韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 18집 제 2호, 2004. 7. 277-288

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 18, No. 2, July. 2004. 277-288

직사각형의 분할과 키르히호프의 법칙에 관한 연구

한 인 기 (경상대학교)[1]
이 지 은 (창원중앙여자고등학교)

수학과 인접 교과의 관련성에 대해 탐구하는 것은 학생들이 수학의 응용성을 인식하는데 중요한 역할을 할 것이다. 본 연구에서는 직사각형을 정사각형들로 분할하는 문제에 대해 고찰하고, 이러한 분할 문제와 고등학교 물리교과에 제시된 키르히호프 법칙 사이의 관련성을 조사하여, 키르히호프의 법칙을 만족시키는 전기회로도를 이용하여 직사각형을 정사각형들로 분할할 수 있는 방법을 제시할 것이다.

1. 서론

제 7차 수학과 교육과정(교육부, 1998, p.29)에는 수학교육의 목표 중의 하나로 '수학적 지식과 기능을 활용하여 생활 주변에 일어나는 여러 가지 문제를 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 사고하여 해결할 수 있다'를 들고 있다. 기술한 목표는 수학의 지식, 탐구 방법, 기능을 여러 생활 문제를 해결하는 과정에 활용하도록 하는 수학의 실용성, 응용성, 유용성에 관련된다. 이러한 수학의 응용적 가치의 교육적 중요성은 최근에 Freudenthal에 의해 강조되었으며, 우정호(2000, p.389)는 'Freudenthal의 수학교육관은 학교수학에 포함된 수학적 안목의 형성과 그를 바탕으로 한 적용을 교육의 핵심으로 생각하는 민주시민 교육, 대중을 위한 수학교육관이라고 볼 수 있으며...'와 같이 Freudenthal의 수학교육관을 기술하였다. 살펴본 바와 같이, 수학적 지식, 방법의 실용성, 응용성, 유용성은 수학교육에서 강조되어야 하는 수학의 중요한 측면 중의 하나라고 할 수 있다.

수학의 실용성, 응용성, 유용성에 관련된 최근의 국내 연구들을 분석하면, 크게 두 가지 방향으로, 첫째 수학적 지식, 방법을 도구로 활용하여 다양한 가상의 문제상황을 조직하고 해결하는 연구, 둘째 수학과 다른 인접교과의 관련성에 대한 연구로 나눌 수 있다. 첫 번째 방향의 연구에는 '수학적 모델링'에 관련된 최근의 다양한 연구들이 관련되며, 권기석・박배훈(1997), 이규봉(1999), 김도상・정두영(2000), 홍정희・송순희(1995), 이기열・이병수 (1999) 등의 연구를 들 수 있다. 이들 연구는 수학적 도구를 이용하여 실생활의 문제상황을 모델링하여 수학의 실용성을 밝혔다는 측면에서 교육적 가치를 평가할 수 있다.

두 번째 방향의 연구로, 정치봉(2000)은 컴퓨터과학 교육과정에 포함된 수학에 대한 Hamming의 견해를 소개하면서 수학과 컴퓨터과학의 통합 교과적 성격에 대해 고찰하였고, 한국교육개발원(2000)은 수학 영재교육과정 개발 연구에서 생명수학, 경제수학, 경영수학 등과 같은 교과를 나열하면서 간

1) 경상대학교 수학교육과 교수/경상대학교 교육연구원 책임연구원

학문적 접근을 강조했으며, 한편 이봉주(1997)는 고등학교 공통과학·물리·화학·지구 과학·생물의 교과 내용을 수학 내용과 관련시켜 분석하였다. 이들 연구는 수학과 다른 교과와의 관련성을 강조하고 규명하려는 의미있는 접근이라 할 수 있다. 그러나, 구체적인 수학적 개념, 방법들이 다른 교과와 어떻게 관련되며, 이들을 수학 교수-학습과 관련하여 활용할 수 있는 구체적인 수준에서의 학습 자료 개발에 관련된 연구는 드물다.

본 연구에서는 직사각형을 정사각형들로 분할하는 문제에 대해 고찰하고, 이러한 분할 문제와 고등학교 물리교과에 제시된 키르히호프 법칙 사이의 관련성을 조사하여, 키르히호프의 법칙을 만족시키는 전기회로도를 이용하여 직사각형을 정사각형들로 분할할 수 있는 방법을 제시할 것이다. 이를 통해, 중등학교 수준에서 직사각형을 정사각형들로 분할하는 탐구과제에 관련된 자료를 제시하며, 수학과 물리교과의 구체적인 관련성을 인식할 수 있는 자료를 제공하며, 물리에서 다루는 대상을 활용하여 수학문제를 해결하는 경험을 제공할 것으로 기대된다.

