韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 18집 제 2호, 2004. 7. 289-294

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 2, July. 2004. 289-294

벡터를 활용한 볼록다각형의 무게중심 탐구

한 인 기 (경상대학교)[1)]
김 기 수 (마산고등학교)

제 7차 수학과 교육과정에서 벡터는 수학 II에서 다루며, 삼각함수, 좌표와 함께 도형의 성질을 대수적으로 탐구하는 중요한 도구이다. 본 연구에서는 벡터 개념을 이용하여 볼록 n각형의 무게중심의 성질을 탐구하고, 이를 바탕으로 '볼록 n각형에서 n개의 중선은 한 점에서 교차하며 교점은 각 중선을 $(n-1):1$로 나눈다'는 것을 벡터를 이용하여 증명하였다.

1. 서론

중ㆍ고등학교 수학과 교육과정에서 다루는 삼각함수, 좌표, 벡터 등은 도형의 성질을 탐구하는 중요한 도구들로, 이들을 이용하면 다각형의 변, 각, 중선, 각의 이등분선, 높이 등의 성질을 대수적으로 표현할 수 있으며, 기하학의 문제를 다양하게 해결할 수 있다.

현행 제 7차 수학과 교육과정에서 벡터는 수학 II에서 다루며, 수학과 교과과정(교육부, 1998)에서는 수학 II는 '10단계까지의 수학과 수학 I에서 습득한 수학적 개념, 원리, 법칙을 토대로 하여 새로운 개념에 접근해 나아가야 하므로, 기본적인 수학적 지식을 항상 확인하고 활용하면서 발전적인 학습이 이루어지도록 해야 한다. 또, 습득된 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 문제를 발견하고, 자주적으로 문제를 해결해 나아가도록 하며...'와 같이 규정하고 있다. 즉, 수학 II에서는 이전에 배운 수학적 개념, 원리, 법칙을 확장하면서 발전적인 학습이 되도록 해야 한다. 수학 II의 이러한 성격에 부합되는 적절한 교수-학습 자료, 심화학습 자료를 개발하는 것은 고등학교 수학교육의 개선을 위해 중요하다고 할 수 있다.

본 연구에서는 삼각형, 사각형 등과 같은 다각형의 무게중심을 벡터를 이용하여 탐구할 것이다. 이를 통해, 이전에 배운 기하학적 개념을 확장시키면서 발전적인 교수-학습을 준비할 수 있는 몇몇 자료를 제시할 것이다.

다각형의 무게중심에 대한 국내의 최근 연구들을 살펴보면, 한인기ㆍ강인주(2000)는 삼각형의 무게중심에 관한 정리를 논증기하의 개념과 방법들을 이용하여 다양한 방법으로 증명하였으며, 한인기(2002a)는 벡터를 이용하여 삼각형의 무게중심에 관한 정리를 증명하고 증명과정에 관련된 탐구 능력을 추출했고, 한인기(2002b)는 볼록 n각형에서 n개의 중선은 한 점에서 교차하며 교점은 각 중선

1) 경상대학교 수학교육과 교수/경상대학교 교육연구원 책임연구원

을 $(n-1):1$로 나눈다는 것을 닮음 개념을 이용하여 보였고, 한인기(2003)는 지렛대의 원리를 이용하여 볼록 n각형에서 무게중심의 성질을 보였다.

본 연구는 고등학교 수학 II의 벡터 개념을 바탕으로 무게중심의 개념을 확장시키는 교수-학습 자료 개발 연구로, 벡터 개념을 이용하여 볼록 n각형의 무게중심의 성질을 탐구하고, 이를 바탕으로 한인기(2002b, 2003)에서 닮음, 지렛대의 원리를 이용하여 고찰한 '볼록 n각형에서 n개의 중선은 한 점에서 교차하며 교점은 각 중선을 $(n-1):1$로 나눈다'는 것을 벡터를 이용하여 증명할 것이다.

