

스티븐: [고개를 끄덕인다.]

<해설> 모든 학생들은 20−10을 먼저 한다. 그렇지만 일의 자리는 세 가지 방법으로 했다. 엘리자벳은 6에서는 6을 뺄 수밖에 없기 때문에 10에서 1을 빼야 한다고 말했다. 게리는 10−7을 먼저 하고 6을 더했다. 그러나 크리스는 10+6을 먼저 하고, 그 다음 7을 뺐다. 스티븐의 대답 11은 대개 모든 교사가 가르칠 때 쓰는 방법과 비슷했다.

피아제는 어린이가 실수를 만드는 이유는 그들이 지적이고 생각하기 때문이라고 했다. 그래서 여기에서 교사의 역할은 외부적인 요소로 아동들이 실수를 고치게끔 하는 것이 아니라, 스스로의 힘으로 자신의 실수를 고칠 수 있는 상황을 만들어 주는 것이라고 했다.

피아제의 이론 <Nature of Logical Mathema- tical Knowledge>에서는 아동들이 논쟁을 충분히 하면, 바른 대답에 이를 수 있다고 했다. 여기에 아동의 오답을 끌어들이는 이유가 있다. 이것은 아동들이 자신의 의견을 충분히 교환하게끔 한다. 이 답이 오답이든 정답이든 아동들은 자신의 답을 주장하기 위해 나름대로의 이론 체계를 세울 것이며, 만일 다른 의견이 더 옳다고 생각되면 그 의견을 받아들일 것이다. 그렇기 때문에 교사는 학생의 답이 '정답이다' 또는 '오답이다'라고 말하지 않게끔 되어 있는 것이다. 그 대신 오히려 학생들이 서로 '동의한다' 또는 '동의하지 않는다'라고 말하게 하는 것이다.

여러분은 아마도 어떻게 학기 초에 교사가 이것을 시작했는지 궁금할 것이다. 그러면 지금과 똑같은 이 학생들이 4 개월 전 학기 초인 8월 1일에는 어떠했는지 알아보자.

교사: 이 문제를 한 번 해결해 보자. [칠판에 세로로 9+6이라고 쓴다.]

손을 들되, 어떻게 이 답을 얻게 되었는지 생각한 후에 들어라. [문제를 푼 학생은 손을 들고, 교사는 학생들이 문제를 다 풀도록 충분히 기다린다.]

좋아, 많은 학생들이 손을 들었구나. 크리스! 네가 제일 먼저 손을 든 것 같구나.

크리스: 선생님, 저는 이렇게 했어요. 9는 10으로, 6은 5로 바꾸었어요.

교사: 그래, 답이 뭐가 나왔지?

크리스: 15요.

교사: 동의하는 사람은 몇 명이지?

학생들: 동의합니다.

교사: 그러면, 누구 반대하는 사람 없니? 마리.

마리: 저는 1을 6에서 빼서 9에 주었어요. 그래서 10. 그리고 5를 더해서 15가 되었어요.

교사: 좋아요. 지호. 다른 방법 있어요?

지호: 9+7=16이라는 것을 알고 있었기 때문에 16에서 1을 더 빼내었어요. 그래서 15가 되었어요.

교사: 잘 했어요. 브렌트!

브렌트: 9에서 3을 빼면 6이 돼요. 그리고 6과 6을 더하면 12가 돼요. 거기에 3을 더하면 15가 나와요.

교사: 브렌트는 9에서 3을 빼서 6을 만들고, 이 6과 6을 더해서 12를 만들었어요. 왜냐하면 브렌트

는 6을 두 번 더하면 12가 된다는 것을 이미 알고 있었거든요. 그 다음 아까 빼 주었던 3을 다시 더해서 15를 만들었어요. 잘 했어요.

<해설> 아동들은 예를 들면 5+5 또는 6+6과 같은 '어떤 수의 2 배'를 3+4와 같은 합보다 더 쉽게 기억한다. 브렌트는 자신이 모르는 답을 구하기 위해 이미 알고 있던 '어떤 수의 2배'를 이용했다.

또, 아동들은 10을 만들려는 시도도 했다. 그래서 크리스는 9+6의 문제를 10+5로 바꾸었다. 이 아동들은 10을 생각하면서 한 자리 수에서 두 자리 수로 수를 확장시켜 갔다. 그 다음, 교사는 두 자리 수의 계산을 시도한다.

교사: 예를 들어 13+13이 있다고 합시다. [칠판에 세로로 13+13이라고 쓴다.] 정답을 얻을 수 있는 제일 좋은 방법은 무엇일까? [학생들이 문제를 풀도록 충분히 기다린다.] 제라드가 한번 해 보겠니?

제라드: 저는 두 개의 10을 더해서 20을 만들었어요. 그리고 두 개의 3을 더해 6을 만들어 20과 같이 합해서 26을 만들었어요.

브렌트: 선생님! 제가 한 방법도 같아요.

교사: 어떻게 했지?