2. 직사각형 분할에 관련된 역사

도형의 분할에 관련된 문제는 오래 전부터 많은 수학자들이 관심을 가져온 연구 영역으로, 1900년대 초반에 힐베르트의 세 번째 문제인 '부피가 같은 두 다면체를 서로 합동인 다면체들로 분할할 수 있는가'라는 해결되었으며, 그 후에 분할에 관련된 많은 문제가 기하학, 조합론 등의 분야에서 연구되었다. 그러한 것들 중의 하나가 '정사각형을 서로 합동이 아닌 정사각형들로 분할'하는 문제이다.

문제에서 '서로 합동이 아닌'이라는 조건을 빼면, 문제는 아주 간단해지지만, 주어진 문제 자체는 비정형적인 논증을 필요로 한다. 특히, 이 문제의 해결 과정에 사용된 수학적 개념 자체는 중등학교 수준을 벗어나지 않지만, 논증 과정의 비정형성은 학생들에게 흥미로운 논리적인 사고 활동의 경험을 제공할 것이다.

정사각형을 합동이 아닌 정사각형들로 분할하는 문제에 대해, 폴란드의 유명한 수학자 Steinhaus(1949)는 정사각형을 서로 합동이 아닌 정사각형들로 분할하는 것은 불가능하다는 추측[2]을 제시하였다. Yaglom(1968)에 의하면, Sprague는 1939년에 'Beispiel einer Zerlegung eines Quadrates in lauter verschiedene Quadrete'에 발표한 자신의 논문에서 정사각형을 서로 합동이 아닌 55개의 정사각형으로 분할할 수 있음을 보였다. 그후, 수학자들은 분할하는 정사각형의 개수를 줄이려 시도하여, 1940년에 Brooks; Smith; Stone & Tutte는 분할하는 정사각형의 개수를 26개까지 줄여, 정사각형을 서로 합동이 아닌 26개의 정사각형으로 분할할 수 있음을 보였다. 한편, Steinhaus(1983)[3]는 정

2) 인용한 문헌은 Steinhaus에 의해 1938년 폴란드어로 출판된 것을 러시아어로 번역하여 1949년에 출판된 것임.

3) 이 책은 앞에서 기술한 Steinhaus(1949)의 제 2판으로 폴란드어로 1954년에 출판되었으며, Steinhaus(1983)은 영어로 번역되어 재출판된 것임.

사각형을 서로 다른 24개의 정사각형으로 분할할 수 있음을 보였다.

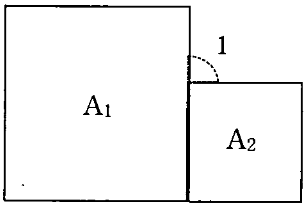
정사각형을 서로 합동이 아닌 정사각형들로 분할하는 문제와 함께 직사각형을 서로 합동이 아닌 정사각형들로 분할하는 문제가 연구되었다. Yaglom(1968)에 의하면, 1925년에 폴란드의 수학자 Moron은 서로 합동이 아닌 정사각형들로 분할하는 직사각형이 존재함을 보였으며, Steinhaus(1949)에는 한 변이 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18인 정사각형들로 직사각형을 만들 수 있다고 하였으며, Steinhaus(1983)에는 직사각형을 아홉 개보다 적은 정사각형들로 분할하는 것은 불가능하다고 주장했지만, 상세한 증명은 제시되지 않았다. 본 연구에서는 직사각형을 아홉 개보다 작은 정사각형들로 분할하는 것이 불가능함을 상세히 제시할 것이다.

3. 직사각형의 분할

1940년에 Brooks; Smith; Stone & Tutte(1940)는 직사각형을 아홉 개보다 작은 정사각형들로 분할하는 것이 불가능함을 보였으며, Yaglom(1968)의 연구에서도 분할 불가능성에 대한 증명을 찾아볼 수 있다. 여기서는 Yaglom(1968)의 연구를 바탕으로 직사각형을 아홉 개보다 작은 정사각형들로 분할하는 것이 불가능함을 상세하게 증명할 것이다. 직사각형을 아홉 개보다 작은 정사각형들로 분할하는 것은 아홉 개보다 작은 정사각형들로 직사각형을 만들 수 없음을 의미하며, 본 연구에서는 후자를 증명할 것이다.

정리 1. 서로 다른 두 정사각형으로 직사각형을 만드는 것은 불가능하다.

증명. 서로 다른 두 정사각형 A_1, A_2를 생각하여, 이들을 서로 변들이 겹치도록 만들자(그림 1). 이때, 정사각형 A_1, A_2에 의해, 빈각[4] 1이 생기는데, 이를 채우기 위해선 다른 정사각형이 필요하다. 그러므로, 두 정사각형으로 직사각형을 만들지 못한다.