2. 볼록다각형의 무게중심

제 7차 수학과 교육과정에서는 삼각형의 무게중심만을 다루고 있다. 삼각형, 사각형, …, n각형의 중선과 무게중심에 관한 정의를 살펴보자. Kolmogorov(1934)의 연구에 제시된 주석을 보면, Kolmogorov는 'Matematicheskoe obrazovanie'라는 잡지의 1928년도 Vol. 5에 출판된 '다각형의 중선과 중선들의 중심에 관한 연구'에서 다각형의 중선과 무게중심을 다음과 같이 설명하였다: '사각형의 한 꼭지점과 이 꼭지점을 제외한 나머지 세 꼭지점으로 이루어진 삼각형의 중선들의 중심을 연결한 선분을 사각형의 중선이라 한다. 사각형의 모든 네 중선은 한 점에서 교차하며 교점은 각 중선을 3:1로 분할한다. 이때, 이 교점을 사각형의 중선들의 중심이라 부른다. 일반적으로, n각형에서 한 꼭지점와 이 꼭지점을 제외한 나머지 $(n-1)$개의 꼭지점으로 이루어진 다각형의 중선들의 중심을 연결한 선분을 n각형의 중선이라 부른다. n각형의 모든 n개의 중선은 한 점에서 교차하며 교점은 각 중선을 $(n-1):1$로 분할한다. 이 점을 n각형의 중선들의 중심이라 부른다'.

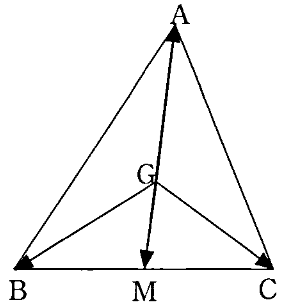
Kolmogorov는 n각형의 중선을 정의하였고, 이들 중선이 한 점에서 만남에 주목하였고, 그 교점을 중선들의 중심이라 불렀다. 한편, 다각형에서 이러한 중선들의 교점을 무게중심이라고 처음 명명한 것이 언제 누구에 의한 것인지는 알 수 없지만, Golovina & Yaglom(1961)은 n각형의 중선들의 교점을 n각형의 무게중심이라 하였다. 한편, 한인기(2003)는 이와 같이 정의된 n각형의 무게중심은 같은 질량을 가지는 n개의 질량점들의 무게중심임을 지렛대의 원리를 이용하여 보였다. 본 연구에서는 n개의 질량점들의 무게중심이 되는, n각형의 중선들의 교점을 무게중심으로 정의할 것이다.

3. 벡터를 이용한 무게중심의 성질 탐구

본 연구에서는 점 G가 $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_k}=\vec{0}$을 만족시키면, G는 볼록 k각형 $A_1A_2\cdots A_k$의 무게중심임을 보이고, 이를 이용하여 볼록 k각형의 중선들은 한 점에서 교차하며 교점은 중선을 $(k-1):1$로 분할함을 보일 것이다. 그리고, 점 G가 볼록 k각형 $A_1A_2\cdots A_k$의 무게중심이면, $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_k}=\vec{0}$이 성립함을 보일 것이다.

정리 1. 삼각형 ABC에 대해, 점 G가 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$을 만족시키면, 점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이다.

증명. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$이므로, $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}$(그림 1). 한편, 변 BC의 중점을 M_1이라 하면, 삼각형 GBC에서 $2\overrightarrow{GM_1}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$. 그러므로, $2\overrightarrow{GM_1}=-\overrightarrow{GA}$. 이로부터, 점 G는 삼각형 ABC의 중선 AM_1에 속함을 알 수 있다. 마찬가지 방법으로, 점 G가 삼각형 ABC의 중선 BM_2, CM_3에 속함을 증명할 수 있다. 결국, 점 G는 삼각형 ABC의 세 중선의 교점, 즉 무게중심이라는 것이 증명된다. □



<그림 1>

정리 1로부터, 삼각형 ABC의 세 중선 AM_1, BM_2, CM_3는 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$을 만족시키는 점 G에서 교차하며, 점 G는 각각의 중선을 2:1로 나눈다는 것을 알 수 있다. 세 직선은 서로 다른 두 점을 각각 지날 수 없으므로, 정리 1의 증명 과정으로부터 다음 정리가 유도된다.

정리 2. 삼각형의 세 중선은 한 점에서 교차하며, 교점은 각 중선을 2:1로 나눈다.

이제, 정리 1의 역을 살펴보자.

정리 1의 역. 점 G가 삼각형 ABC의 무게중심이면, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$이 성립한다.