브렌트: 일의 자리에는 1부터 20까지, 아니 19까지의 수가 있어요. 나는 그 수들을 십의 자리로 생각했어요. 그래서 두 10에서 서로를 더하면 20, 그리고 3과 3을 더하면 6, 그래서 20과 6을 더하면 26이에요.

교사: 좋아요. 오늘 여러분들 중에 여기 1과 1을 더한 것이 2라고 생각한 사람은 없었어요? 이것은 1과 1인가요?

학생들: 아니요. 그것은 10과 10이에요.

교사: 그래, 너희들이 너무 잘 해 어쩔 수 없구나. 그러면 이제는 우리가 이제까지 한 번도 안했던 것을 해 보자. 자, 다 <생각하는 모자>를 써라. 이것이 어떻게 되나, 한번 이것부터 해 보자. 17+13. [칠판에 세로로 17+13이라고 쓴다.

학생들: 쉬워요.

교사: [학생들이 모두 손들 때까지 충분히 기다린다.] 벌써 손 든 학생이 있구나. 브렌트.

브렌트: 30이요.

학생들: 동의합니다.

교사: 아무도 반대 안하니? 이 문제에 대해 설명들이 많을 거에요. 그러면, 캐리린이 한번 해 볼까?

캐리린: 저는 10과 10을 떼 내어서 합했더니 20이 되었어요. 그리고 7과 3의 합이 10이라는 것을 전부터 알았거든요. 그래서 20과 10을 더해서 30이 나왔어요.

학생들: 저도 그렇게 했어요. 저도요.

브렌트: 10과 10은 20. 7과 3은 10. 그래서 30이요.

교사: 아주 잘 했어요. 이제 우리가 한번도 안했던 것 하나 더 해 봅시다. 여러분들은 이런 문제를 아주 잘 하는군요.

26+5. [칠판에 세로로 식을 쓴다.] 벌써 답을 구했니? 여러분들은 오늘 정말 빠르구나. 지호, 한번 해 볼까?

지호: 30이요.

학생들: 동의하지 않아요!

교사: 조.

조: 31이요.

학생들: 동의해요!

교사: 조, 어떻게 31이 나왔는지 설명해 주겠니? 많은 아이들이 너의 답에 동의했단다.

조: 저는 6에서 1을 떼어냈어요. 그래서 5와 5는 10, 이 10과 20은 30, 그리고 떼어냈던 1을 더하면 31이 돼요.

교사: 잘 했다.

학생2: 26에서 20을 떼어내고 6과 5를 더하면 11이 돼요. 그리고 이 11을 20에 더하면 31이 돼요.

교사: 좋아. 그러면, 크리스, 한번 해 보렴.

크리스1: 저는 이런 방법으로 했어요. 26에서 1을 빼서 25로 바꿔요. 그래서 25와 5는 30이에요. 그리고 아까 떼어낸 1을 더하면 31이 돼요.

교사: 좋아, 잘 했구나. 크리스, 네가 한 방법은 선생님이 한 방법과 같구나. 너희들이 25와 5의 합이 30이라는 것을 알면, 여기에 1만 가져다 다시 붙여주면 31이 된다. 빠르지? 크리스![이 크리스는 다른 크리스임.] 너는 다른 방법으로 설명할꺼니?

크리스2: 저는 26에 5에서 1을 떼어 만든 4를 더해서 30을 만들었어요. 그리고 1을 다시 30에 더해서 31이 나왔어요.

교사: 26에 4를 더하면 30이라는 것은 알지? 그리고 여기에 1을 더하면 31이 되지?

<해설> 우리는 지금 막 이 문제 해결에 쓰인 네 가지 풀이 방법을 보았다. 조는 5와 5를 더해서 10을 만들었고, 게리는 6과 5를 더했다. 처음 크리스는 문제를 25+5+1로 바꾸었고, 다른 크리스는 26+4+1로 바꾸어 계산했다.

아동의 창의력은 무한하다. 이 아동들은 1학년 때 산수 시간에 어떤 학습지나 반복 연습 등을 하지 않았기에 매우 창의적일 수 있었다. 이 어린이들은 자신들의 독창적인 발명에 매우 흥미를 가졌고, 또 그것을 보여 주는 것을 자랑스러워했다. 아동들이 자신의 창의적인 방법으로 연습하게끔 해 주는 교사는 아동들의 다양한 그리고 전혀 기대하지 않았던 그런 여러 가지의 생각들에 경탄하게 된다.

피아제의 이론에 의해 우리는 어린이들의 <스스로 사고하는 능력과 산수를 창조하는 능력>에 초점을 맞추게 된다. 여러분이 방금 본 내용은 두 자리 수의 덧셈 능력을 발달시키려는 의도를 반영하고 있다. 이 이론을 적용시키기 위해 다음을 제안한다.

아동들로부터 배워질 수 있는 많은 것들이 다음 단계의 우리의 지식(어떻게 아동들이 산수를 창조하는가?)을 구성하게 된다.