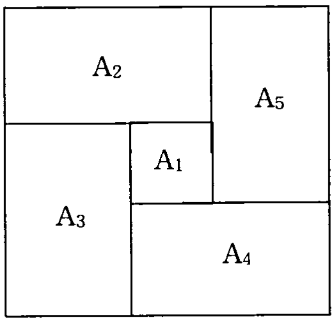
<그림 1>

4) <그림 1>에서와 같이 정사각형 A_1, A_2의 바깥쪽에 정사각형의 변들에 의해 만들어지는 각을 빈각이라 부르기로 함.

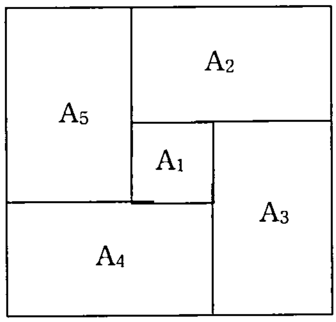
한편, 서로 다른 세 개, 네 개의 정사각형으로 직사각형을 만들지 못한다는 것은 어렵지 않게 정리 1과 같이 빈각을 생각하여 증명할 수 있다. 이제, 서로 다른 다섯 개의 정사각형에 대해 생각하자.

정리 2. 서로 다른 다섯 개의 정사각형으로 직사각형을 만드는 것은 불가능하다.

증명. 서로 다른 다섯 개의 정사각형 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5으로 직사각형을 만든다고 할 때, 이들 정사각형이 어떻게 배열되는가를 살펴보자. A_1을 가장 작은 정사각형이라 하고, <그림 2>와 같이 A_1의 한 변에 A_2를 놓고, A_1와 A_2에 의해 만들어진 빈각에 정사각형 A_3를 두자. 이제, 정사각형 A_4, A_5도 같은 방법으로 놓을 수 있다(살펴본 것과 유사한 방법으로 <그림 3>과 같은 정사각형의 배열을 얻을 수 있지만, <그림 2>와 <그림 3>의 배열은 서로 선대칭되며, 본질적인 차이는 없다). 이때, 정사각형 A_i의 한 변의 길이를 a_i라 하자. 그러면, $a_1+a_3=a_2$, $a_1+a_4=a_3$, $a_1+a_5=a_4$, $a_1+a_2=a_5$이므로, $a_2>a_3>a_4>a_5>a_2$이고 모순이 유도된다.

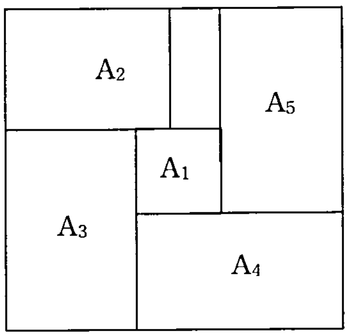


<그림 2>



<그림 3>

한편, 다섯 개의 정사각형을 <그림 4>와 같이 배열할 수도 있지만, 이러한 경우에도 쉽게 모순을 유도할 수 있다. 이로부터, 다섯 개의 서로 다른 정사각형으로 직사각형을 만들 수 없음이 증명된다.



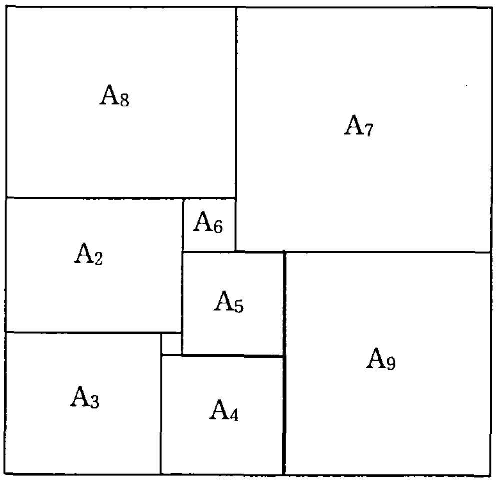
<그림 4>

정리 2로부터, 직사각형을 만들 수 있는 정사각형의 개수는 5개 이상이어야 하며, 가장 작은 정사각형은 직사각형과 변을 공유해서는 안된다는 것을 알 수 있다. 6개, 7개, 8개의 정사각형으로 직사각형을 만들 수 없다는 것은 정리 2의 증명과 유사한 방법으로 증명할 수 있으며, 이제 9개의 정사각형으로 직사각형을 만들 수 있음을 증명하자.

정리 3. 서로 다른 9개의 정사각형으로 직사각형을 만들 수 있다.