증명. 삼각형 ABC의 중선을 AM_1, BM_2, CM_3라 하자. 그러면, <그림 1>에서 $\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{AB}+½\overrightarrow{BC}$. 같은 방법으로, $\overrightarrow{BM_2}=\overrightarrow{BC}+½\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CM_3}=\overrightarrow{CA}+½\overrightarrow{AB}$. 이들 세 등식을 각각 더하면,

$$\overrightarrow{AM_1}+\overrightarrow{BM_2}+\overrightarrow{CM_3}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\vec{0}.$$

한편, 정리 2로부터 $\overrightarrow{AM_1}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{BM_2}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{CM_3}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{GC}$임을 알 수 있고, 이로부터 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$가 성립한다. □

정리 1과 그 역으로부터, 점 G가 삼각형 ABC의 무게중심일 필요충분조건은 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$이 성립하는 것임을 알 수 있다. 이제, 사각형에 대해 무게중심을 살펴보자.

정리 3. 점 G가 볼록사각형 ABCD의 무게중심일 필요충분조건은 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$이다.

필요조건 증명. 점 G에 대해 등식 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$이 성립한다고 하자. 그러면, $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{GA}$. 이제, 삼각형 BCD의 무게중심을 M_1이라 하자. 이때, $\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{M_1B}-\overrightarrow{M_1G}$, $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{M_1C}-\overrightarrow{M_1G}$, $\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{M_1D}-\overrightarrow{M_1G}$. 그러므로, $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$ $=(\overrightarrow{M_1B}-\overrightarrow{M_1G})+(\overrightarrow{M_1C}-\overrightarrow{M_1G})+(\overrightarrow{M_1D}-\overrightarrow{M_1G})=(\overrightarrow{M_1B}+\overrightarrow{M_1C}+\overrightarrow{M_1D})-3\overrightarrow{M_1G}$.

한편, 정리 1의 역에 의해, $\overrightarrow{M_1B}+\overrightarrow{M_1C}+\overrightarrow{M_1D}=\vec{0}$이므로, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-3\overrightarrow{M_1G}$. $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{GA}$이므로, $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{M_1G}$. 이로부터, 점 G는 사각형의 중선 AM_1에 속함을 알 수 있으며, $\overline{AG}:\overline{GM_1}=3:1$이 성립한다. 마찬가지 방법으로, 삼각형 ACD의 무게중심을 M_2라 하면, 점 G는 중선 BM_2에 속하며 $\overline{BG}:\overline{GM_2}=3:1$, 삼각형 ABD의 무게중심을 M_3라 하면, 점 G는 중선 CM_3에 속하며 $\overline{CG}:\overline{GM_3}=3:1$, 삼각형 ABC의 무게중심을 M_4라 하면, 점 G는 중선 DM_4에 속하며 $\overline{DG}:\overline{GM_4}=3:1$임을 알 수 있다.

충분조건 증명. 사각형의 네 중선 AM_1, BM_2, CM_3, DM_4을 생각하자. 중선의 정의에 의해,

$$\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{AB}+⅔(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}),\quad \overrightarrow{BM_2}=\overrightarrow{BC}+⅔(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD})$$

$$\overrightarrow{CM_3}=\overrightarrow{CD}+⅔(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}),\quad \overrightarrow{DM_4}=\overrightarrow{DA}+⅔(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

얻어진 등식들을 서로 더하면, $\overrightarrow{AM_1}+\overrightarrow{BM_2}+\overrightarrow{CM_3}+\overrightarrow{DM_4}=\vec{0}$을 얻을 수 있다. 한편, 점 G가 사각형 ABCD의 무게중심이므로, $\overrightarrow{GA}=-¼\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{GB}=-¼\overrightarrow{BM_2}$, $\overrightarrow{GC}=-¼\overrightarrow{CM_3}$, $\overrightarrow{GD}=-¼\overrightarrow{DM_4}$. 이로부터, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$임을 알 수 있다. □

정리 3의 필요조건 증명으로부터 다음 정리를 얻을 수 있다.

정리 4. 볼록사각형의 네 중선은 한 점에서 교차하며, 교점은 각 중선을 3:1로 분할한다.

이제, 정리 1과 3의 결과를 볼록 n각형에 대해 일반화시키면, 다음 정리를 얻을 수 있다.

정리 5. 점 G가 볼록 n각형 $A_1A_2\cdots A_n$의 무게중심일 필요충분조건은 $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$이다.

정리 5를 수학적 귀납법으로 증명하자. 우선, $n=3$인 경우에는 이미 증명하였고, $n=k-1$에 대해, '점 G가 볼록 $(k-1)$각형 $A_1A_2\cdots A_{k-1}$의 무게중심일 필요충분조건은 $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_{k-1}}=\vec{0}$'이라고 가정하고, $n=k$인 경우에 대해 증명하자.