증명. <그림 5>와 같이 정사각형 A_1, ⋯, A_9를 배열하고[5], 이들 정사각형의 변들 사이의 관계를 찾아보자. $a_4=a_1+a_5$, $a_2=a_1+a_3$, $a_4+a_9=a_6+a_7+a_1$, $a_8=a_2+a_6$, $a_3=a_1+a_4$, $a_1+a_2=a_5+a_6$, $a_7=a_6+a_8$, $a_9=a_4+a_5$. 이로부터, $a_2=a_1+a_3=2a_1+a_4=3a_1+a_5$, $a_2=a_5+a_6-a_1$. 이로부터, $3a_1+a_5=a_5+a_6-a_1$이므로 $a_6=4a_1$. 한편, $a_5=a_2+a_1-a_6=a_2-3a_1$, $a_5=a_6+a_7-a_9=2a_6+a_8-(a_4+a_5)=3a_6+a_2-(2a_5+a_1)$. 결국, $3a_5=3a_6+a_2-a_1=11a_1+a_2$이므로 $a_2=10a_1$.

이제, $a_6=4a_1$와 $a_2=10a_1$로부터, $a_3=9a_1$, $a_4=8a_1$, $a_5=7a_1$, $a_8=14a_1$, $a_9=15a_1$, $a_7=18a_1$을 얻을 수 있다. 그러면, 이들 정사각형으로부터 얻어지는 직사각형의 가로와 세로의 길이의 비는 32:33이 된다.



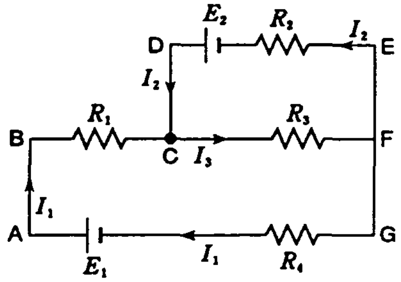
<그림 5>

5) 이러한 정사각형들의 배열은 6개, 7개, 8개의 정사각형으로 직사각형을 만들 수 없음을 고찰하는 과정에서 얻어질 수 있음.

9개의 서로 다른 정사각형으로 직사각형을 만들 수 있기 때문에, 10개, 11개, … 등과 같은 정사각형들로 직사각형을 만들 수 있다는 것은 쉽게 증명될 수 있다. 예를 들어, <그림 5>에서 한 변이 a_7+a_9인 정사각형을 <그림 5>의 오른쪽에 한 변이 겹치도록 붙여 놓으면, 10개의 정사각형으로 직사각형을 만들게 된다. 직사각형을 정사각형들로 분할하는 것에 관련하여, Yaglom(1968)에 의하면 Sprague는 1940년에 'Journal für reine und angewandte Math.'라는 잡지에서 같은 측정단위를 가지는 선분들로 만들어진 직사각형은 서로 다른 정사각형들로 분할할 수 있음을 증명하였다고 한다.

4. 키르히호프의 법칙과 직사각형 분할

독일의 물리학자 키르히호프(Kirchhoff, Gustav Robert; 1824~1887)가 1849년에 발견한 법칙으로, 복잡한 전기회로에서 각 회로에 흐르는 전류와 전압에 관련된 문제의 해결에 사용되는 법칙으로, 고등학교 물리 II에서 다루어지고 있다. 키르히호프 법칙은 제 1법칙과 제 2법칙이 있다. 제 1법칙은 분기점정리라 불리는데, '회로내의 한 분기점에서 분기점으로 흘러 들어가는 모든 전류의 합은 그 분기점에서 흘러나오는 모든 전류의 합과 같다'는 것이다. <그림 6>의 회로에서 분기점 A로 흘러 들어가는 전류 I_1은 흘러나오는 전류 I_2, I_3의 합과 같으며, 분기점 B에서는 $I_4=I_5+I_6+I_1$이 성립한다.



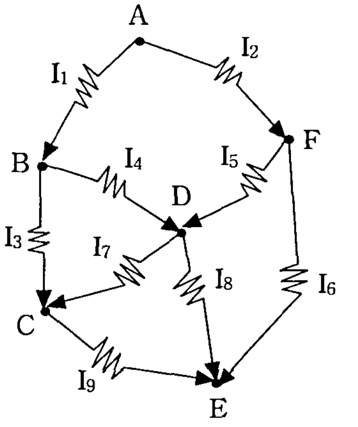
<그림 6>

제 2법칙은 환선정리라고 불리는데, '닫힌회로에서 그 회로의 기전력[6]의 총합은 각 저항과 저항을 흐르는 전류의 곱을 모두 합한 것과 같다'는 것이다. 이때, 일정한 방향으로 흐르는 전류는 '+'로, 반대 방향으로 흐르는 전류는 '−'값으로 한다. 예를 들어, <그림 6>의 닫힌회로 ABCFG에서 기전력

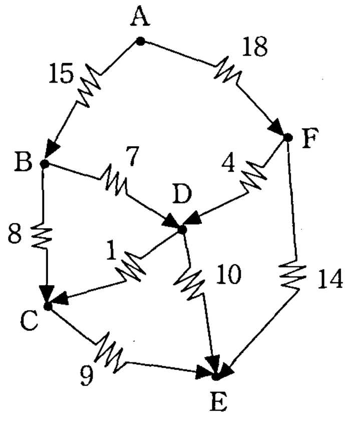
6) 전기장 내에 있는 대전 입자는 전기력에 의해 (+)대전 입자(양전하)는 전위가 높은 쪽에서 전위가 낮은 쪽으로, (−)대전 입자(음전하)는 전위가 낮은 쪽에서 높은 쪽으로 이동하게 된다. 대전 입자가 이동할 때 전하를 운반하여 전하가 흐르게 되며, 이러한 전하의 흐름을 전류라고 한다. 전기회로에서는 전위차(전압)에 의해 전류가 흐르며, 전위차가 차차로 줄어들면서 결국 전류의 흐름은 멈추게 된다. 회로에 전류가 계속 흐르게 하려면, 전지나 발전기 등과 같은 전원이 회로에서 일정한 전위차(전압)를 계속 유지시켜야 한다. 전원이 단위전하에 공급하는 에너지를 기전력이라 한다.

E_1은 $I_1R_1+I_3R_3+I_1R_4$이다. 만약, 닫힌회로에서 전원이 없다면, 즉 <그림 6>의 닫힌회로 ABCFG에서 전원 E_1을 제거하면, 방정식 $I_1R_1+I_3R_3+I_1R_4=0$을 얻을 수 있다.

키르히호프 제 1법칙과 제 2법칙을 이용하면, 닫힌 전기회로에서 전류, 저항, 기전력 사이의 관계를 알 수 있으며, 닫힌회로를 구성하는 각 도체에 흐르는 전류 또는 각 도체의 저항 등을 계산할 수 있다. 이제, 닫힌회로에 포함된 각 도체의 저항 R_i은 모두 1이며, 이 닫힌회로에는 전원이 포함되지 않는 경우를 살펴보자(그림 7).



<그림 7>



<그림 8>

분기점정리를 사용하면, 분기점 B에서는 방정식 $I_1=I_3+I_4$, 분기점 F에서는 $I_2=I_5+I_6$, 분기점 D에서는 $I_4+I_5=I_7+I_8$, 분기점 C에서는 $I_3+I_7=I_9$ 등과 같은 네 개의 방정식을 얻을 수 있다. 한편, 환선정리를 이용하면, 닫힌회로 ABDFA에서는 $I_1+I_4-I_2-I_5=0$, 닫힌회로 BCDB에서는 $I_3-I_7-I_4=0$, DCED에서는 $I_7+I_9-I_8=0$, FDEF에서는 $I_5+I_8-I_6=0$을 얻을 수 있다.

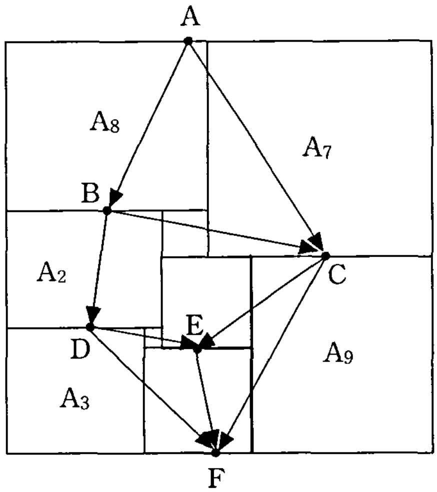
분기점정리와 환선정리를 이용하여, I_1, ⋯, I_9의 9개의 미지수를 가지는 8개의 방정식을 얻었다. 이들 방정식을 연립하여 I_i의 값을 구하기 위해선, 방정식이 하나 더 필요하다. 그러나, 기술한 여덟 개의 방정식으로부터 유도되지 않는 다른 방정식은 키르히호프의 법칙을 이용해서는 얻어지지 않는다. 예를 들어, 닫힌회로 ABCEFA에 대해 환선정리를 이용하여 얻어지는 식은 앞에서 기술한 네 개의 닫힌회로에 대한 방정식으로부터 유도된다(닫힌회로에 키르히호프의 법칙을 이용하면, 살펴본 것과 같이 방정식의 수가 미지수의 수보다 1개가 적게 얻어진다는 것을 오일러 공식을 이용하면 쉽게 생각할 수 있음).

기술한 8개의 방정식을 연립하면, $I_2=\frac{18}{15}I_1$, $I_3=\frac{8}{15}I_1$, $I_4=\frac{7}{15}I_1$, $I_5=\frac{4}{15}I_1$, $I_6=\frac{14}{15}I_1$, $I_7=\frac{1}{15}I_1$, $I_8=\frac{10}{15}I_1$, $I_9=\frac{9}{15}I_1$를 얻게 된다. 이때, I_1의 값을 15로 하면, 각 도체에 흐르는 전류의 값을 구할 수 있으며, <그림 8>과 같은 전류가 흐르는 닫힌회로임을 알 수 있다.