필요조건 증명. 점 G에 대해 등식 $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_k}=\vec{0}$이 성립한다고 하자. 그러면, $\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_k}=-\overrightarrow{GA_1}$. 이제, 볼록 $(k-1)$각형 $A_2A_3\cdots A_k$의 무게중심을 M_1이라 하자. 이때, $\overrightarrow{GA_2}=\overrightarrow{M_1A_2}-\overrightarrow{M_1G}$, $\cdots$, $GA_k=\overrightarrow{M_1A_k}-\overrightarrow{M_1G}$이므로, 이들 등식을 더하면,

$$\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}+\cdots+\overrightarrow{GA_k}=(\overrightarrow{M_1A_2}-\overrightarrow{M_1G})+\cdots+(\overrightarrow{M_1A_k}-\overrightarrow{M_1G}).$$

그런데, 볼록 $(k-1)$각형 $A_2A_3\cdots A_k$의 무게중심이 M_1이므로, $\overrightarrow{M_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{M_1A_k}=\vec{0}$. 결국, $\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}+\cdots+\overrightarrow{GA_k}=-(k-1)\overrightarrow{M_1G}$. $\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_k}=-\overrightarrow{GA_1}$이므로, $(k-1)\overrightarrow{M_1G}=\overrightarrow{A_1G}$. 이로부터, 점 G는 k각형의 중선 A_1M_1에 속하며, $\overline{A_1G}:\overline{GM_1}=(k-1):1$임을 알 수 있다. 같은 방법으로, 나머지 중선 A_2M_2, A_3M_3, $\cdots$, A_kM_k에 대해서도, 점 G가 이들에 속하며 $(k-1):1$로 나눔을 증명할 수 있다. 결국, 점 G는 $A_1A_2\cdots A_k$의 무게중심이며, 중선을 각각 $(k-1):1$로 나눈다.

충분조건 증명. k각형의 중선 A_1M_1, A_2M_2, A_3M_3, $\cdots$, A_kM_k을 생각하자. $\overrightarrow{A_1M_1}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2M_1}$, $\overrightarrow{A_2M_2}=\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3M_2}$, $\cdots$, $\overrightarrow{A_kM_k}=\overrightarrow{A_kA_1}+\overrightarrow{A_1M_k}$. 얻어진 이들 벡터의 등식을 서로 더하고, $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_kA_1}=\vec{0}$임을 감안하면,

$$\overrightarrow{A_1M_1}+\overrightarrow{A_2M_2}+\cdots+\overrightarrow{A_kM_k}=\overrightarrow{A_2M_1}+\overrightarrow{A_3M_2}+\cdots+\overrightarrow{A_1M_k}.$$

이제, $\overrightarrow{A_2M_1}$을 자세히 살펴보자. M_1은 다각형 $A_2\cdots A_k$의 무게중심이므로, $\overrightarrow{M_1A_2}+\overrightarrow{M_1A_3}+\cdots+\overrightarrow{M_1A_k}=\vec{0}$. 이로부터, $\overrightarrow{A_2M_1}=\overrightarrow{M_1A_3}+\overrightarrow{M_1A_4}+\cdots+\overrightarrow{M_1A_k}$. 한편, $\overrightarrow{M_1A_3}=\overrightarrow{M_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}$, $\overrightarrow{M_1A_4}=\overrightarrow{M_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_4}$, $\cdots$, $\overrightarrow{M_1A_k}=\overrightarrow{M_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_k}$. 그러므로,

$$\overrightarrow{A_2M_1}=(\overrightarrow{M_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3})+(\overrightarrow{M_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_4})+\cdots+(\overrightarrow{M_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_k}),$$

$$(k-1)\overrightarrow{A_2M_1}=\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_2A_4}+\overrightarrow{A_2A_5}+\cdots+\overrightarrow{A_2A_k}.$$

같은 방법으로, $\overrightarrow{A_3M_2}$, $\cdots$, $\overrightarrow{A_1M_k}$를 생각하자. 그러면,

$$(k-1)\overrightarrow{A_3M_2}=\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_3A_5}+\overrightarrow{A_3A_6}+\cdots+\overrightarrow{A_3A_1},$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$(k-1)\overrightarrow{A_1M_k}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_1A_4}+\cdots+\overrightarrow{A_1A_{k-1}}.$$