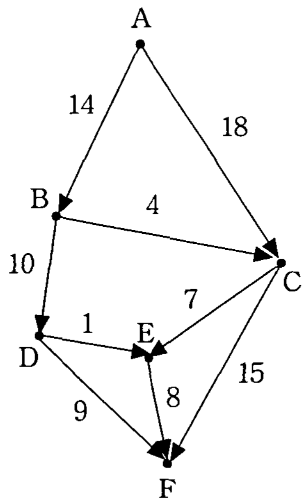
이때, 얻어진 I_i사이의 관계식은 정리 3의 증명과정에서 얻어진 a_i사이의 관계식과 유사함을 알 수 있다. 그리고, <그림 7>에서 한 가지 주목할 것은 분기점 A와 E에서 전류의 합인 I_1+I_2와 $I_6+I_8+I_9$이 같다는 것이다. 회로도에 다른 전원이 존재하지 않으므로, 회로도의 맨위에 있는 분기점 A와 맨아래의 분기점 E에서의 전류의 합이 같음은 자명하다.

Brooks; Smith; Stone & Tutte(1940)의 연구와 Yaglom(1968)의 연구에서는 회로도의 이러한 성질과 직사각형에서 대변이 같음을 관련지워 회로도와 직사각형의 분할 사이의 관련성을 탐구하였다.

<그림 5>에 직사각형은 9개의 정사각형으로 분할되어 있는데, 이때 분할하는 정사각형들의 가로에서 한 직선에 속하는 선분들에 주목하자. 정사각형 A_8과 A_7에서 한 직선에 속하는 두 가로로 이루어진 선분을 L_{87}이라 하고, A_2과 A_6에서 한 직선에 속하는 가로들로 이루어진 선분을 L_{26}, A_5와 A_9에서 한 직선에 속하는 가로들로 이루어진 선분을 L_{59}[7] 등과 같이 정의하자. 그러면, <그림 5>의 직사각형에서 선분 L_{87}, L_{26}, L_{59}, L_{31}, L_{15}, L_{349} 등이 정의된다. 이들 각 선분에 임의의 점을 하나씩 잡아 A, B, C, D, E, F라 하자(그림 9).



<그림 9>



<그림 10>

7) L_{59}는 L_{67}과 같은 선분임.

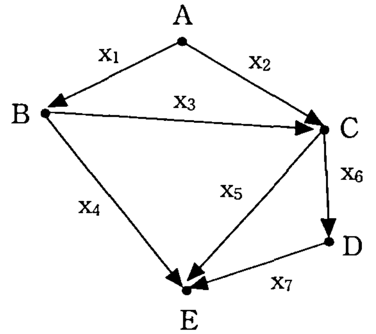
이제, 한 정사각형의 변을 포함하는 선분 L_i와 L_j에 각각 놓인 점들을 선으로 연결하도록 하자. 그러면, 정사각형 A_8에서 L_{87}에 놓인 점 A와 L_{26}에 놓인 점 B는 연결하지만, L_{87}에 놓인 점 A와 L_{31}에 놓인 점 D는 선으로 연결하지 않는다. 한편, 점 B와 C는 정사각형 A_6의 변을 포함하는 선분 L_{26}과 L_{59}에 속하므로, 선으로 직접 연결한다. 이와 같이, 점 A, B, C, D, E, F를 선으로 연결한 후에, 위에서 아래로 화살표를 그리면, <그림 9>를 얻게 된다. 이제, A, B, C, D, E, F를 연결한 선에 해당하는 정사각형의 변의 길이를 <그림 10>과 같이 쓰면, <그림 8>과 같은 회로도를 얻게 된다.

정사각형의 분할과 회로도에서 한 가지 흥미로운 것은 <그림 10>의 회로도를 <그림 5>에서 얻기 위해 했던 조작을 거꾸로 행하게 되면, 회로도로부터 직사각형을 정사각형으로 분할하는 방법을 찾을 수 있다는 것이다. 이때, <그림 10>의 회로도에서 선들에 적힌 수들의 값이 모두 다르면, 직사각형을 서로 다른 정사각형으로 분할하는 방법이 얻어질 것이며, 같은 수들이 포함된다면 같은 정사각형을 포함하는 분할이 얻어질 것이다. 직사각형을 서로 합동이 아닌 정사각형으로 분할하는 문제가 자명하지 않으며, 이 문제의 해결을 위해 많은 수학자들이 노력했음을 감안하면, 회로도로부터 직사각형의 분할 방법을 쉽게 얻을 수 있다는 것은 매우 흥미로운 사실이라 할 수 있다.

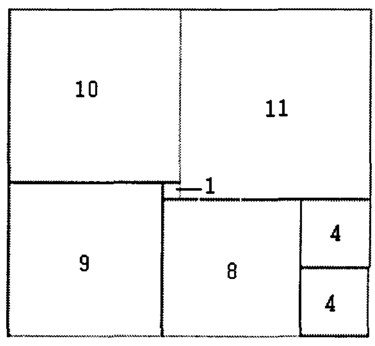
5. 키르히호프 법칙을 이용한 직사각형의 분할

회로도에서 키르히호프의 법칙을 이용하여 직사각형을 정사각형으로 분할하는 예제들을 살펴보자. 이때, 직사각형을 분할하여 얻어지는 정사각형들은 모두 다를 수도 있고, 같은 정사각형들이 포함될 수도 있다. 이들 각 경우에 대한 예제를 하나씩 살펴보기로 하자.

우선, 직사각형을 같은 정사각형들을 포함하여 분할하는 경우를 살펴보자. <그림 11>의 회로도를 살펴보자. 분기점 E에서 분기점 정리를 사용하면 $x_6 = x_7$이므로, x_6과 x_7에 상응하는 정사각형의 변의 길이는 같게 된다.



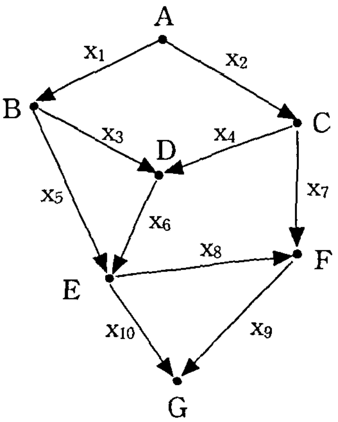
<그림 11>



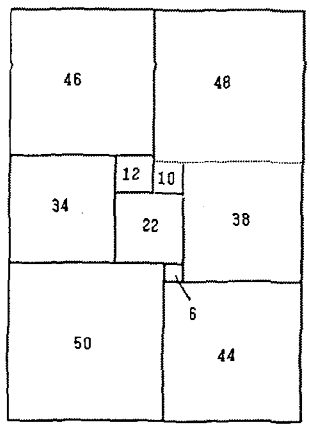
<그림 12>

분기점 B에서 분기점정리에 의해, $x_1=x_3+x_4$, 분기점 C에서는 $x_2+x_3=x_5+x_6$, 분기점 E에서는 $x_6=x_7$. 한편, 환선정리에 의해, 닫힌회로 ABC에서는 $x_1+x_3-x_2=0$, 닫힌회로 BCE에서는 $x_3+x_5-x_4=0$, 닫힌회로 CDE에서는 $x_6+x_7-x_5=0$ 등을 얻을 수 있다. 얻어진 x_1, x_2, …, x_7에 관한 여섯 개의 방정식을 연립하여 풀면, $x_2=\frac{11}{10}x_1$, $x_3=\frac{1}{10}x_1$, $x_4=\frac{9}{10}x_1$, $x_5=\frac{8}{10}x_1$, $x_6=x_7=\frac{4}{10}x_1$. 이때, $x_1=10$을 대입하면, $x_2=11$, $x_3=1$, $x_4=9$, $x_5=8$, $x_6=x_7=4$를 얻을 수 있다. 얻어진 회로도에 상응하는 직사각형의 분할은 <그림 12>와 같다.

이제, 직사각형을 서로 다른 정사각형들을 분할하는 경우를 살펴보자. <그림 13>의 회로도를 보자. 점 B, C, D, E, F에서 분기점정리에 의해, 등식 $x_1=x_3+x_5$, $x_6=x_3+x_4$, $x_2=x_4+x_7$, $x_9=x_7+x_8$, $x_5+x_6=x_8+x_{10}$을 얻을 수 있다. 한편, 회선정리에 의해, 닫힌회로 ABDC에서 $x_1+x_3-x_4-x_2=0$, BED에서 $x_5-x_6-x_3=0$, CDEF에서 $x_4+x_6+x_8-x_7=0$, EFG에서 $x_8+x_9-x_{10}=0$을 얻는다.



<그림 13>



<그림 14>

얻어진 방정식들을 연립하여 풀면, $x_1=\frac{46}{12}x_3$, $x_2=4x_3$, $x_4=\frac{10}{12}x_3$, $x_5=\frac{34}{12}x_3$, $x_6=\frac{22}{12}x_3$, $x_7=\frac{38}{12}x_3$, $x_8=\frac{6}{12}x_3$, $x_9=\frac{44}{12}x_3$, $x_{10}=\frac{50}{12}x_3$를 얻게 된다. 이때, $x_3=12$로 하면, $x_1=46$, $x_2=48$, $x_3=12$, $x_4=10$, $x_5=34$, $x_6=22$, $x_7=38$, $x_8=6$, $x_9=44$, $x_{10}=50$을 얻는다. 회로도에서 얻어진 전류의 양에 상응하는 직사각형의 분할은 <그림 14>와 같다. <그림 14>에서는 직사각형을 서로 다른 정사각형들로 분할하였다.