얻어진 등식들을 서로 더하면,

$$(k-1)[\overrightarrow{A_2M_1}+\overrightarrow{A_3M_2}+\cdots+\overrightarrow{A_kM_{k-1}}+\overrightarrow{A_1M_k}]$$
$$=(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\cdots+\overrightarrow{A_kA_1})+[(\overrightarrow{A_2A_4}+\overrightarrow{A_4A_2})+\cdots+(\overrightarrow{A_1A_{k-1}}+\overrightarrow{A_{k-1}A_1})]=\vec{0}.$$

그러므로, $\overrightarrow{A_1M_1}+\overrightarrow{A_2M_2}+\cdots+\overrightarrow{A_kM_k}=\overrightarrow{A_2M_1}+\overrightarrow{A_3M_2}+\cdots+\overrightarrow{A_1M_k}=\vec{0}$.

이제, G를 $A_1A_2\cdots A_k$의 무게중심이라 하자. 그러면,

$$\overrightarrow{GA_1}=-\frac{k-1}{k}\overrightarrow{A_1M_1},\ \overrightarrow{GA_2}=-\frac{k-1}{k}\overrightarrow{A_2M_2},\ \cdots,\ \overrightarrow{GA_k}=-\frac{k-1}{k}\overrightarrow{A_kM_k}.$$

이로부터, $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_k}=\vec{0}$이 증명된다. □

정리 5의 필요조건 증명으로부터 다음 정리를 얻을 수 있다.

정리 6. 볼록 n각형의 n개의 중선은 한 점에서 교차하며, 교점은 각 중선을 $(n-1):1$로 분할한다.

4. 결론

제 7차 수학과 교육과정에서 벡터는 수학 II에서 다루며, 삼각함수, 좌표와 함께 도형의 성질을 대수적으로 탐구하는 중요한 도구이다. 본 연구에서는 벡터 개념을 이용하여 볼록 n각형의 무게중심의 성질을 탐구하고, 이를 바탕으로 '볼록 n각형에서 n개의 중선은 한 점에서 교차하며 교점은 각 중선을 $(n-1):1$로 나눈다'는 것을 벡터를 이용하여 증명하였다.

본 연구에서는 다각형의 중선과 무게중심의 개념을 명확히 하기 위해, Kolmogorov와 Golovina & Yaglom의 연구를 분석하였다. 이들 연구에서는, n각형에서 한 꼭지점와 이 꼭지점을 제외한 나머지 $(n-1)$개의 꼭지점으로 이루어진 다각형의 중선들의 중심을 연결한 선분을 n각형의 중선으로 정의하였으며, n각형의 모든 n개의 중선은 한 점에서 교차하며 이 교점을 n각형의 무게중심이라 하였다. 실제로, 이와 같이 정의된 n각형의 무게중심은 같은 질량을 가지는 n개의 질량점들의 무게중심이다.

한편, 볼록 n각형에서 n개의 중선은 한 점에서 교차하며 교점은 각 중선을 $(n-1):1$로 나눈다'는 것을 벡터를 이용하여 증명하기 위해, 본 연구에서는 점 G가 볼록 k각형 $A_1A_2\cdots A_k$의 무게중심일 필요충분조건은 $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\cdots+\overrightarrow{GA_k}=\vec{0}$임을 수학적 귀납법을 이용하여 보이고, 이를 이용하여 볼록 n각형의 무게중심의 성질을 증명하였다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

한인기 (2003). 수학 문제해결에서 아르키메데스의 공학적 방법에 관한 연구, 수학교육논문집 **17**, pp. 115-126, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (2002a). 벡터를 이용한 삼각형의 무게중심에 관한 정리 증명에 관련된 탐구 능력 추출, 수학교육논문집 **13**, pp.305-316, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (2002b). 유추를 활용한 무게중심 탐구에 관한 연구, 중등교육연구 **13**, pp.205-218, 경남: 경상대학교 교육연구원.

한인기 · 강인주 (2000). 삼각형의 무게중심에 관한 다양한 증명들과 수학교육적 의의, 수학교육논문집 **10**, pp.143-154, 서울: 한국수학교육학회.

Kolmogorov N.A. (1934). Obobshenie teoremy Xuzelya, *Matematicheskoe prosveshenie* **2**, pp.19-20.

Golovina L.I. & Yaglom I.M. (1961). *Induktsiya v Geometrii*, Moscow: FIZMATGIZ.