6. 결론

본 연구에서는 직사각형을 정사각형들로 분할하는 문제에 대해 고찰하고, 이러한 분할 문제와 고등학교 물리교과에 제시된 키르히호프 법칙 사이의 관련성을 조사하여 키르히호프의 법칙을 만족시키는 전기회로도를 이용하여 직사각형을 정사각형들로 분할하는 방법을 상세히 제시하였다.

Sprague는 1939년에 정사각형을 서로 합동이 아닌 55개의 정사각형으로 분할할 수 있음을 보였고, 1940년에 Brooks; Smith; Stone & Tutte는 정사각형을 서로 합동이 아닌 26개의 정사각형으로 분할할 수 있음을 보였고, Steinhaus는 정사각형을 서로 다른 24개의 정사각형으로 분할할 수 있음을 보였다.

정사각형을 서로 합동이 아닌 정사각형들로 분할하는 문제와 함께 직사각형을 서로 합동이 아닌 정사각형들로 분할하는 문제가 연구되었다. 1925년에 Moron은 서로 합동이 아닌 정사각형들로 분할하는 직사각형이 존재함을 보였으며, Steinhaus에는 한 변이 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18인 정사각형들로 직사각형을 만들 수 있다고 하였다. 한편, 1940년에 Brooks; Smith; Stone & Tutte는 직사각형을 아홉 개보다 작은 정사각형들로 분할하는 것이 불가능함을 보였다. 본 연구에서는 Yaglom의 연구를 바탕으로 직사각형을 9개보다 적은 수의 정사각형으로 분할할 수 없음을 초등수학의 개념을 이용하여 증명하였다.

한편, 본 연구에서는 직사각형을 정사각형으로 분할하는 문제와 키르히호프의 분기점 정리, 환선정리의 관련성에 주목하여, 키르히호프 법칙을 만족시키는 회로도로부터 직사각형의 분할을 얻는 방법, 직사각형의 분할로부터 회로도를 얻는 방법을 자세히 고찰하였다. 그리고 나서, 키르히호프 법칙을 만족시키는 회로도로부터 직사각형을 서로 합동인 정사각형을 포함하여 정사각형들로 분할하는 예와 직사각형을 서로 합동인 정사각형을 포함하지 않게 분할하는 예를 제시하였다.

본 연구의 결과는 중등학교 수준에서 직사각형을 정사각형들로 분할하는 심화과제에 관련된 자료로 사용될 수 있을 것이며, 수학과 물리교과의 구체적인 관련성을 인식하는 기회를 제공하며, 물리에서 다루는 대상을 활용하여 수학문제를 해결하는 경험을 제공할 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

교육부 (1998). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서주식회사.

권기석 · 박배훈 (1997). 고등학교에서 수학적 모델링의 활용에 관한 연구, 수학교육 **36(2)**, pp. 149-160, 서울: 한국수학교육학회.

김도상 · 정두영 (2000). 구성주의 관점에서의 수학적 모델링을 통한 수학 교수 · 학습의 전개, 수학교육논문집 **10**, pp.201-220, 서울: 한국수학교육학회.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울: 서울대출판부.

이규봉 (1999). 체험을 통한 수학교육-금괴찾기, 학교수학 **1(2)**, pp.547-554, 서울: 대한수학교육학회.

이기열·이병수 (1999). 수학적 모델링을 통한 학습지도, 수학교육논문집 **9**, pp. 187-202, 서울: 한국수학교육학회.

이봉주 (1997). 고등학교 과학 교과서에서 수학 내용의 분석. 한국교원대학교 석사학위 논문.

정치봉 (2000). 중등수학 및 컴퓨터과학 교육에서 컴퓨터 교육의 연결성 및 통합성, 수학교육논문집 **10**, pp. 303-324, 서울: 한국수학교육학회.

한국교육개발원 (2000). 영재교육과정 개발연구[II], 서울: 장서원.

홍정희·송순희 (1995). 수학적 모델링을 활용한 수학 탐구 수업 효과의 고찰, 수학교육 **34(1)**, pp. 83-96. 서울: 한국수학교육학회.

Brooks R.L.; Smith C.A.B.; Stone A.H. & Tutte W.T. (1940). The dissection of rectangles into squares, *Duke Journal of Mathematics* **7**, pp.312-340.

Steinhaus H (1983). *Mathematical snapshots*, New York: Dover pub.

Steinhaus H. (1949). *Matematicheski kaleidoskop*, Moskva: Gostehizdat.

Yaglom I.M. (1968). *Kak razrezat kvadrat?*, Moskva: Nauka.